

## RESPOSTAS CAÓTICAS EM UM SISTEMA ELETRO-MECÂNICO NÃO IDEAL

### **Débora Belato**

DPM, Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP,  
C.P. 6122, CEP 13083-970, Campinas, SP, Brasil. E-mail: belato@fem.unicamp.br.

### **Hans Ingo Weber**

DEM, Pontifícia Universidade Católica - PUC, CEP 22453-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

### **José Manoel Balthazar**

Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP,  
C.P. 178, CEP 13500-230, Rio Claro, SP, Brasil

### **João Maurício Rosário**

DPM, FEM, UNICAMP, C.P. 6122, CEP 13083-970, Campinas, SP, Brasil.

### **Resumo**

Quando se considera a influência do movimento do sistema oscilatório sobre a fonte de energia nas equações que regem o movimento de um sistema, tal sistema é chamado não ideal. Neste trabalho é investigado um sistema não ideal particular que consiste em um pêndulo simples cujo o ponto suporte é vibrado ao longo de uma guia horizontal por um motor de corrente contínua considerado de potência limitada. O movimento do motor é transmitido para o pêndulo por meio de um mecanismo biela-manivela. Nestas condições detecta-se movimentos caóticos nas oscilações do pêndulo quando um parâmetro de controle é variado próximo a região de ressonância fundamental. Este fenômeno é analisado variando-se um dos parâmetros do pêndulo, onde verifica-se que a forma do atrator permanece com as mesmas características topológicas.

**Palavras-chave:** Dinâmica não linear, Sistema não ideal, Atrator caótico.

## **1. INTRODUÇÃO**

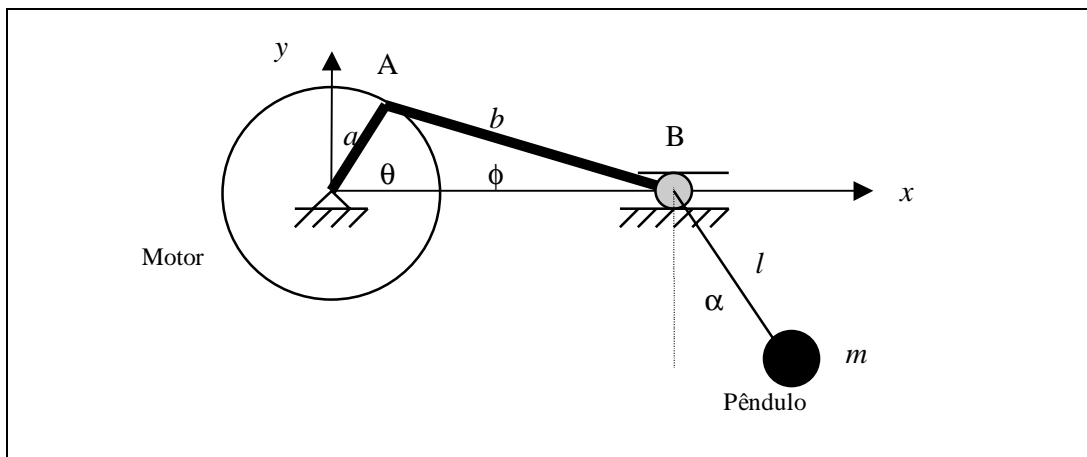
Nas últimas duas décadas a análise de sistemas dinâmicos não lineares tem se resumido no estudo de equações simplificadas obtidas através de algumas suposições feitas durante o modelamento do mecanismo adotado. Muitas vezes, estas suposições fazem com que a força externa não sofra qualquer influência do sistema oscilatório quando o mecanismo está em operação. Neste caso, os fenômenos não lineares que aparecem estão relacionados apenas com a performance do sistema oscilatório e o sistema é chamado ideal. No entanto, pode ser que em certas ocasiões de funcionamento estas simplificações possam afetar a análise final dos resultados, fazendo com que uma análise mais detalhada do mecanismo seja necessária.

Sabe-se que o caos representa uma estreita faixa de soluções sobre a curva de ressonância de um determinado mecanismo, Belato e outros (1999), e esta faixa pode ser diminuída ou aumentada de acordo com a escolha dos parâmetros das equações de movimento durante sua

integração. Por isso, alterações mínimas nas equações de movimento podem modificar os resultados finais na região onde as soluções caóticas dominam, tendo-se necessidade de um melhor equacionamento do mecanismo em questão. Uma maneira de se fazer isso é incluir as interações dinâmicas existentes no sistema nas equações de movimento, fazendo com que o mecanismo funcione com uma fonte de energia não ideal.

