

# CONTROLE DE UMA VIGA FLEXÍVEL COM ATUADORES PIEZELÉTRICOS

**Edilson Hiroshi Tamai**

Universidade de São Paulo, Escola Politécnica, Depto. de Eng. Mecânica, Lab. de Dinâmica de Sistemas e Controle (LDC), 05508-900, São Paulo, SP, Brasil. E-mail: edhtamai@usp.br

## Resumo

Este trabalho apresenta um estudo do controle de vibração de uma viga flexível rotativa. É possível atuar sobre a viga por meio de um motor elétrico em uma de suas extremidades e de lâminas de material piezolétrico coladas em sua superfície. Três compensadores foram estudados, um que usa abordagem de controle ótimo usando apenas o motor, outro que usa abordagem de controle ótimo usando o motor e o atuador piezolétrico, e um terceiro que realimenta a velocidade modal pelo atuador piezolétrico. O desempenho é medido nos domínios do tempo e da frequência, e os resultados mostram que o atuador piezolétrico é eficiente, sendo que o compensador que aumenta o amortecimento pela realimentação da velocidade modal é equivalente ao compensador que usa controle ótimo, embora este último use menos energia.

**Palavras-chave:** Viga flexível, Atuador piezolétrico, Controle de vibração, Estruturas flexíveis.

## 1. INTRODUÇÃO

Estruturas leves têm sido exigidas no projeto e construção de diversos sistemas de engenharia, como manipuladores robóticos, antenas e apêndices de veículos espaciais, e estruturas e materiais inteligentes. Estas estruturas, porém, não podem mais ser consideradas rígidas, daí o interesse na dinâmica e controle de estruturas flexíveis.

Neste trabalho investiga-se também o uso de materiais piezolétricos para o controle ativo das vibrações elásticas de estruturas, assunto que tem atraído atenção de diversos pesquisadores (Choi, Cho e Park, 1999; Pota e Alberts, 1995; Baz, Poh e Fedor, 1992; Liu e Yang, 1995).

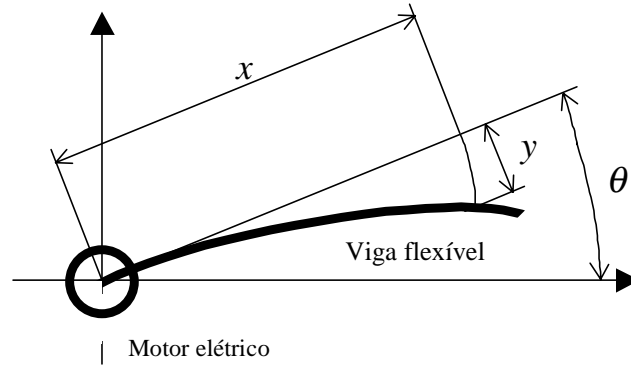
Diferentes abordagens de controle têm sido investigados, como *Quantitative Feedback Theory* (Choi, Cho e Park, 1999),  $H_\infty$ , LQR (*Linear Quadratic Regulator*), LQG-LTR (*Linear Quadratic Gaussian – Loop Transfer Recovery*), estudados por Lim, Maghami, e Joshi (1992), controle independente no espaço modal e realimentação positiva da posição (PPF), (Baz, Poh e Fedor, 1992), controle adaptativo (Gildin e Moscato, 1998), etc.

O objetivo deste trabalho é estudar o ganho de desempenho de um atuador piezolétrico no controle das vibrações elásticas de uma viga flexível rotativa, usando reguladores ótimos (LQR), e uma abordagem em que a velocidade modal é realimentada pelo atuador piezolétrico.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

O sistema é composto por uma régua de alumínio articulada em uma das extremidades e livre na outra e que se move no plano horizontal. A extremidade articulada está diretamente acoplada por um cubo ao eixo de um motor elétrico de corrente contínua. Além do motor é

possível atuar sobre a viga usando duas lâminas de material cerâmico piezelétrico (titânio zirconato de chumbo - PZT). Extensômetros elétricos são usados para medir as deformações causadas pelos modos elásticos de vibração e um encoder mede o deslocamento angular do eixo do motor. A bancada experimental existente é o resultado de um projeto de iniciação científica (Benain, Ferreira e Sotelo, 1997), e tem sido usado em pesquisas de graduação e pós-graduação (Gildin e Moscato, 1998), mas neste artigo os resultados referem-se apenas a simulações numéricas.



