

EXTRAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS: PROGRAMAÇÃO DE ALGUMAS TÉCNICAS ATRAVÉS DO MATLAB

Ricardo Teixeira Aguiar Cunha

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 20453-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: rteixeir@mec.puc-rio.br

Rubens Sampaio

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 20453-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: rsampaio@mec.puc-rio.br

Edson Luiz Cataldo Ferreira

Universidade Federal Fluminense, Centro de Estudos Gerais, Departamento de Matemática Aplicada, 24020-140, Niterói, RJ, Brasil. E-mail: ecataldo@mec.puc-rio.br

Resumo

O trabalho consiste no desenvolvimento de um programa para extração de parâmetros modais de estruturas, usando a interface gráfica do MATLAB. A partir de sinais obtidos de acelerômetros o programa permite a obtenção dos fatores de amortecimento, frequências naturais, fase e os n primeiros modos de vibração. O valor de n depende do número de acelerômetros utilizados na experiência. Além disso, o programa permite que a curva seja regeada a partir dos parâmetros obtidos. São utilizados três métodos para a extração dos parâmetros modais : método de amplitude-pico, método do ajuste de círculo e método inverso. Para cada um dos métodos o programa permite que se escolha entre amortecimento estrutural e viscoso. Os dados obtidos através de um analisador de sinais são convertidos para que possam ser lidos pelo MATLAB. A partir daí a curva da amplitude da Função Resposta em Frequência é reconstruída e o usuário deve marcar os picos indicando os locais das ressonâncias. Com esses dados, o usuário escolhe o método a ser utilizado para a extração dos parâmetros modais e o tipo de amortecimento. Com isso o programa fornece os parâmetros desejados e também regea a curva, comparando-a com a original (obtida experimentalmente).

Palavras-chave: Análise Modal, Vibrações, MATLAB.

1. INTRODUÇÃO

O estudo de vibrações é fundamental para a compreensão e possível controle de muitos fenômenos, em áreas de grande importância como a automação industrial, a pesquisa aeroespacial ou a construção civil. Os testes experimentais podem ser, basicamente, de dois tipos: no primeiro, as medições são feitas numa estrutura em serviço, sem um controle rigoroso das excitações às quais ela está submetida, nem tampouco da influência dos demais elementos estruturais. Dependendo dos objetivos desejados, este teste pode ser já

suficiente e, em alguns casos, talvez o único possível de ser realizado, no caso de tratarem-se de grandes estruturas, como uma turbina de uma usina elétrica ou a arquibancada de um estádio.

No outro tipo de teste, a estrutura é forçada a vibrar por uma excitação conhecida. Este tipo de teste, por contar com condições bem controladas fornece melhores resultados e é chamado “Teste Modal”. A Fig. 1 ajuda a compreender um pouco melhor como funciona esse teste.

Em primeiro lugar, há a estrutura que se deseja estudar, na qual são posicionados transdutores (o mais comum é que sejam usados acelerômetros, mas nada impede que estes sejam substituídos por transdutores de posição ou de velocidade). Um sinal conhecido é, então, fornecido pelo gerador de sinais, e tem sua potência aumentada por um amplificador, alimentando por fim algum mecanismo de excitação (como um *shaker*, por exemplo), que forçará a estrutura a vibrar.

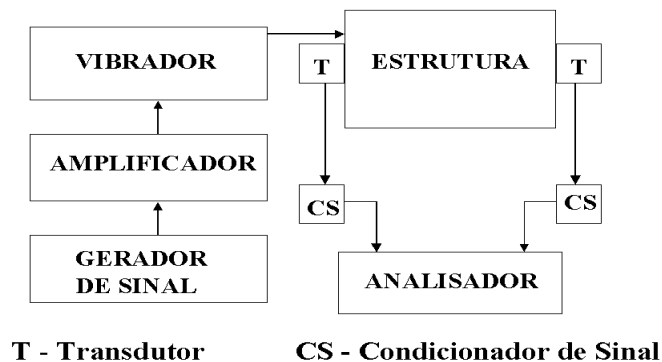


Figura 1: Esquema de montagem experimental.