Uma fonte de energia é chamada não ideal, quando as equações de movimento do sistema considera a influência do sistema oscilatório sobre a fonte de energia, ou seja, a fonte de energia é de potência limitada. Neste caso, o movimento do sistema oscilatório interagirá com o movimento do motor e vice-versa, aumentando a complexidade do sistema já que oscilações anteriormente desprezadas são agora consideradas.

Neste trabalho, é analisado um sistema não linear particular consistindo de um pêndulo simples cujo ponto suporte é vibrado ao longo de uma guia horizontal através de uma biela-manivela forçada por um motor de corrente contínua de potência limitada, Figura 1.



**Figura 1.** Esquema do mecanismo eletromotor-pêndulo

Este sistema apresenta comportamento complexo quando um parâmetro de controle é variado, Belato (1998), e o comportamento do atrator caótico obtido próximo a região de ressonância fundamental será investigado quando vários parâmetros são variados. O trabalho é organizado como segue: na seção II, é feita a derivação das equações de movimento para o sistema eletromotor-pêndulo; na seção III, é apresentada os principais resultados numéricos e na seção IV, é apresentada as conclusões.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

O mecanismo consiste de um pêndulo cujo o ponto suporte A é vibrado ao longo de uma guia horizontal por um motor de corrente contínua, cuja equações de movimento simplificadas são dadas por (Veja detalhes em Belato e outros (1999)):

$$\begin{aligned} V(t) &= RI(t) + K_E \dot{\theta}(t) \\ M_{\text{MOTOR}} &= K_T I(t) - c_m \dot{\theta} \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $V(t)$  é a voltagem do motor,  $I$  é a corrente,  $R$  é a resistência elétrica,  $K_T$  é a constante de torque,  $K_E$  é a constante da voltagem e  $c_m$  é a constante para o coeficiente de perda interna no motor.

Portanto, as equações de movimento do mecanismo eletromotor-pêndulo são dadas por:

$$(J + \beta_4 F^2 \sin^2 \alpha) \theta'' = \beta_1 - (\beta_2 + \beta_3 F^2) \theta' - \beta_4 \sin^2 \alpha F F' \theta' - \beta_5 F (\cos \alpha + \alpha'^2) \sin \alpha$$

$$\alpha'' + \sin \alpha = \epsilon_2 (F \theta'' + F' \theta') \cos \alpha - \beta_6 \alpha' \quad (2)$$

onde  $F = \left[ 1 + \frac{\epsilon_1 \cos \theta}{(1 - \epsilon_1^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \right] \sin \theta$ ,  $F' = \frac{dF}{dt^*}$  e  $\epsilon_1 = \frac{a}{b}$ . A seguinte transformação foi usada:  $t^* = \omega_0 t$ ,  $t^*$  é o tempo adimensional,  $\omega_0$  é a frequência natural do pêndulo,  $\beta_1$  é o parâmetro de controle,  $\beta_2 = \frac{K_E K_T}{R \omega_0} + \frac{c_m}{\omega_0}$ ,  $\beta_3 = \frac{c_3 a^2}{\omega_0}$ ,  $\beta_4 = m a^2$ ,  $\beta_5 = m a l$ ,  $\beta_6 = \frac{\mu_l}{\omega_0 m l^2}$ ,  $\epsilon_2 = \frac{a}{l}$ , com  $\theta'$  velocidade rotacional do motor,  $\alpha$  é o deslocamento angular do pêndulo,  $J$  é o momento de inércia do rotor do motor,  $m$  é a massa do pêndulo,  $l$  é o comprimento do pêndulo,  $c_3$  é o coeficiente de amortecimento para a fricção no pino A,  $\mu_l$  é coeficiente de amortecimento para fricção sobre o pêndulo e as linhas denotam as derivadas em relação a  $t^*$ .