**Figura 1.** Esquema da viga flexível rotativa.

Devido às dimensões da viga flexível, foi utilizado a abordagem de Euler-Bernoulli, considerando o movimento de corpo rígido (rotação) e três modos elásticos de vibração. O projeto dos sistemas de controle leva em conta apenas a rotação da viga e os dois primeiros modos elásticos (é um modelo de sexta ordem), e o outro modo é usado para a verificação do fenômeno de *spillover*. Adotou-se como condições de contorno o engaste na extremidade ligada ao motor e a outra extremidade livre. As equações resultantes são:

$$J_T \ddot{\theta} + b \dot{\theta} = k_M i \quad (1)$$

$$\mu_j \ddot{q}_j + 2\zeta_j \omega_{nj} \dot{q}_j + \omega_{nj}^2 q_j = \phi_j'(0) \cdot (k_M i - b \dot{\theta}) + k_{aj} V \quad (2)$$

Nas equações anteriores  $J_T$  é a soma das inércias de rotação da viga, do rotor e do cubo de fixação,  $b$  é uma constante que relaciona a velocidade angular com o momento de atrito viscoso no eixo do motor,  $\theta$  é a posição angular do eixo do motor,  $k_M$  é a constante de torque do motor e  $i$  é a corrente elétrica que o aciona. Nas equações que descrevem a dinâmica dos modos elásticos de vibração  $\mu_j$ ,  $\zeta_j$ , e  $\omega_{nj}$  são os parâmetros do modo  $j$ ,  $\phi_j$  é a função de forma do modo  $j$ ,  $k_{aj}$  é um parâmetro relativo ao atuador piezelétrico, e  $V$  é a tensão nele aplicada. O atuador piezelétrico é composto por duas lâminas coladas em lados opostos da viga, e o momento  $M$  aplicado por elas na viga é dado por (Pota e Alberts, 1995):

$$M = E_a d_{31} b_a (t_a + t_b) V \quad (3)$$

Nesta equação  $E_a$  é o módulo de elasticidade do material piezelétrico,  $d_{31}$  é a constante de carga elétrica,  $b_a$  e  $t_a$  são respectivamente a largura e a espessura da lâmina de material piezelétrico, e  $t_b$  é a espessura da viga. Assim o parâmetro  $k_{aj}$  pode ser expresso por:

$$k_{aj} = E_a d_{31} b_a (t_a + t_b) \cdot [\phi_j'(l_1) - \phi_j'(l_2)] \quad (4)$$

As extremidades do atuador piezelétrico sobre a viga localizam-se em  $l_1$  e  $l_2$ .

### 3 SISTEMAS DE CONTROLE

Os sistemas de controle são comparados no tempo e em frequência. Para fazer a avaliação do desempenho usamos gráficos de resposta transitória do deslocamento da extremidade livre da viga devido aos modos elásticos de vibração (para um deslocamento angular finito do eixo do motor), o valor médio da energia modal durante o transitório, e os diagramas de resposta em frequência dos sistemas em malha fechada. A expressão usada para determinar a energia modal é (Baz, Poh, Fedor, 1992):

$$E_j = \omega_{nj}^2 q_j^2 + \dot{q}_j^2 \quad (5)$$

As equações da dinâmica do sistema são reescritas no espaço de estados na forma :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (6)$$

A matriz de ganho do compensador é obtida pela minimização do seguinte índice de desempenho:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Qx} + \mathbf{u}^T \mathbf{Ru}) dt \quad (7)$$

Em um primeiro esquema (compensador A) o projeto é feito usando-se como entrada apenas a corrente elétrica que alimenta o motor, supondo-se disponíveis todas as variáveis de estado.

No segundo esquema (compensador B) de controle a abordagem é a mesma, exceto que se utiliza um atuador piezelétrico em conjunto com o motor.

No terceiro esquema (compensador C) são usados os mesmos ganhos do compensador B para o motor, mas para o atuador piezelétrico apenas as velocidades modais são realimentadas.

## 4 SIMULAÇÕES

### 4.1 Valores numéricos adotados

Os valores numéricos adotados derivam da bancada construída por Benain, Ferreira e Sotelo (1997).

Características da viga: módulo de elasticidade  $E = 7,1 \times 10^{10}$  Pa, massa específica  $\rho = 2710$  kg/m<sup>3</sup>, largura  $b_v = 0,0254$ m, espessura  $t_b = 0,001$ m, comprimento  $L = 0,7$ m.

Características do motor:  $k_M = 0,1$  Nm/A, inércia de rotação  $J_M = 1,35 \times 10^{-4}$  kg.m<sup>2</sup>, constante de atrito  $b = 0,0072$  Nms/rad.

Características do atuador piezelétrico: módulo de elasticidade  $E_a = 6,2 \times 10^{10}$  Pa, largura  $b_a = 0,0254$ m, espessura  $t_a = 0,19 \times 10^{-3}$  m, coeficiente de deformação piezelétrica  $d_{31} = -1,79 \times 10^{-10}$  m/V, comprimento  $l_a = 0,07$  m, posição do centro da lâmina: a 0,3 m da extremidade ligada ao motor elétrico.

Posição dos extensômetros usados para medir a deformação elástica: um conjunto a 0,02 m da extremidade ligada ao motor, e outro a 0,2 m desta mesma extremidade.

