

DETERMINAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS DAS RESPOSTAS, NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA, DE SISTEMAS DINÂMICOS SUJEITOS A CONDIÇÕES INICIAIS

Webe João Mansur¹

Marco Aurélio Chaves Ferro²

1 Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. Caixa Postal 68506. E-mail: webe@coc.ufrj.br

2 IME - Instituto Militar de Engenharia, Departamento de Engenharia de Fortificação e Construção, Praça General Tibúrcio 80, Praia Vermelha, 22290-270, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: ferro@taurus.ime.eb.br

Resumo

Uma formulação no domínio da frequência foi desenvolvida para o cálculo das respostas de sistemas dinâmicos sujeitos a condições iniciais (deslocamentos ou velocidades). Analisou-se o sistema massa-mola-amortecedor com 1 grau de liberdade e a corda esticada fixa nas extremidades, ambos com amortecimento viscoso. As equações do sistema massa-mola-amortecedor e da corda vibrante (equação da onda) no domínio do tempo foram transportadas para o domínio da frequência com o uso da Transformada Rápida de Fourier (FFT). O método dos elementos finitos foi usado para resolvê-las, obtendo-se os deslocamentos no domínio da frequência. Calculou-se a Transformada Inversa Rápida de Fourier (IFFT) destes deslocamentos determinando-os no domínio do tempo (resposta final). Os resultados foram comparados com outros existentes na literatura e considerados plenamente satisfatórios.

Palavras-chave : Dinâmica Estrutural, Domínio da Frequência, Amortecimento Viscoso.

1. INTRODUÇÃO

No presente trabalho dois exemplos básicos são considerados. O primeiro retrata o caso clássico do modelo massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade (1 GL) que é o ponto de partida para os demais problemas de vibração. O segundo se refere ao estudo da corda vibrante em uma dimensão (1 D), base para os estudos de propagação de ondas elásticas.

São feitas as suas análises no domínio da frequência quando se consideram condições iniciais não-nulos, quer seja no deslocamento ou na velocidade. A passagem do domínio do tempo para o domínio da frequência é feita usando-se a transformada de Fourier. Com isto o problema pode ser resolvido pelo Método dos Elementos Finitos chegando-se a resposta no domínio da frequência, em termos de deslocamentos. A solução final é calculada ao aplicar-se a transformada inversa de Fourier nesta resposta, obtendo-se o deslocamento no domínio do tempo.

O caso do sistema massa-mola-amortecedor já foi resolvido por Mansur *et al.* (1998), que resolveram o problema usando a transformada implícita de Fourier (ImFT) e linguagem FORTRAN. No presente trabalho foi usada a linguagem MATLAB[®] versão 5, que contém a função FFT (Fast Fourier Transform) incluída em sua biblioteca de funções, assim como a IFFT (Inverse Fast Fourier Transform).

O segundo caso, que trata da corda vibrante no domínio da frequência e com condições iniciais, ainda não havia sido estudado. Para tal, a corda foi discretizada e usado o Método dos Elementos Finitos com o objetivo de resolver a equação da onda no domínio da frequência (Equação de Helmholtz). A programação foi realizada em linguagem MATLAB[®] versão 5.

Para o sistema massa-mola-amortecedor a validação foi feita com a solução analítica. Para o outro foi utilizado um programa (wave.m) proposto por Cooper (1998) disponível na Internet, que resolve a equação diferencial da onda, com condições iniciais, pelo Método das Diferenças Finitas.

2. O SISTEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR COM UM GRAU DE LIBERDADE (1 GL)

2.1. No domínio da frequência, sem condições iniciais

Supondo que o sistema massa-mola-amortecedor (1GL) tenha massa m , constante de rigidez k e coeficiente de amortecimento c (ver figura 1), a equação de equilíbrio no domínio do tempo resulta em :

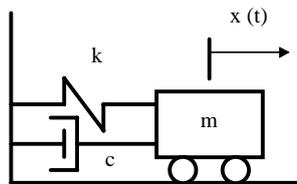


Figura 1. O sistema massa-mola-amortecedor com 1 GL.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (1)$$

A solução da equação (1) ao se considerar ausência de força externa $f(t)$ está relacionada com o problema de vibração livre e pode ser encontrada em Clough & Penzien (1993).

