

MODELAGEM ACÚSTICA PARA DETERMINAÇÃO DA EFICIÊNCIA DE RADIAÇÃO MODAL DO ALOJAMENTO DE UMA CAIXA DE ENGENHAGEM

Newton Sure Soeiro

Universidade Federal do Pará, Departamento de Engenharia Mecânica, 66.075-110, Belém-PA, Brasil, E-Mail: nsoeiro@ufpa.br.

Samir N. Y. Gerges

Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Mecânica, Lab. de Vibração e Acústica, 88.040-900, Florianópolis-SC, Brasil, E-Mail: gerges@mbox1.ufsc.br

Resumo

Neste trabalho apresenta-se a formulação matemática do método de elementos de contorno e os procedimentos para a simulação do comportamento vibro-acústico modal de estruturas através dos métodos de elementos finitos e elementos de contorno. Os resultados computacionais apresentados dizem respeito a modelagem de uma placa plana simplesmente apoiada e do alojamento de uma caixa de engrenagem de uso veicular. A validação do procedimento usado é feita através da comparação dos resultados numéricos com aqueles obtidos pela formulação analítica disponível para placas retangulares simplesmente apoiadas.

Palavras-chave: Modelagem Acústica Numérica, Eficiência de Radiação Modal, Caixa de Engrenagem.

1. INTRODUÇÃO

O comportamento de vibração estrutural e a radiação acústica a ele relacionado, nos últimos anos, tem merecido muita atenção por parte dos engenheiros. Entretanto, estes problemas são de tratamento matemático analítico difícil, principalmente, quando estão relacionados a uma estrutura complexa, tal como ocorre quando se pretende modelar um alojamento de caixa de engrenagem de uso veicular.

Tradicionalmente, a capacidade de radiação sonora de uma estrutura é caracterizada pela eficiência de radiação acústica. Por outro lado, é um fato conhecido, através da literatura disponível na área de acústica, que a radiação sonora de um corpo elástico, vibrando em regime permanente, está relacionada à distribuição da velocidade de vibração na direção normal da superfície do corpo, sua forma geométrica superficial e do meio ambiente. Assim, existe uma relação próxima entre vibração e som radiado, isto é, a vibração de uma estrutura induz radiação sonora e vice versa.

As propriedades de vibração de uma estrutura são caracterizadas pelos modos de vibração estrutural. Sob certas circunstâncias, a estrutura vibrará segundo uma forma deformada, denominada de forma modal, que não está relacionada a qualquer fator externo e pode refletir as propriedades físicas inerentes à estrutura vibrante. Portanto, devido a relação existente entre vibração estrutural e radiação sonora, pode-se deduzir que existirá uma forma de distribuição de radiação sonora associada com a forma modal de vibração, de tal modo que aquela forma de distribuição está relacionada às características físicas inerentes da estrutura e, assim sendo, fornecerá uma eficiência de radiação modal.

Neste trabalho, apresenta-se os procedimentos para a simulação do comportamento vibro-acústico modal de estruturas através dos métodos de elementos finitos e elementos de contorno, bem como uma validação feita com base em resultados analíticos disponíveis para placas planas. Posteriormente, o procedimento é aplicado para a determinação da eficiência de radiação modal do alojamento de uma caixa de engrenagem de uso veicular.

2. FORMULAÇÃO TEÓRICA E PROCEDIMENTO DE CÁLCULO

A análise acústica pelo método de elementos de contorno é um procedimento de solução numérica baseado na solução de equações integrais obtidas a partir da aplicação do teorema da divergência ao produto interno da equação diferencial, que governa o problema, e a função de Green. Para o problema acústico, no domínio da frequência, esta equação diferencial é a equação escalar de Helmholtz, dada por:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (1)$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano, p é a pressão acústica e $k=\omega/c$ é o número de onda acústica.

As possíveis condições de contorno utilizadas são as seguintes: $p = \bar{p}$ em S_1 (condição de Dirichlet), $\frac{\partial p}{\partial n} = -i \rho \omega \bar{v}_n$ em S_2 (condição de Neumann) e $\frac{\partial p}{\partial n} = -i \rho \omega A_n p$ em S_3 (condição de Robin), com $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, sendo \bar{p} a pressão sonora na superfície S_1 , \bar{v}_n a velocidade normal na superfície S_2 e A_n a admitância normal na superfície S_3 .