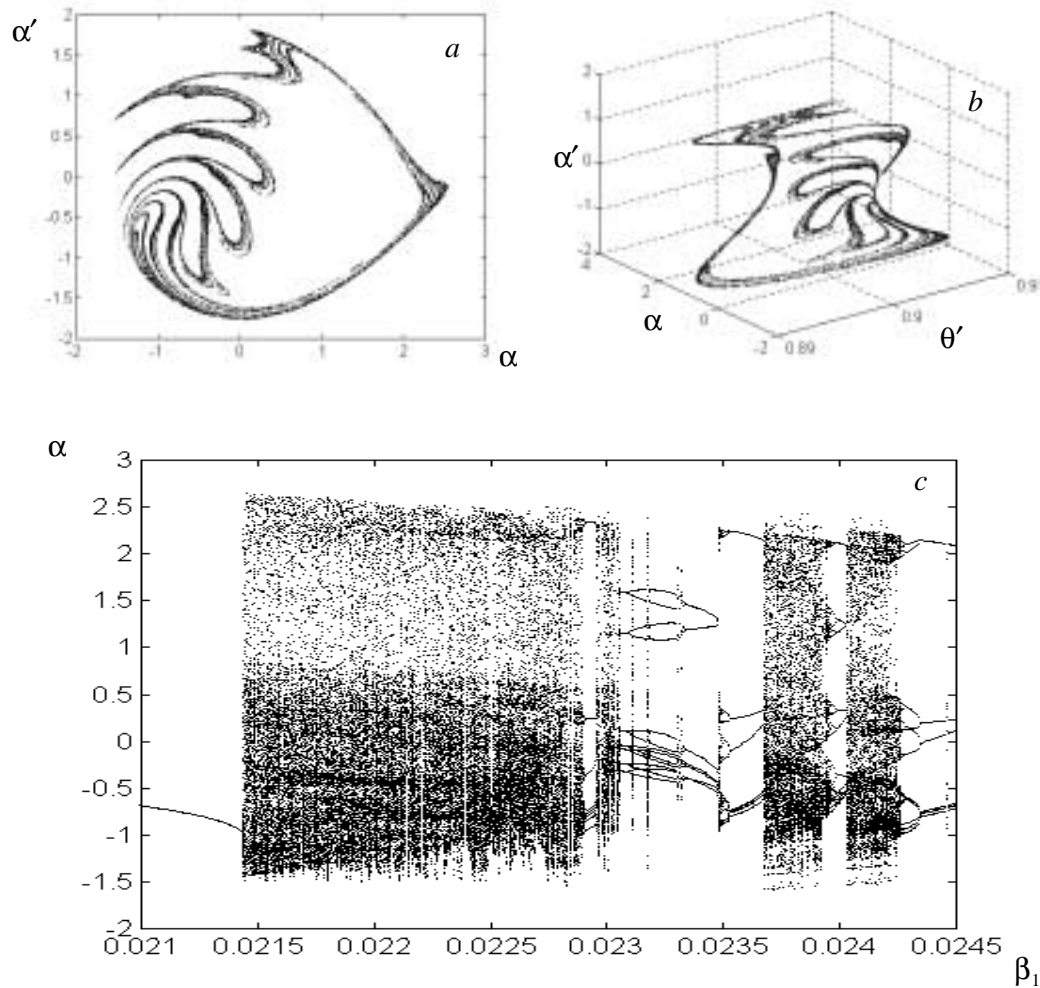
### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

As simulações numéricas foram feitas no Simulink Toolbox do Matlab™, adotando-se  $\beta_1$  como um parâmetro de controle,  $\beta_3 = 0$ ,  $J = 0.001655$ ,  $\beta_6 = 0.001$  e variando-se os parâmetros  $\beta_2$ ,  $\beta_4$ ,  $\beta_5$ ,  $\epsilon_1, \epsilon_2$ , com as condições iniciais  $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$  e  $\theta(0) = \theta'(0) = 0$ . O integrador numérico é o Runge-Kutta de quarta ordem com passo variável.

Observa-se que a perda de estabilidade do sistema, próxima à região de ressonância fundamental, ocorre devido a uma bifurcação sela-nó, onde com um pequeno aumento do valor do parâmetro de controle leva à uma colisão da solução estável (movimento periódico), com uma instável localizada próxima ao ponto de deslocamento angular do pêndulo dado por  $\alpha_c = \pi/2$ . Esta solução instável (sela) aparece no sistema devido à excitação horizontal do ponto suporte do pêndulo sendo a causa principal de perda de estabilidade neste sistema, quando o valor do parâmetro de controle é aumentado. O sistema perde estabilidade destruindo o atrator periódico não ressonante dando origem a um atrator caótico, através de uma *boundary crisis*. Em outro sentido, quando o valor do parâmetro de controle é diminuído a perda de estabilidade ocorre através de uma crise interior levando ao caos. Os valores de bifurcação dependem da escolha dos parâmetros acima definidos e isto não será explorado neste trabalho.