A equação (1) pode ser rescrita como :

$$m\ddot{x}(t) + 2m\omega_n \xi \dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (2)$$

Aplicando-se a Transformada de Fourier em (2) chega-se a :

$$\left(-\omega^2 m + 2i\omega \xi m \omega_n + k\right) X(\omega) = F(\omega) \quad (3)$$

sendo $X(\omega)$ e $F(\omega)$ o deslocamento e a força no domínio da frequência, respectivamente.

O inverso do termo entre parênteses da equação (3) é denominado Função Complexa de Resposta em Frequência (FCRF) ou Função de Transferência e é simbolizada por $H(\omega)$. Logo

$$H(\omega) = \left(-\omega^2 m + 2i\omega \xi m \omega_n + k\right)^{-1} \quad (4)$$

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (5)$$

Após se resolver a equação (5) calcula-se a Transformada Inversa de Fourier de $X(\omega)$ para chegar-se à resposta final, ou seja $x(t)$.

Os passos para esta solução são descritos a seguir :

a) fazer uma extensão periódica do carregamento $f(t)$. Uma boa aproximação para este período (T_p) foi proposta por Filho (1994) sendo a seguinte :

$$T_p = \frac{4,605}{\xi \omega_n} \quad (6)$$

b) discretiza-se o período e a força em N pontos (potência de 2), obtendo-se os vetores :

$$t_n = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots, t_{N-2}, t_{N-1}\} \text{ com } n = 0, N-1$$

e $f_n = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots, f_{N-2}, f_{N-1}\}$ com $n = 0, N-1$.

c) calcula-se a FFT de f_n , obtendo-se o vetor F_n , ou seja :

$$F_n = \{F_0, F_1, F_2, \dots, F_n, \dots, F_{N-2}, F_{N-1}\}$$

d) o intervalo da discretização da frequência tem um valor máximo (Nyquist), ou seja

$$\omega_{\max} = \frac{\pi}{\Delta t}. \text{ O intervalo entre } 0 \text{ e } \omega_{\max} \text{ é discretizado em } N/2 \text{ pontos.}$$

e) calcula-se o vetor H_n para estes $N/2$ pontos e os que faltam são os seus complexos conjugados, totalizando os N pontos de H_n . Apenas os termos H_0 e $H_{N/2}$ são reais e para os demais existe a seguinte correspondência :

$$H_{N-n} = \text{conj}(H_n) \quad \text{para } n = N/2 + 1, N/2 + 2, N/2 + 3, \dots, N - 1.$$

f) calcula-se o vetor X_n de dimensão N , sendo

$$X_n(\omega_n) = H_n(\omega_n)F_n(\omega_n) \quad (7)$$

e $X_n = \{X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots, X_{N-2}, X_{N-1}\}$ (8)

g) calcula-se a IFFT de X_n obtendo-se o vetor x_n , resposta final do sistema sujeito ao carregamento f_n , ou seja um vetor com dimensão N e tempo até o período estendido T_p :

$$x_n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_{N-2}, x_{N-1}\} \quad (9)$$

2.2 No domínio da frequência com as condições iniciais

A contribuição do deslocamento inicial $x(0)=x_0$ ser obtida adicionando-se a ele o efeito de uma força linear estática $-f_0$, ou seja :

$$-f_0 = -kx_0 \quad (10)$$

Trata-se a força $-f_0$ como se fosse uma força externa e procede-se do mesmo modo descrito anteriormente. O período estendido desta força deverá ser tal que a sua influência sobre a resposta final seja desprezível. Como ela é do tipo degrau um período do tipo T_p da equação (6) é suficiente para que o deslocamento seja considerado constante e igual a $x(0)$ em $t = T_p$. Após este tempo considera-se que o movimento é de vibração livre, o que leva o deslocamento ao repouso após outro período T_p . Sendo assim, o valor final para o período estendido da força $-f_0$ é de $2T_p$, sendo na primeira metade $-f_0 = -k x(0)$ e na segunda metade $-f_0 = 0$.