Em acústica, tanto a análise de elementos de contorno direta (aproximação colocacional) quanto a indireta (aproximação variacional) podem ser usadas. As palavras direta/indireta referem-se a escolha da incógnita na superfície do modelo. O método direto usa a pressão e velocidade normal como variáveis de superfície enquanto o método indireto utiliza a descontinuidade de pressão e de velocidade normal através da superfície supostamente fina (diferença entre os dois lados de uma superfície). Estas duas formulações levam à equações integrais diferentes, para o campo de pressão, que são resolvidas usando técnicas diferentes. Por outro lado, as palavras colocacional / variacional referem-se a técnica de solução. Em uma técnica colocacional força-se a solução aproximada satisfazer a equação integral do contorno exata em um número finito de pontos sobre a superfície, enquanto que na técnica variacional, a solução aproximada é obtida minimizando-se um funcional associado com a equação integral do contorno original. Neste trabalho é apresentada a formulação matemática do método indireto que foi o utilizado nas simulações.

2.1. Método Indireto (Aproximação Variacional)

A equação integral que forma a base da análise de elemento de contorno indireta, segundo Gardner et al (1996), é obtida em termos de descontinuidade de velocidade (σ , *single layer potencial*) e de pressão (μ , *double layer potencial*) através da superfície, como:

$$p(\mathbf{R}) = - \int_S \left[G(\mathbf{R}', \mathbf{R}) \sigma(\mathbf{R}') - \frac{\partial G(\mathbf{R}', \mathbf{R})}{\partial n(\mathbf{R}')} \mu(\mathbf{R}') \right] dS(\mathbf{R}') \quad (2)$$

onde p é a pressão acústica sobre a superfície, $\partial\{.\}/\partial n(\mathbf{R}')$ é a derivada parcial de uma função em relação a normal para fora do domínio acústico em um ponto \mathbf{R}' da superfície, G é a

função de Green e σ e μ estão relacionados, respectivamente, à diferença de velocidade de partícula e de pressão acústica através da superfície S como:

$$\sigma = \frac{\partial p^+}{\partial n} - \frac{\partial p^-}{\partial n} = -i\rho\omega(u^+ - u^-) \quad (3)$$

$$\mu = p^+ - p^- \quad (4)$$

Nas Eq. (3) e (4), os sobrescritos $+$ e $-$ simbolizam os valores em ambos os lados da superfície S . A equação integral para a velocidade de partícula normal pode ser obtida da equação integral de pressão como:

$$\frac{\partial p(\mathbf{R})}{\partial n(\mathbf{R})} = -i\rho\omega u = -\int_{S(\mathbf{R}')} \left[\frac{\partial G(\mathbf{R}', \mathbf{R})}{\partial n(\mathbf{R})} \sigma(\mathbf{R}') - \frac{\partial^2 G(\mathbf{R}', \mathbf{R})}{\partial n(\mathbf{R}') \partial n(\mathbf{R})} \mu(\mathbf{R}') \right] dS(\mathbf{R}') \quad (5)$$

Embora a formulação indireta seja válida para condições de contorno em geral, a representação aqui é restrita a condições de contorno de velocidade para o propósito da abordagem feita para o problema de determinação da eficiência de radiação acústica. Sob esta condição, a Eq. (5) é reduzida para:

$$-i\rho\omega u(\mathbf{R}) = \int_{S(\mathbf{R}')} \left[\frac{\partial^2 G(\mathbf{R}', \mathbf{R})}{\partial n(\mathbf{R}') \partial n(\mathbf{R})} \mu(\mathbf{R}') \right] dS(\mathbf{R}') \quad (6)$$

A solução da Eq. (2) pode ser obtida pela minimização de um potencial J , onde:

$$J = \frac{1}{2} \int_{S(\mathbf{R})} \int_{S(\mathbf{R}')} \frac{\partial^2 G(\mathbf{R}', \mathbf{R})}{\partial n(\mathbf{R}') \partial n(\mathbf{R})} \mu(\mathbf{R}') \mu(\mathbf{R}) dS(\mathbf{R}') dS(\mathbf{R}) + i\rho\omega \int_{S(\mathbf{R})} u(\mathbf{R}) \mu(\mathbf{R}) dS(\mathbf{R}) \quad (7)$$