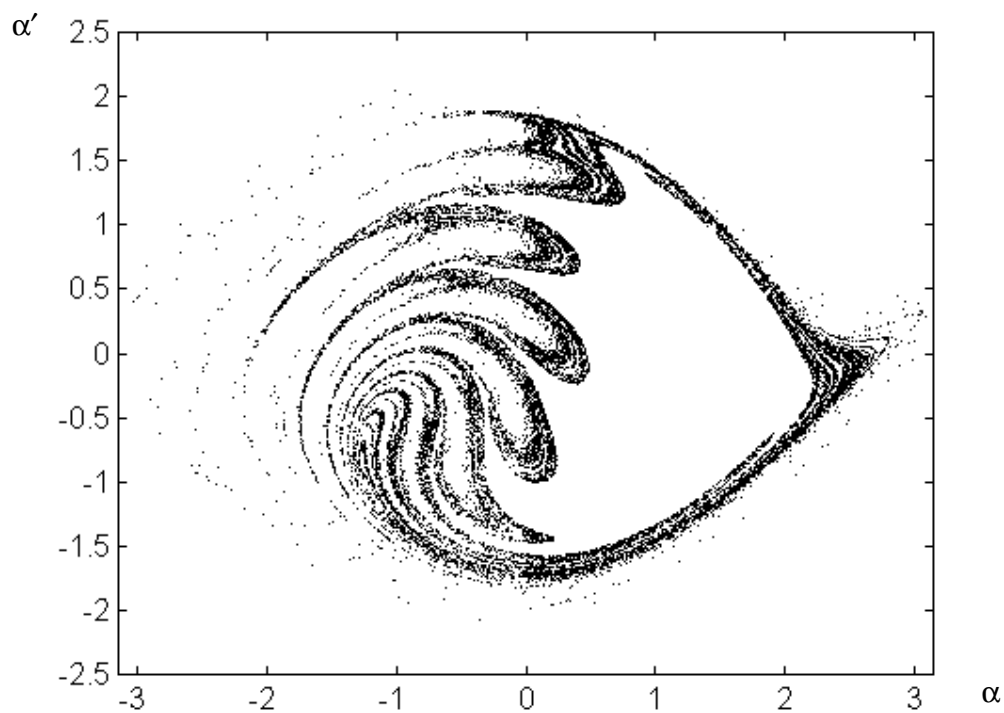
Na figura 2 é apresentado o atrator caótico definindo  $\beta_2 = 0.0245$ ,  $\beta_4 = 4,9 \cdot 10^{-4}$ ,  $\beta_5 = 0.0021$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.2333$  e  $\beta_1 = 0.022$ , e o correspondente diagrama de bifurcação. O atrator caótico é obtido em um mapa de Poincaré tridimensional, calculado toda vez que a trajetória do sistema intersecciona o plano  $\theta = 0$ , sendo que sua projeção sobre o plano  $\alpha' \times \alpha$  é dada na figura 2a. Nota-se que o atrator tem seu movimento restrito ao poço potencial cujo o mínimo é determinado pelos pontos  $(\alpha, \alpha') = (0, 0)$ . As partes protuberantes da figura (também conhecidas como “dedos”), se alongam de maneira que tendem a se encontrarem em um mesmo ponto, como visto na figura 2b, em três dimensões. Estes alongamentos determinam a limitação do atrator, pois quando alcançam a velocidade crítica do pêndulo dada por  $\alpha' \approx 2$ , ocorre o escape do pêndulo do poço potencial. No entanto a estrutura do

atrator permanece com as mesmas características iniciais, embora seu movimento tenda a se tornar ilimitado quando os valores dos parâmetros escolhidos diminuem.