A resposta (x_d) devida ao deslocamento inicial será a soma do resultado obtido considerando $-f_0$ como força externa (x_{f0}) e um vetor deslocamento inicial x_{n0} , que tem como valor $x(0)$ até os $N/2$ primeiros elementos e os demais nulos. Logo :

$$x_d = x_{f0} + x_{n0} \quad (11)$$

A parte correspondente a velocidade inicial é considerada como a mesma devida a um impulso de intensidade $m\dot{x}_0$, logo

$$x_v = m\dot{x}(0)h \quad (12)$$

Sendo assim pode ser considerada uma força externa de valor

$$f_1 = \frac{m\dot{x}(0)}{\Delta t} \delta \quad (13)$$

sendo δ um vetor de dimensão N com o primeiro elemento unitário e os demais nulos.

Analogamente ao que foi exposto com relação à f_0 deve ser feito com f_1 , obtendo-se a resposta devida a velocidade inicial (x_v).

A solução final correspondente ao sistema massa-mola-amortecedor 1GL, com amortecimento viscoso e com condições iniciais (deslocamentos e velocidades), no domínio da frequência vale :

$$x = x_d + x_v \quad (14)$$

3. A CORDA VIBRANTE - EQUAÇÃO DA ONDA EM UMA DIMENSÃO (1-D)

3.1. No domínio do tempo com amortecimento viscoso

Ao se considerar o elemento diferencial da corda esticada como na figura 2 que está fixa em ambas as extremidades, a equação governante do problema é a equação da onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (15)$$

onde c_0 é a velocidade de propagação da onda e T é a tensão na corda.

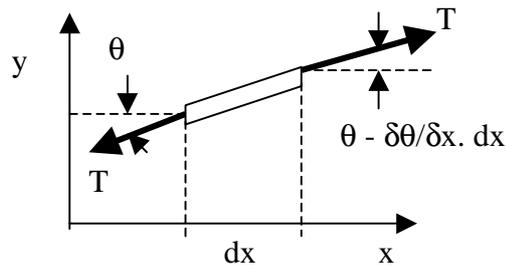


Figura 2. Elemento diferencial da corda esticada

Para se considerar a existência de amortecimento viscoso (coeficiente ζ) no sistema deve-se acrescentar um termo na equação (15) que representa uma força dissipativa de energia, segundo Chin (1994), ou seja :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \zeta \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (16)$$

3.2. No domínio da frequência, sem condições iniciais

Aplicando-se a Transformada de Fourier em (16) obtém-se a seguinte equação, no domínio da frequência :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - i\omega\zeta Y + \frac{\omega^2}{c_0^2} Y = F(x, \omega) \quad (17)$$

onde $Y(x, \omega)$ e $F(x, \omega)$ são as Transformadas de Fourier de $y(x, t)$ e $f(x, t)$, respectivamente.

A equação (17) pode ser rearranjada, resultando em :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - i\omega\zeta \right) Y = F(x, \omega) \quad (18)$$

A equação (18) é chamada de equação de Helmholtz generalizada e pode ser resolvida pelo Método dos Elementos Finitos (MEF).