Os valores desejados das variáveis de superfície dos elementos de contorno, μ , são aqueles que minimizam o funcional definido na Eq. (7). Este funcional pode ser expresso na forma matricial como:

$$J = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{b} \quad (8)$$

onde os elementos da matriz \mathbf{A} e do vetor \mathbf{b} são obtidos da avaliação das integrais aproximando os potenciais σ e μ nos nós dos elementos usados na discretização da superfície S . A equação final do sistema pode ser obtida, a partir da Eq. (8), impondo a condição de estacionariedade em $\boldsymbol{\mu}$, isto é $\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{b}$. Subseqüentemente, as respostas de velocidade e pressão acústica no campo e eficiência de radiação podem ser avaliadas pelas seguintes expressões:

$$p(\mathbf{r}) = -\int_S \left[G(\mathbf{R}', \mathbf{r}) \sigma(\mathbf{R}') - \frac{\partial G(\mathbf{R}', \mathbf{r})}{\partial n(\mathbf{R}')} \mu(\mathbf{R}') \right] dS(\mathbf{R}') \quad (9)$$

$$\frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial x_j(\mathbf{r})} = -i\rho\omega u_j = -\int_{S(\mathbf{R}')} \left[\frac{\partial G(\mathbf{R}', \mathbf{r})}{\partial x_j(\mathbf{r})} \sigma(\mathbf{R}') - \frac{\partial^2 G(\mathbf{R}', \mathbf{r})}{\partial n(\mathbf{R}') \partial x_j(\mathbf{r})} \mu(\mathbf{R}') \right] dS(\mathbf{R}') \quad (10)$$

$$\sigma_{\text{rad}} = \frac{\frac{1}{2} \int_S \text{Re} \{ \mathbf{u} \mathbf{v}_n^* \} dS}{\rho c \int_S |\mathbf{v}_{\text{rms}}|^2 dS} \quad (11)$$

onde $x_j(\mathbf{r})$, para $j = 1$ a 3 , são os vetores unitários nas direções x , y e z , respectivamente, na posição \mathbf{r} e u_j é a velocidade de partícula na direção x_j e posição \mathbf{r} .

2.2. Procedimento de Cálculo

O procedimento para a predição da radiação acústica envolve, de um modo geral, como um passo inicial, a determinação da velocidade de superfície da estrutura sob análise, a qual tem origem no carregamento aplicado sobre a mesma. Em seguida, é feito o cálculo da pressão sonora, resolvendo a equação de onda acústica, através de um dos dois métodos descritos anteriormente, com as velocidades de superfície obtidas, na etapa inicial, empregadas como condições de contorno.

Pode-se realizar simulações considerando modelos com ou sem interação fluido-estrutura, sendo que para os problemas aqui apresentados este efeito é negligenciado, pelo fato do comportamento das estruturas não serem afetados de modo significativo pela presença do fluido circundante, uma vez que este fluido não é pesado e nem tão pouco as estruturas muito flexíveis. Assim, o problema é desacoplado e, como tal, os problemas estrutural e acústico são considerados separadamente.

A partir das considerações feitas anteriormente e tendo como objetivo a utilização de programas comerciais, que possibilitem a implementação da formulação teórica apresentada, é possível a obtenção dos deslocamentos da superfície vibrante pelo método de elementos finitos (MEF) através do programa ANSYS, o qual possibilita grandes recursos para a etapa de pré-processamento (geração da malha de elementos) e boas rotinas de solução para o problema de vibração estrutural, e de posse destes deslocamentos na superfície do modelo gerar as condições de contorno necessárias para resolver o problema acústico no SYSNOISE pelo método de elementos de contorno (MEC).

3. SIMULAÇÃO DA PLACA SIMPLEMENTE APOIADA

Uma estrutura simples foi modelada para testar a validade do método de modelagem e a eficiência dos programas empregados para sua implementação. O exemplo escolhido para modelagem numérica foi o de uma placa simplesmente apoiada, tendo por base de comparação os resultados das curvas teóricas para a eficiência de radiação modal desenvolvidas por Wallace (1972), quando do estudo de uma placa plana simplesmente apoiada vibrando em um baffle infinito (radiação hemisférica).