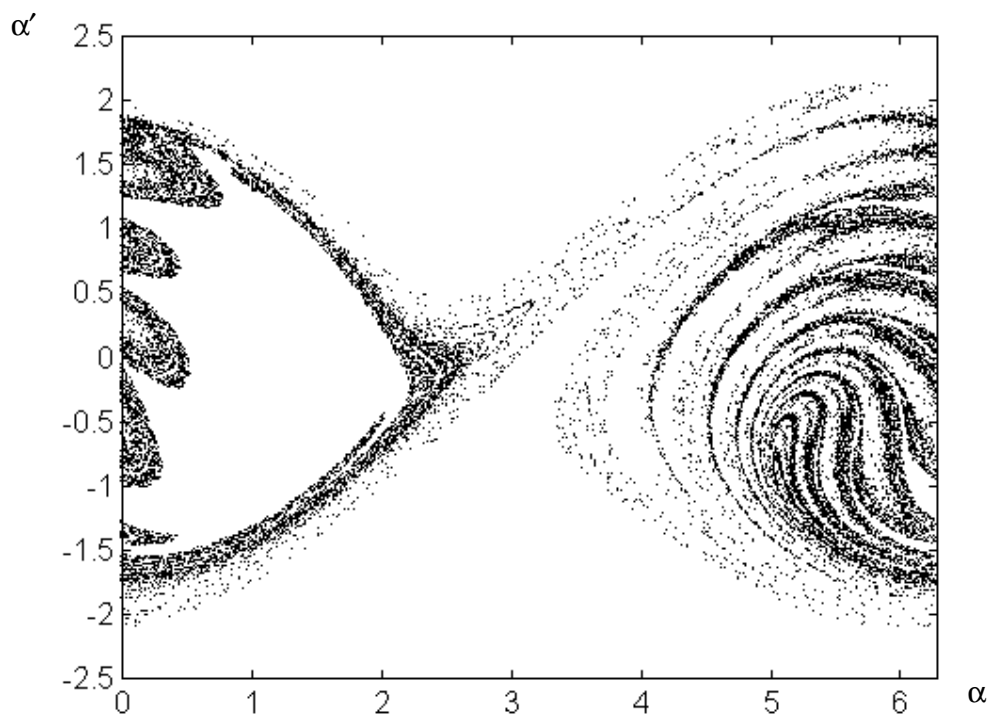


**Figura 2.** Os valores dos parâmetros são:  $\beta_2 = 0.0245$ ,  $\beta_4 = 4,9 \cdot 10^{-4}$ ,  $\beta_5 = 0.0021$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.2333$ . (a) Mapa de Poincaré do atrator caótico dentro de um único poço potencial quando  $\beta_1 = 0.022$ . Este mapa é obtido pela projeção do mapa de Poincaré tridimensional sobre o plano  $\alpha' \times \alpha$ . (b) Mapa de Poincaré tridimensional. (c) Diagrama de bifurcação.

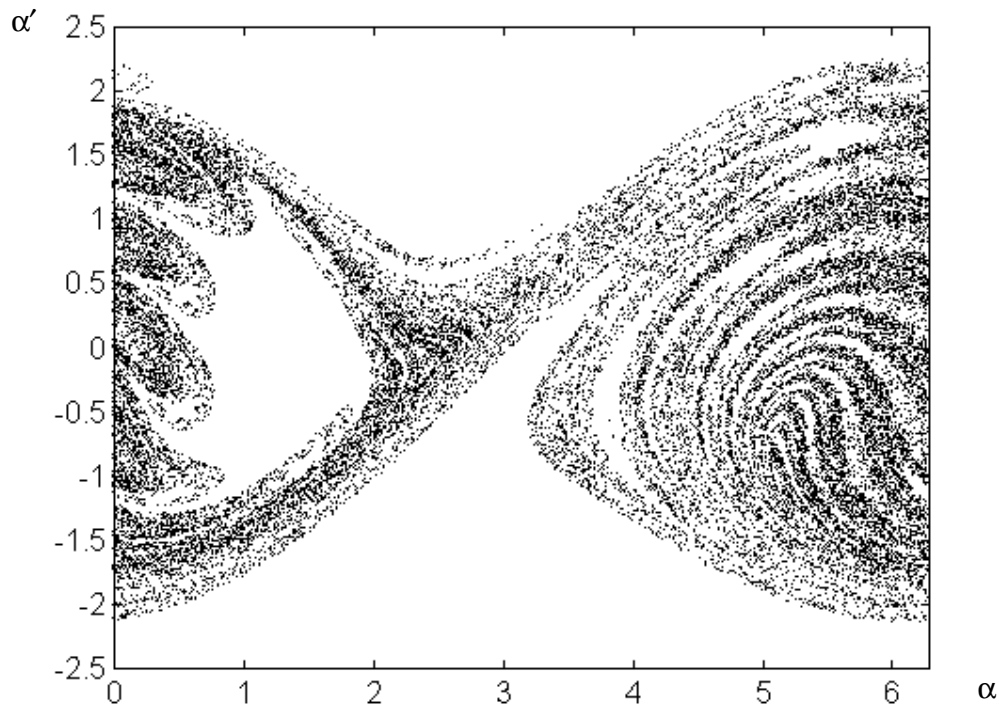
A figura 3 mostra o atrator ilimitado quando  $\beta_2 = 0.0245$ ,  $\beta_4 = 3,43 \cdot 10^{-4}$ ,  $\beta_5 = 0.0015$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.2333$  e  $\beta_1 = 0.022$ . Quando os valores destes parâmetros são diminuídos ocorre um preenchimento nos poços potenciais caracterizados por um aumento na dispersão dos pontos no mapa de Poincaré. Neste caso, o atrator consegue escapar do poço potencial quando o valor crítico da velocidade do pêndulo é alcançado, visitando aleatoriamente qualquer outro poço potencial. Neste instante o atrator é ilimitado, mas mesmo assim possui uma estrutura topológica similar ao anterior, dada pela figura 2, e aos atratores obtidos nas figuras 4 e 5. Os “dedos” tendem a se movimentar de maneira a preencher cada vez mais o interior do espaço de estado, e esta dispersão irregular dos pontos mostra um aumento da velocidade de oscilação do pêndulo.