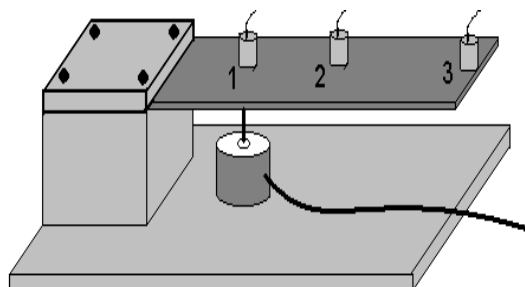


Figura 2: Exemplo de montagem experimental.

Os sinais gerados pelos transdutores são, então, devidamente amplificados pelo condicionador de sinais, e são introduzidos no analisador de sinais, juntamente com o sinal de entrada. Este analisador, então, calculará a FFT (*Fast Fourier Transform*, Transformada Rápida de Fourier), para possibilitar a análise dos dados no domínio da frequência. O passo seguinte, a partir dos dados fornecidos pelo analisador, é extrair os parâmetros modais, isto é, identificar os diversos modos de vibração da estrutura, propor um modelo matemático da estrutura e comparar o comportamento previsto pelo modelo com o observado experimentalmente. É nesta última fase, utilizando os dados provenientes

do analisador, que o programa apresentado é utilizado. Este programa, inserido num programa maior, em fase de desenvolvimento, que contém vários métodos de extração de parâmetros modais: métodos de vários graus de liberdade, métodos no domínio do tempo, entre outros.

2. MÉTODOS UTILIZADOS PELO PROGRAMA PARA EXTRAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS

Os métodos que foram utilizados, neste trabalho, para a extração de parâmetros modais são alguns dos métodos de um grau de liberdade, pois consideram que, numa região suficientemente próxima da ressonância, o comportamento da estrutura é dominado pelo modo em questão. A influência dos outros modos ou é desprezada ou é considerada por uma aproximação, o que pode não ser satisfatório em algumas situações. Estes métodos serão apresentados nas seções seguintes, seguindo, basicamente, a notação empregada por Ewins(1984). As Funções Resposta em Frequência (**FRFs**) utilizadas serão apresentadas a seguir.

Consideraremos sempre a força como o sinal de entrada. Assim, se o sinal de saída utilizado for a aceleração, a FRF correspondente será a **inertância** (A). Se for utilizada a velocidade, teremos a **mobilidade** (Y) e, caso seja usado o deslocamento, a FRF chamar-se-á **receptância** (α). Assim, temos:

$$A = \frac{\ddot{X}(\omega)}{F(\omega)} \quad (1)$$

$$Y = \frac{\dot{X}(\omega)}{F(\omega)} \quad (2)$$

$$\alpha = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \quad (3)$$

2.1 O método da amplitude de pico

Este é um método bastante simples, e que funciona bem para estruturas cujos modos têm fatores de amortecimento nem tão pequenos que tornem difícil a medição e nem tão grandes que façam significativa a influência dos demais modos.

Para aplicar este método, em primeiro lugar são identificados, no gráfico de amplitude de resposta em frequência, os picos existentes, que correspondem, cada um, a um modo de vibração. A frequência natural, ω_r , é tomada como a frequência do pico (para aumentar um pouco a precisão, o programa faz uma pequena interpolação entre os pontos do pico e é tomada como frequência natural aquela na qual a fase é $\pm 90^\circ$).

O valor da amplitude da FRF no pico é chamado de $|\alpha|$, e são determinadas duas frequências, ω_a e ω_b , sendo uma superior e outra inferior à frequência natural, nas quais o valor da amplitude da FRF diminuiu em 3 dB.