Para a obtenção das predições computacionais, um modelo de elementos finitos foi desenvolvido usando o ANSYS. As dimensões da placa foram $300 \times 300 \times 7$ mm, de modo que a relação de forma ($7/300 = 0,0233$) satisfaz o critério de placa fina e, por este motivo, um elemento de casca com capacidade de membrana e flexão foi selecionado (SHELL63). O modelo teve 900 elementos e 961 nós para uma malha de 30×30 elementos. O tamanho da malha foi determinado de forma a se obter um total de elementos por comprimento de onda acústica superior a 6 (seis), para se ter uma precisão aceitável dos resultados a serem obtidos.

Assim, o menor comprimento de onda acústica, que corresponde a frequência mais alta de interesse, determinará o tamanho máximo do elemento.

Os resultados teóricos para as frequências naturais, de uma placa retangular simplesmente apoiada, podem ser obtidos a partir da seguinte equação apresentada por Leissa (1993):

$$f_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}} \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) \quad (\text{Hz}) \quad (17)$$

onde a e b são os comprimentos dos lados da placa e m,n = 1,2,3 ... os índices modais correspondentes aos eixos x e y respectivamente. As outras quantidades são o módulo de elasticidade (E), massa específica (ρ) e o coeficiente de Poisson (ν), que para uma placa de alumínio, assumem os seguintes valores: $E = 7,10E+10 \text{ N/m}^2$, $\rho = 2.700 \text{ kg/m}^3$ e $\nu = 0,33$.

A tabela 1 apresenta os valores teóricos da frequência natural calculados através da Eq. (17). Aqui, a frequência mais alta de interesse é 3448,49 Hz, o que corresponde a um comprimento de onda acústico de $\lambda = 343/3448,49 \cong 0,09946 \text{ m}$ (99,46 mm). Portanto, o comprimento máximo de um elemento deverá ser menor do que $99,46/6 \cong 16,58 \text{ mm}$, de modo a assegurar a precisão da resposta. Assim, foi assumido um comprimento de elemento de 10 mm, o que permite uma precisão até a frequência cujos índices modais são iguais a 4.

Tabela 1 – Frequências naturais para uma placa quadrada de alumínio.

ÍNDICE	$f_{m,n}$ (Hz)	MEF (Hz)	ERRO (%)*
(1,1)	383.17	383.05	0.03
(1,2)	957.91	957.37	0.06
(1,3)	1915.83	1914.26	0.08
(2,2)	1532.66	1530.69	0.13
(2,3)	2490.57	2485.96	0.19
(3,3)	3448.49	3438.54	0.29

$$* \text{ERRO}(\%) = \left| \frac{\text{MEF} - f_{m,n}}{f_{m,n}} \right| \times 100$$

O modelo de elementos finitos, construído segundo as observações feitas anteriormente, é constituído por nós que apresentam seis graus de liberdade, três translações e três rotações, sendo que os três graus de liberdade de translação, para cada um dos nós ao longo das bordas da placa, foram feitos nulos e, assim, atender as condições de contorno de apoio simples. Uma análise modal deste modelo, feita pelo ANSYS com o algoritmo de extração de autovalor e autovetor de Block Lanczos, produziu as frequências naturais listadas na tabela 1.

Os valores teóricos, mostrados na tabela 1, são todos levemente mais altos do que aqueles determinados por MEF. Normalmente, espera-se que o contrário ocorra, uma vez que no MEF a estrutura ao ser discretizada aumenta artificialmente sua rigidez e, assim sendo, os valores das frequências naturais são sobrestimados. Entretanto, estas discrepâncias foram consideradas aceitáveis, uma vez que o erro foi menor que 1% para as frequências e as formas modais são consistentes com as formas modais teóricas, conforme observado na Fig. 1.

Dando seqüência a simulação, as formas modais e frequências naturais, calculadas pelo ANSYS, foram fornecidas ao SYSNOISE que, assumindo o conjunto dos dados como um campo de deslocamento, converteu estes dados em campo de velocidade. Estas velocidades junto com a geometria da estrutura, aqui representada por uma malha acústica idêntica a malha estrutural, são usadas para resolver um conjunto de equações algébricas lineares para a pressão acústica na superfície da placa e, conseqüentemente, possibilitar a determinação da

eficiência de radiação modal da placa. A tabela 2 lista os valores de eficiência de radiação modal determinados pelo método de elementos de contorno (MEC) juntamente com as previsões de Wallace (1972).