Supondo que o domínio tenha sido discretizado em NE elementos (NN pontos nodais), tem-se :

$$\sum_{i=1}^{NE} \int \left(-\frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial x} + W_i k^2 Y \right) dx = \sum_{i=1}^{NE} \int W_i F dx \quad (19)$$

onde \int_E significa integração em cada elemento e k é o número de onda complexo, ou seja

$$k^2 = \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} - i\omega\zeta \right) \quad (20)$$

O termo do lado direito da equação (19) pode ser transformado em cargas nodais equivalentes. Os dois termos dentro dos parênteses de (19) geram matrizes de rigidez [K] e de massa [M], respectivamente. Cada elemento de comprimento l_e tem uma matriz [KE] e outra [ME] (2x2), a ele relacionadas. Logo :

$$[KE] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_e} & \frac{1}{l_e} \\ \frac{1}{l_e} & -\frac{1}{l_e} \end{bmatrix} \quad [ME] = \begin{bmatrix} \frac{k^2 l_e}{3} & \frac{k^2 l_e}{6} \\ \frac{k^2 l_e}{6} & \frac{k^2 l_e}{3} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Fazendo-se a superposição de todas as matrizes [KE] e [ME] obtém-se as matrizes de rigidez global [K] e de massa global [M], respectivamente.

A solução do problema de elementos finitos é feita pelo seguinte sistema de equações :

$$[A]\{Y\} = \{b\} \quad (22)$$

onde $[A] = [K] + [M]$ e $\{Y\}$ é o vetor que contém as incógnitas do problema, ou seja os deslocamentos nos nós. O vetor de termos independentes $\{b\}$ é formado pelas cargas nodais. As dimensões são as seguintes : $[A](NN \times NN)$, $\{Y\}(NN \times 1)$ e $\{b\}(NN \times 1)$.

Ao se aplicar a FFT em $f(x,t)$ o período deve ser estendido até $2T_p$, como no sistema massa-mola-amortecedor. Como o primeiro modo de vibração é o que mais contribui para o deslocamento pode-se ter uma boa aproximação para $T_p = \frac{4,605L}{\xi\pi c_0}$ sendo :

L = comprimento da corda; c_0 = velocidade de propagação da onda; e ξ = taxa de amortecimento viscoso. Mas $\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{\zeta T}{2m \frac{\pi c_0}{L}} = \frac{\zeta T}{2\rho\pi c_0} = \frac{\zeta c_0}{2\pi}$. Logo :

$$T_p = \frac{9,21L}{\zeta c_0^2} \quad (23)$$

A solução da equação (23) fornece para cada frequência (total de N) um vetor com NN elementos, formando-se a matriz [Y](N x NN). Aplicando-se a Transformada Inversa de Fourier nas colunas de [Y] obtém-se a resposta final [y] que será uma matriz de dimensão (N x NN), sendo cada coluna representativa do deslocamento de um ponto nodal da discretização em elementos finitos. As N linhas significam o tempo estendido até $2T_p$.

3.3. No domínio da freqüência, com condições iniciais

A contribuição do deslocamento inicial pode ser obtida ao se considerar uma força linear elástica $\{-f_0\}$, ou seja :

$$\{-f_0\} = -[K]\{x_0\} \quad (24)$$

onde $[K]$ = matriz de rigidez global; e $\{x_0\}$ = vetor de deslocamento inicial.

$\{x_0\}$ deve conter todos os deslocamentos iniciais dos pontos nodais adotados pelo MEF.

A força $\{f_0\}$ deve ser estendida até $2T_p$. Na primeira metade (entre 0 e T_p) ela deve ser constante para cada ponto nodal. Na segunda metade, (entre T_p e $2T_p$) ela deve ser nula. Logo forma-se uma matriz $[-f_0]$ com os elementos da primeira linha repetidos até a linha $N/2$, ou seja o vetor $\{-f_0\}$ formará cada linha de $[-f_0]$ até $N/2$. Os demais elementos de $[-f_0]$ serão nulos.