O amortecimento do modo em questão pode ser expresso por:

$$\eta_r = (\omega_a^2 - \omega_b^2)/\omega_r^2 \simeq \Delta\omega/\omega_r \quad (4)$$

Para amortecimento viscoso, temos:

$$\xi = \frac{\omega_a - \omega_b}{2\omega_r} \quad (5)$$

Por fim, pode-se obter uma estimativa da constante modal do modo em questão. Temos, assim:

$$|\alpha| = A_r / (\omega_r^2 \eta_r) \quad (6)$$

ou

$$A_r = |\alpha| \omega_r^2 \eta_r \quad (7)$$

2.2 O método de ajuste de círculo

Este é um método um pouco mais elaborado do que o apresentado anteriormente, e que utiliza o fato de que, se for traçado o gráfico de resposta em frequência de um sistema de um grau de liberdade na forma de Nyquist, as curvas obtidas se aproximam de círculos. Devido a isto, sistemas com múltiplos graus de liberdade, quando observados em frequências próximas a uma frequência natural, apresentam gráficos em forma de arcos aproximadamente circulares (eles não são perfeitamente circulares devido à influência dos demais modos de vibração). É interessante notar que, se desejamos trabalhar com amortecimento estrutural, a FRF que deve ser usada é a receptância, enquanto que se for usado o modelo de amortecimento viscoso, deve-se usar a mobilidade.

Podemos escrever a FRF (receptância) na forma seguinte:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{s=1}^N \frac{{}_s A_{jk}}{\omega_s^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_s^2}, \text{ onde } \omega_s \text{ é a frequência natural do modo } s. \quad (8)$$

Esta FRF pode ser reescrita como:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{{}_r A_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} + \sum_{s=1, s \neq r}^N \frac{{}_s A_{jk}}{\omega_s^2 - \omega^2 + j\eta_s^2} \quad (9)$$

Nas proximidades da frequência natural do modo r , o segundo termo da equação acima pode ser considerado como aproximadamente independente de ω , e a expressão para a receptância pode ser reescrita como:

$$\alpha_{jk}(\omega)_{\omega=\omega_r} = \frac{{}_r A_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_r^2} + {}_r B_{jk} \quad (10)$$

sendo o segundo termo (${}_r B_{jk}$) constante. Isto não significa que a influência dos outros modos é desprezível, mas apenas que pode ser representada por uma constante, na região próxima à ressonância.

Considerando amortecimento viscoso, utilizamos a FRF (mobilidade):

$$Y(\omega) = \frac{j\omega}{(k - \omega^2 m) + j(\omega c)} \quad (11)$$

ou

$$Re(Y) = \frac{\omega^2 c}{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2} \quad (12)$$

$$Im(Y) = \frac{\omega(k - \omega^2 m)}{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2} \quad (13)$$

Pode-se verificar que esta função realmente descreve um círculo na forma de Nyquist.

2.3 O método inverso

O método inverso usa as mesmas suposições do método de ajuste de círculo, utilizando o fato que uma função, quando gera um círculo no plano complexo, seu inverso gerará uma linha reta.

Assim, temos:

$$Y(\omega) = \frac{j\omega}{k - m\omega^2 + j\omega c} = \frac{\omega c + j(m\omega^2 - k)}{\omega} = c + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right) \quad (14)$$

Assim,

$$Im\left(\frac{1}{Y(\omega)}\right) = \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right) \quad (15)$$

Pode-se observar, portanto, que o gráfico de $Im\left(\frac{1}{Y(\omega)}\right)$ é uma reta paralela ao eixo imaginário.

Para aplicar o método, em primeiro lugar temos de aplicar o método dos mínimos quadrados a esta linha reta, o que é muito mais fácil que aplicá-lo a um círculo. O fator de amortecimento pode ser obtido imediatamente pela intersecção da reta com o eixo real.