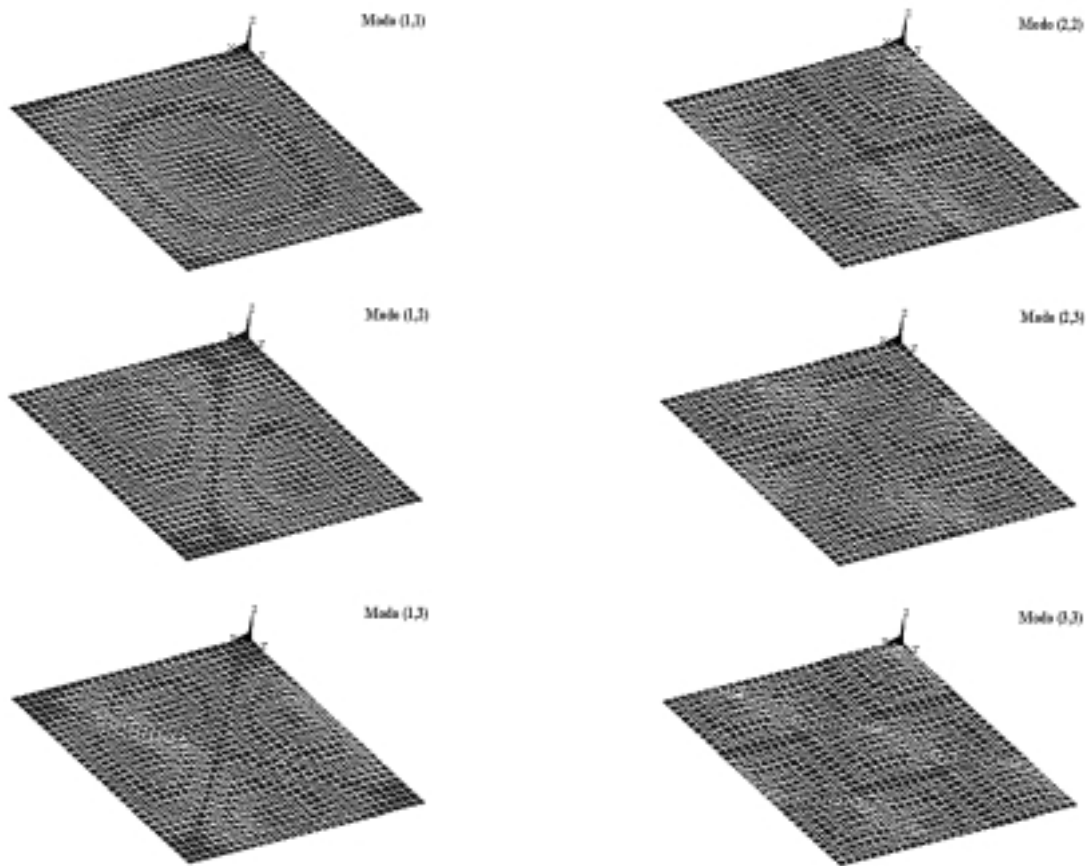


Figura 1- Formas modais para a placa quadrada.

Tabela 6.2 – Eficiência de radiação modal de uma placa quadrada.

ÍNDICE	k/k_b	$\sigma_{m,n}$	σ_{rad} (BEM)	Dif. (dB)*
(1,1)	0.47	0.40	0.403034	-0.03
(1,2)	0.75	0.75	0.745683	0.03
(1,3)	1.06	1.50	1.529649	-0.09
(2,2)	0.95	1.28	1.273036	0.02
(2,3)	1.21	1.75	1.676474	0.19
(3,3)	1.42	1.50	1.367107	0.40

$$*\text{Dif. (dB)} = 10 \log_{10} (\sigma_{m,n}) - 10 \log_{10} (\sigma)$$

Os valores da eficiência de radiação modal são comparados usando uma relação do número de onda normalizado. Esta relação é dada por k/k_b , onde k é o número de onda acústica e k_b é o número de onda de flexão da placa.