Logo :

$$[-f_0] = \begin{bmatrix} \{-f_0\}^T & \text{N / 2} \\ \{-f_0\}^T & \text{vezes} \\ \vdots & \\ \{0\} & \text{N / 2} \\ \{0\} & \text{vezes} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Calcula-se a FFT de $[-f_0](N \times NN)$ achando-se $[-F_0](N \times NN)$. Resolve-se então a equação de Helmholtz generalizada, para cada freqüência :

$$\frac{\partial^2 Y_{f_0}}{\partial x^2} + k^2 Y_{f_0} = [-F_0(k)] \quad (26)$$

Calcula-se uma matriz resposta $[Y_{f_0}](N \times NN)$ usando-se o MEF. Aplicando-se a IFFT em $[Y_{f_0}]$ obtém-se a matriz $[y_{f_0}]$. A solução final $[y_d]$ para o caso de deslocamento inicial é a soma de $[y_{f_0}]$ com a matriz $[y_{n_0}]$ formada pelo vetor $\{x_0\}$ repetido até a linha $N/2$, sendo as demais nulas. Logo

$$[y_d] = [y_{f_0}] + [y_{n_0}] \quad (27)$$

Quando as condições iniciais forem do tipo velocidade pode ser feita a mesma analogia do sistema massa-mola-amortecedor, ou seja :

$$f_v = \frac{L \dot{x}_0}{c_0^2 \Delta t} \delta \quad (28)$$

A força f_v deve ser aplicada em cada ponto nodal, formando então a primeira linha da matriz $[f_v](N \times NN)$. As demais linhas de $[f_v]$ serão nulas. Logo :

$$[f_v] = \begin{bmatrix} \{f_v\}^T \\ \vdots \\ \{0\} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{linha 1} \\ N - 1 \text{ linhas} \end{array} \right. \quad (29)$$

Procede-se então com $[f_v]$ da mesma forma que foi realizado com $[-f_0]$, ou seja calcula-se a FFT de $[f_v]$ obtendo-se a matriz $[F_v](N \times NN)$. Logo :

$$\frac{\partial^2 Y_{f_v}}{\partial x^2} + k^2 Y_{f_v} = [F_v] \quad (30)$$

Resolve-se a equação (30) para cada freqüência pelo MEF obtendo-se $[Y_v](N \times NN)$. Aplica-se a IFFT em $[Y_v]$ e chega-se a solução final $[y_v]$ para o caso da velocidade inicial.

A resposta final considerando-se as condições iniciais (deslocamentos e velocidades) é a soma das parcelas $[y_d]$ e $[y_v]$. Logo :

$$[y_f] = [y_d] + [y_v] \quad (30)$$

4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Exemplo 1 : Considera-se um sistema massa-mola-amortecedor $m = 3 \text{ kg}$; $k = 2700 \text{ N/m}$. e $\zeta = 5 \%$. Tem-se que $T_p = 3,07 \text{ s}$. Pode-se adotar então $2T_p = 6,40 \text{ s}$, com $N = 1024$ e $\Delta t = 0,00625 \text{ s}$. Sendo o deslocamento inicial $x_0 = 0,02\text{m}$ e a velocidade inicial $v_0 = 0,1 \text{ m/s}$ o resultado está mostrado na figura 3 e comparado com a solução analítica.