Depois, aplica-se novamente o método dos mínimos quadrados, agora apenas na parte imaginária dos dados obtidos (Eq. 15). Daí tiraremos os valores de m e k para o modo em questão. Uma forma interessante de fazer isto é multiplicar a parte imaginária da FRF por ω , de modo a linearizar o problema, como se mostra a seguir:

$$Im\left(\frac{1}{Y(\omega)}\right) = \frac{(m\omega^2 - k)}{\omega} \Rightarrow \omega Im\left(\frac{1}{Y(\omega)}\right) = (m\omega^2 - k) \quad (16)$$

3. O PROGRAMA MODAL

Foi desenvolvido um programa em MATLAB, para a extração de parâmetros modais a partir de dados experimentais. Este programa usa, como dados de entrada, um arquivo de extensão *.mat* onde se encontram um par de vetores para cada acelerômetro utilizado: um contendo a receptância do sistema analisado e o outro, as frequências correspondentes. O analisador de sinais utilizado, fabricado pela Hewlett-Packard, fornece um arquivo de extensão *.dat*, que precisa ser convertido para o formato do MATLAB.

A interface é bastante simples: em primeiro lugar, na tela inicial, escolhe-se qual o tipo de análise que se deseja fazer: amplitude de pico, ajuste de círculo ou método inverso.

Em seguida, é exibida uma outra janela, onde pede-se ao usuário que determine o número de pontos em torno da ressonância que serão levados em conta na análise, o tipo de amortecimento que se deseja utilizar (viscoso ou estrutural), o número de acelerômetros presentes, bem como, no caso do método de amplitude de pico, se é desejado que se calculem os vetores de forma. A opção de número de pontos considerados só é oferecida se o método escolhido é o de ajuste de círculo (neste caso, ao menos 6 pontos têm de estar incluídos na análise), ou o método inverso (é exigido aqui um mínimo de 3 pontos, mas deve-se escolher mais). O número de acelerômetros cujas funções resposta em frequência estão incluídas no arquivo de entrada de dados deve ser aqui informado, bem como o tipo de modelo de amortecimento que se deseja utilizar (viscoso ou estrutural).

Logo, pede-se ao usuário que identifique, no gráfico de Amplitude da Função Resposta em Frequência, as frequências naturais, utilizadas para encontrar os valores dos fatores de amortecimento, fase, rigidez, etc.

O programa detecta alguns erros, tais como pontos muito afastados da ressonância no método de ajuste de círculo, e notifica o usuário.

3.1. Exemplos de utilização do programa

São apresentados dois exemplos de utilização do programa, sendo um deles com dados gerados, e outro com dados provenientes de experimentos.

3.1.1 Exemplo com dados gerados analiticamente

Foram geradas Funções de Resposta em Freqüência para dois acelerômetros:

$$\alpha_{11}(\omega) = \frac{0.5}{\omega_1^2 - \omega^2 + (j \times 0.01 \times \omega)} + \frac{0.5}{\omega_2^2 - \omega^2 + (j \times 0.03 \times \omega)} \quad (17)$$

$$\alpha_{12}(\omega) = \frac{0.5}{\omega_1^2 - \omega^2 + (j \times 0.01 \times \omega)} - \frac{0.5}{\omega_2^2 - \omega^2 + (j \times 0.03 \times \omega)} \quad (18)$$

Em seguida, usou-se o método de amplitude de pico para analisar estes dados. Os resultados obtidos são mostrados na Tab.1 e na Fig. 3.

Tabela 1: Resultados do Exemplo.

	Acelerômetro 1	Acelerômetro 2	Média
1º modo	15.0398 Hz	15.0398 Hz	15.0398 Hz
ξ_1	0.0027863	0.0027879	0.0027871
Fase ₁	+90°	+90°	—
2º modo	69.9503 Hz	69.9503 Hz	69.9503 Hz
ξ_2	0.0004633	0.0004638	0.0004636
Fase ₂	+90°	-90°	—