Todos os valores de eficiência de radiação determinados pelo MEC, quando comparados com aqueles preditos por Wallace (1972), apresentam uma diferença inferior a 0,5 dB, o que permite uma validação razoável dos pacotes computacionais e do procedimento de cálculo adotado.

4. SIMULAÇÃO DO ALOJAMENTO DA CAIXA DE ENGRENAGEM

O procedimento usado na modelagem da placa foi também aplicado para simulação do alojamento da caixa de engrenagem, tendo por base a análise modal numérica, validada experimentalmente e apresentada por Soeiro e Gerges (1999). Entretanto, a malha acústica do alojamento tem características diferentes da malha estrutural apresentada naquela análise. Essas diferenças residem no fato da exclusão de todos os elementos de viga BEAM44, usados como elementos de enrijecimento do alojamento, e dos elementos SHELL63, que modelam a parede interna de sustentação dos eixos da caixa de engrenagem, bem como o preenchimento dos furos de passagem dos eixos, localizados nas tampas traseira e dianteira do alojamento, com elementos SHELL63.

Tratando-se da aplicação do MEC para a simulação de um problema exterior, pode ocorrer o problema de não unicidade de solução em algumas frequências denominadas de frequências irregulares. Isto ocorre quando a superfície vibrante é representada por um contorno fechado e a frequência de interesse corresponde à frequência de ressonância acústica do problema interior com condições de contorno invertidas no método direto ou com condições de contorno idênticas no método indireto. A eliminação deste problema é possível e a técnica empregada depende da utilização do método direto ou indireto. Estas formulações podem ser encontradas nos artigos de Schenck (1968) e de Burton e Miller (1971), bem como uma descrição resumida no artigo de Coyette e Rossion (1995). Para o caso do método indireto, o procedimento consiste em simular uma quantidade de amortecimento dentro da superfície de contorno, o que é conseguido através de uma malha de elementos de contorno, para a qual é especificada uma condição de impedância ou de admitância, que para ser efetiva necessita ter um valor positivo para a parte real, de tal modo que o objetivo a ser alcançado é a modificação da forma do problema interior e, assim, a solução seja um campo de pressão nulo nas frequências consideradas. Os elementos desta malha interior, denominados de elementos de impedância singular, fazem parte da malha acústica e precisam respeitar as recomendações de tamanho de elemento e condições de borda livre (*jump* de pressão nulo). Assim, foi usada uma malha com 150 elementos de impedância singular e especificada a condição de admitância de $\{1/(1,21 \times 343)\}$, sendo esta malha e posição interna destes elementos mostradas na Fig. 2, juntamente com a malha acústica do alojamento.

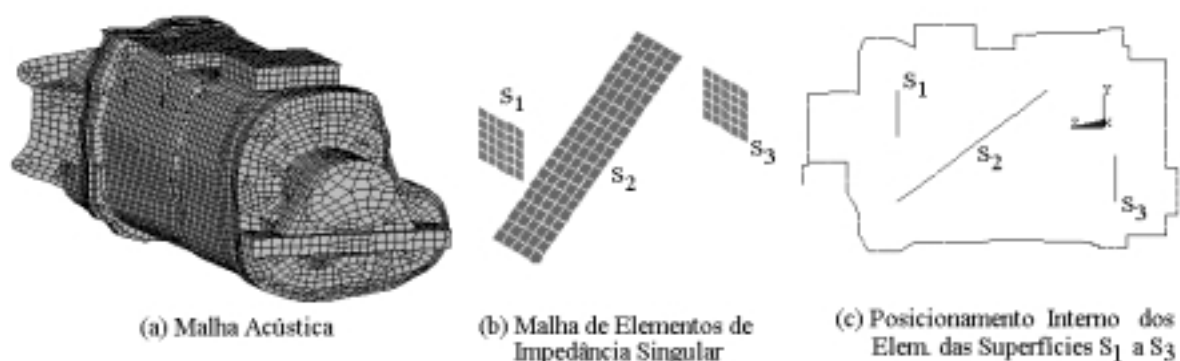


Figura 2 – Malha de elementos de impedância singular e seu posicionamento.

Os valores de eficiência de radiação modal, estimados para os dez primeiros modos do alojamento, são listados na tabela 3. A partir dos valores listados nesta tabela, é possível dizer que a configuração deformada referente a frequência natural de 1639,3 Hz é a que melhor irradia o som entre os dez primeiros modos de vibração do alojamento. A Fig. 3 apresenta os valores de μ (*double layer potencial*) na superfície do alojamento, referentes as formas modais associadas com o primeiro e quinto modos de vibração.