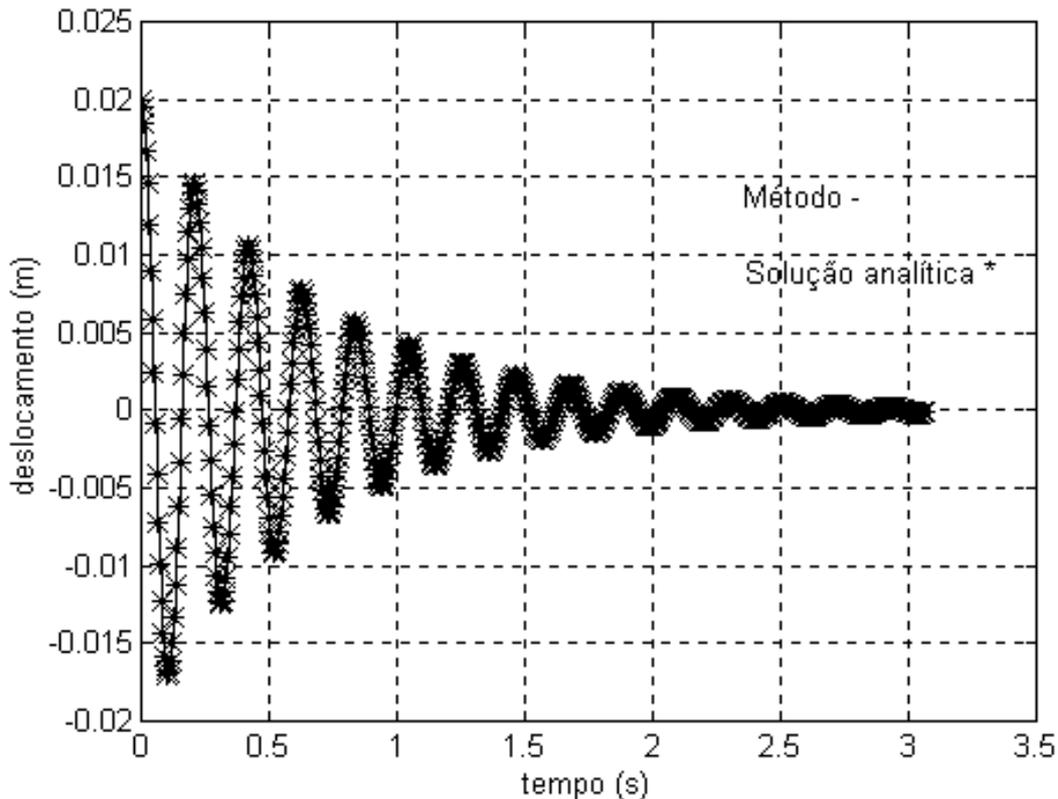


Figura 3. Solução do exemplo 1 : a) Presente Método — ; e b) Analítica * .

Exemplo 2 : Corda fixa nas extremidades com as seguintes características : $c_0 = 1 \text{ m/s}$; $L = 10\text{m}$; $\zeta = 0,10$; deslocamento e velocidades iniciais obedecendo as seguintes funções, respectivamente : $x_0 = 10^{-3} \text{ sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ e $v_0 = 10^{-3} \text{ sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$. Com isto tem-se $2T_p = 1842 \text{ s}$. Para facilitar foi adotado $2T_p = 2048 \text{ s}$. A massa para cada ponto nodal vale $m = \rho l_e$, sendo as forças nodais $q = \frac{l_e v_0}{2 c_0^2 \Delta t} \delta$. O resultado do método foi comparado com o calculado pelo

programa proposto por Cooper [1998], que calcula o problema no domínio do tempo, usando o Método das Diferenças Finitas. A frequência fundamental é a que mais contribui para o

movimento e a que determina o período de oscilação (τ) da corda vibrante. Logo

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\pi/10} = 20 \text{ s}$$

Os resultados obtidos pelo programa de Cooper e pelo método proposto estão mostrados na figura 4 para os tempos de 0, 10, 20, 30 e 40 segundos.