**Figura 3.** Atrator caótico obtido quando:  
 $\beta_2 = 0.0245$ ,  $\beta_4 = 3,43 \cdot 10^{-4}$ ,  $\beta_5 = 0,0015$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,2333$  e  $\beta_1 = 0.022$



**Figura 4.** Atrator caótico obtido quando:  
 $\beta_2 = 0.0245$ ,  $\beta_4 = 2,45 \cdot 10^{-4}$ ,  $\beta_5 = 0,0011$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,2333$  e  $\beta_1 = 0.022$



**Figura 5.** Atrator caótico obtido quando:

$$\beta_2 = 0.02, \beta_4 = 1,25 \cdot 10^{-4}, \beta_5 = 5 \cdot 10^{-4}, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,25 \text{ e } \beta_1 = 0.018$$

#### 4. CONCLUSÕES

Um sistema dinâmico particular não ideal é analisado através de simulação numérica. Próximo a região de ressonância fundamental, a perda de estabilidade ocorre devido a presença de uma boundary crisis (quando o valor do parâmetro de controle é aumentado) e através de uma crise interior (quando o valor do parâmetro de controle é diminuído), sendo que ambos os eventos levam ao caos. A investigação é feita variando-se vários parâmetros simultaneamente mostrando que a estrutura topológica do atrator caótico permanece quase a mesma, ou seja, é similar em todos os casos estudados. Observa-se também que a dispersão dos pontos sobre o plano de estado se torna maior quanto menor forem os valores adotados para os parâmetros.

#### 5. AGRADECIMENTO

Os autores agradecem à FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do estado de São Paulo) pelo apoio e suporte financeiro para o desenvolvimento deste trabalho.

#### 6. REFERÊNCIAS

- Belato D., 1998, “Não Linearidades do eletro-pêndulo”. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Brasil, 128p.

- Belato D., Weber H.I., Balthazar J.M., Mook D.T., 1999, “Chaotic Vibration of a Nonideal Electro-Nonideal Electro-Mechanical System”, in *Applied Mechanics in the Americas*, P.B.Gonçalves, I. Jasiuk, D. Pamplona, C. Steele, H.I. Weber and L. Bevilacqua - Editors, Published by AAM and ABCM, v. 7, p. 539-542.
- Nayfeh A.H., Mook D.T., 1979, “Nonlinear Oscillations”, John Wiley & Sons, New York.
- Stewart H.B. & Ueda Y., 1991, “Catastrophes with indeterminate outcome”, Proc. R. Soc. Lond. A, v.432, p.113-123.
- Thompson J.M.T., Bishop S.R. & Leung L.M., 1987, “Fractal basins and chaotic bifurcations prior to escape from a potential well”, Physics Letters A: v.121, n.3, p.116-120.
- Thompson J.M.T., 1989, “Chaotic phenomena triggering the escape from a potential well”, Proc. R. Soc. Lond. A, v.421, p.195-225.
- Van Dooren, R., 1996, “Chaos in a pendulum with forced horizontal support motion: a tutorial.”, Chaos, Solitons & Fractals, v.7, n. 1, p. 77-90.