Tabela 3 – Valores de eficiência de radiação modal do alojamento

f (Hz)	1050,9	1324,9	1424,9	1541,3	1639,3	1725,3	1861,7	1880,0	1968,5	2042
σ_{rad}	0,44	0,53	0,65	0,27	0,93	0,74	0,46	0,19	0,51	0,37

5 – COMENTÁRIOS FINAIS

Uma boa concordância foi obtida entre os modelos teóricos e computacional, no que diz respeito a determinação de parâmetros vibro-acústicos modais, para uma placa quadrada simplesmente apoiada, o que valida a metodologia usada. Por outro lado, esta metodologia foi usada para prever a eficiência de radiação modal do alojamento de uma caixa de engrenagem de uso veicular e produziu valores de eficiência de radiação modal consistentes. A importância do conhecimento destes valores está no fato de que, para se atenuar a potência sonora radiada pelo alojamento, uma boa indicação seria procurar modificar as formas modais que apresentam os maiores valores de eficiência de radiação, uma vez que o campo de velocidade estrutural na superfície é uma composição destas formas modais.

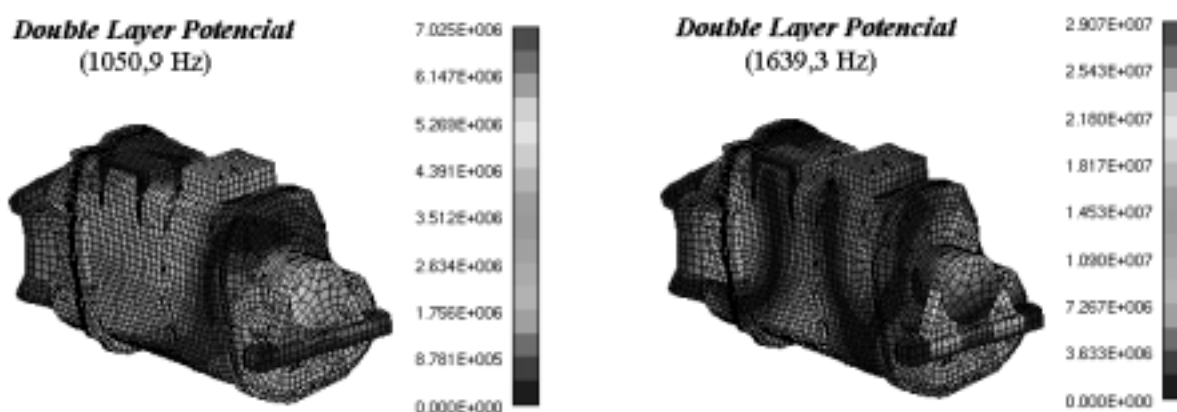


Figura 3 – Valores de μ na superfície do modelo para o 1° e 5° modos de vibração.

6 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Burton, A. J. e Miller, G. F., 1971, "The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems", Proc. R. Soc. London, V. 323, pp. 201-220.
- Coyette, J. P. e Rossion, J. P., 1995, "Treatment of irregular frequencies related to boundary elements models", 2nd Worldwide SYSNOISE Users Meeting Proceedings.
- Gardner, K. B. et al, 1996, "Radiation efficiency calculation for verification of boundary element acoustic codes", Noise Control Eng. J., V. 44 (5), pp. 215-223.
- Leissa, A., 1993, "Vibration of Plates". Published by the Acoustical Society of America, 353 p.
- Schenck, H. A., 1968, "Improved integral formulation for acoustic radiation problems", Journal of the Acoustical Society of America, V. 44, N. 1, pp. 41-58.
- Soeiro, N. S. e Gerges, S. N. Y., 1999, "Determinação numérica e experimental do modelo modal de uma caixa de engrenagem de uso veicular", IX Seminário de Elementos Finitos, SMARTtech, São Paulo, 09 e 10 de novembro.
- Wallace, C. E., 1972, "Radiation Resistance of a Rectangular Panel", Journal of the Acoustical Society of America, V. 51, N. 3, pp. 946-952, Parte 2.