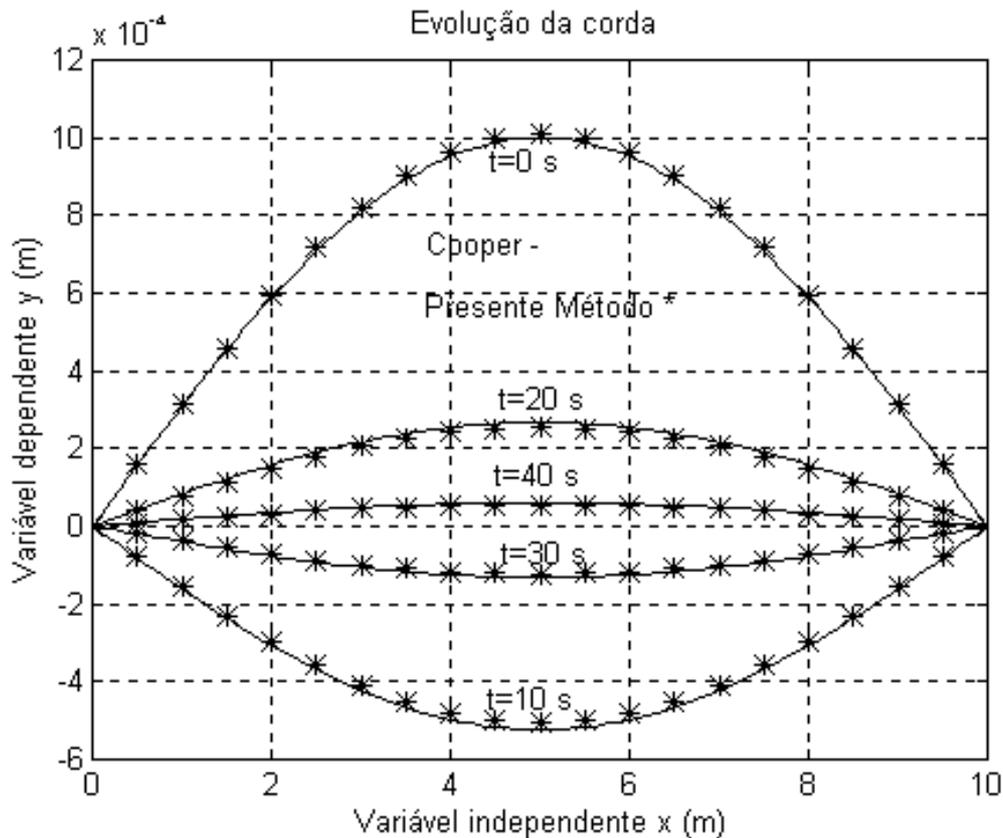


Figura 4. Solução do exemplo 2 : a) Presente Método * ; e b) Cooper — .

5. CONCLUSÕES

Ao se observar os exemplos 1 e 2 onde estão plotados os resultados obtidos pelo presente método, a solução analítica para o sistema massa-mola-amortecedor e a solução proposta por Cooper (1998), pode-se concluir que o presente método é plenamente satisfatório.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Brighan, E. O., 1974, "The Fast Fourier Transform", Prentice-Hall, New Jersey.
 Chin, W. C., 1994, "Wave Propagation in Petroleum Engineering", Gulf Publishing Company, Houston.
 Clough, R. W. & Penzien, J., 1993, "Dynamics of Structures", McGraw-Hill Inc, New York.

Cooper, J. M., 1998, "Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB", Birkäuser, Boston.

Ferreira, W. G. et al, 1999, "A Frequency Domain Method for Nonlinear Dynamic Structural Analysis", Applied Mechanics in the Americas, Vol 8, Eight International Conference on Dynamic Problems in Mechanics.

Ferro, M. A. C., 1997, "Estimativa das Matrizes de Massa, Amortecimento e Rigidez pela Função Complexa de Resposta em Freqüência", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Ferro, M. A. C., 1999, "Cálculo das Respostas de Sistemas Dinâmicos Sujeitos a Condições Iniciais, no Domínio da Freqüência", Seminário de Qualificação ao Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Filho, F. V., 1994, "Análise Dinâmica no Domínio da Freqüência - Sistemas Lineares e Não-Lineares", Conferência de Concurso para Professor Titular, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Graff, K. F., 1975, "Wave Motion in Elastic Solids", Dover Publications, New York.

Hanselman, D. & Littlefield, B., 1998, "Mastering MATLAB® 5 - A Comprehensive Tutorial and Reference", Prentice-Hall, New Jersey.

Wrobel, L. C. et al, 1989, "Métodos Numéricos em Recursos Hídricos - Vol 1", ABRH - Associação Brasileira de Recursos Hídricos, Porto Alegre, RS, Brasil.