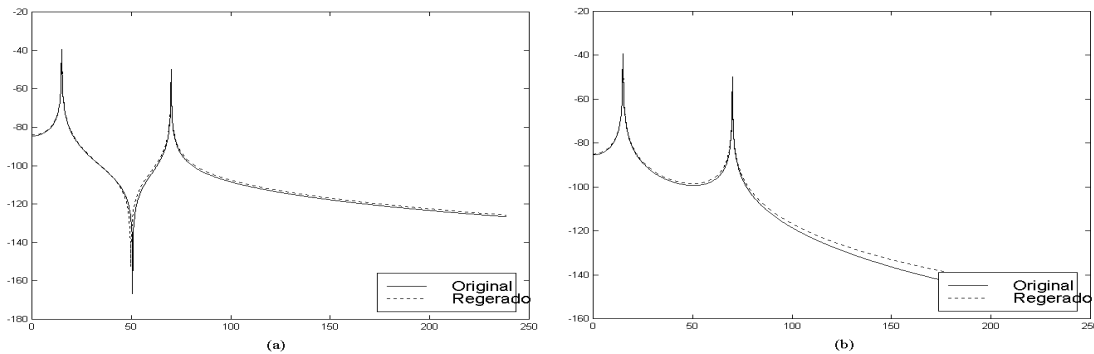


Figura 3: Amplitude da Função Resposta em Freqüência:(a) α_{11} ; (b) α_{12} .

3.1.2 Exemplo com dados provenientes de experimentos

Usou-se, neste caso, dados de uma viga de aço engastada-livre, com comprimento de 51,9 cm, largura de 38,25 mm e espessura de 4,90 mm. Esta viga era excitada por um *shaker* a 13,0 cm do engaste, semelhante à montagem apresentada na Fig. 2, com a única diferença que, neste caso, havia apenas dois acelerômetros, localizados, respectivamente, a 13,0 cm e 39,8 cm do engaste. Os resultados, obtidos através do método de amplitude de pico, são apresentados na Fig. 4.

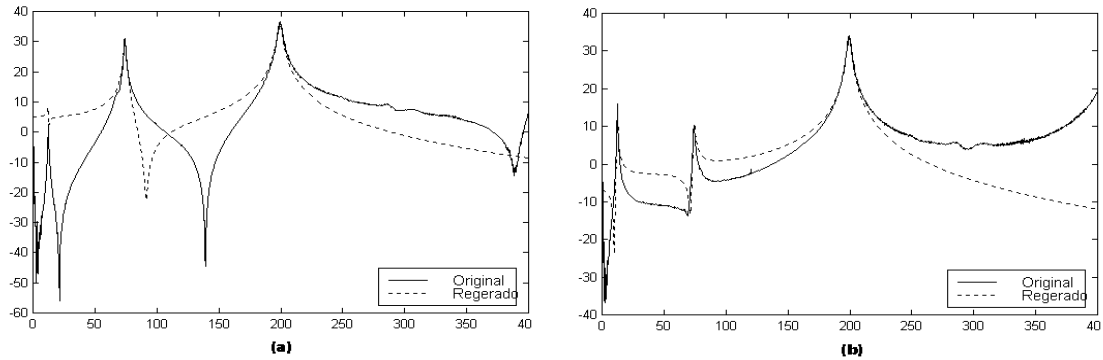


Figura 4: Amplitude da Função Resposta em Freqüência (caso real): (a)Acelerômetro 1; (b)Acelerômetro 2.

4. CONCLUSÕES

Nota-se que, nos casos experimentais, há uma diferença entre os dados originais e os dados regenerados, que parece poder ser corrigida por uma futura inclusão dos termos residuais. Procurou-se, além disso, fazer um programa que pudesse utilizar vários métodos, visto que não há um único método que seja o melhor para todas as situações.

5. REFERÊNCIAS

- Bendat and Piersol, 1971, “Random Data: Analysis and Measurement Procedures”, Wiley-Interscience.
- Bishop, R.E.D. and Gladwell, G.M.L., 1963, “An Investigation into the Theory of Resonance Testing”, Proc Roy Soc Phil Trans, p.255(A)241.
- Ewins, D.J.,1984, “Modal Testing: Theory and Practice”, Research Studies Press.
- Ewins, D.J. and Griffin, J., 1981, “A State-of-the-Art Assessment of Mobility Measurement Techniques — Results for the Mid-Range Structures”, J Sound and Vibration 78(2), pp. 197–222.
- Inman, D.J., 1994, “Engineering Vibration”, Prentice-Hall.
- Sampaio, R., Cataldo, E. e Riquelme, R., 1997, “Introdução ao MATLAB”, apostila.