As frequências naturais dos modos de vibração elásticos são:  $\omega_{n1} = 42,6$  rad/s,  $\omega_{n2} = 109,6$  rad/s,  $\omega_{n3} = 206,5$  rad/s. Os coeficientes de amortecimento adotados são:  $\zeta_1 = 0,02$ ,  $\zeta_2 = 0,05$ ,  $\zeta_3 = 0,09$ .

Valores usados na determinação do compensador LQR:

Controlador que usa apenas o motor elétrico:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = 1$$

Controlador que usa o motor e o atuador piezelétrico:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2,05 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

Ganhos de realimentação das velocidades modais: primeiro modo,  $k_{v1} = -185$ , segundo modo,  $k_{v2} = +155$ .

A simulação é feita nas seguintes condições: no instante inicial a posição angular da viga é 1 rad e o sistema de controle leva a viga para a origem. Os ganhos adotados para os controladores são tais que para o transitório (entrada degrau) da posição angular da viga não haja sobre-sinal e o tempo de acomodação seja aproximadamente 2 s, e tensão de alimentação do atuador piezelétrico, exigida pelos controladores, não ultrapasse 60V nas condições simuladas.

## 4.2 Resultados

Para comparação foi projetado um sistema de controle que atende os requisitos de sobre-sinal e tempo de acomodação relativos à posição angular do eixo do motor, mas que não considera a vibração elástica. A figura 2 mostra a flecha  $y$  na extremidade livre da viga em relação ao tempo, para uma entrada degrau, conforme explicado anteriormente. Nesta figura temos a curva relativa a este controlador de referência (que não atenua as vibrações elásticas) e as curvas relativas a cada um dos controladores examinados. Calculando o valor médio (no intervalo de 0 a 2 segundos) da somatória das energias dos três modos elásticos temos os seguintes resultados:

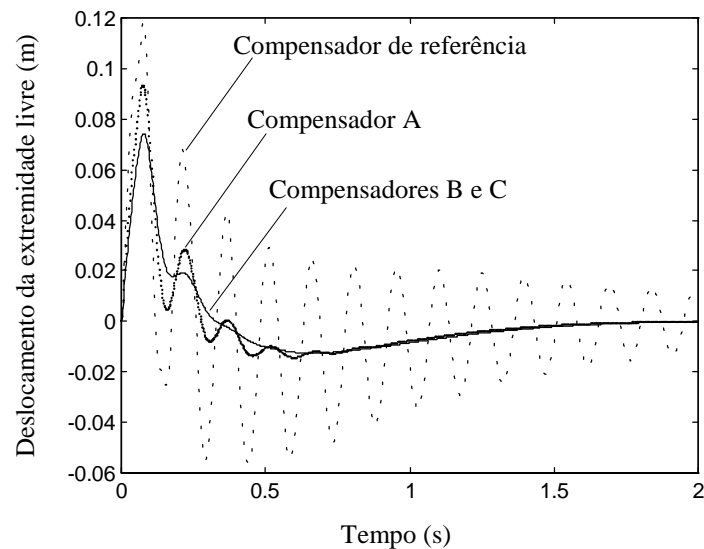
Compensador de referência:  $E = 3,70 \times 10^{-2}$ .

Compensador A:  $E = 8,61 \times 10^{-3}$ .

Compensador B:  $E = 5,94 \times 10^{-3}$ .

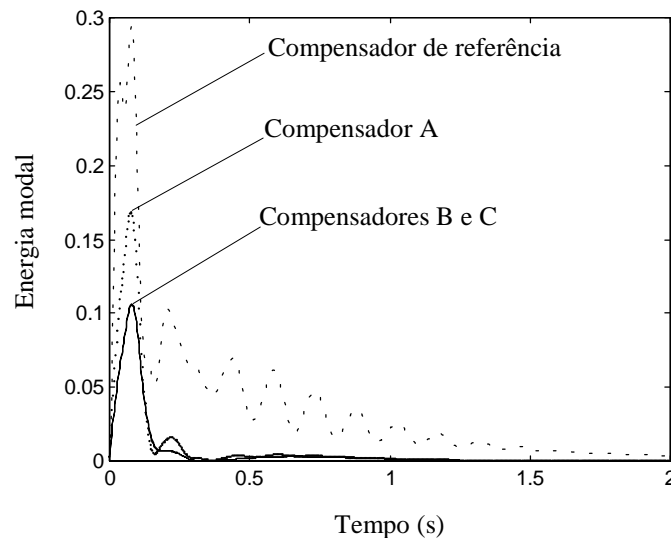
Compensador C:  $E = 5,94 \times 10^{-3}$ .

Embora seja possível que haja uma diferente escolha de ganhos dos compensadores que altere estes resultados, observa-se que o atuador piezelétrico melhora substancialmente o desempenho do sistema, em relação à atenuação das vibrações elásticas.



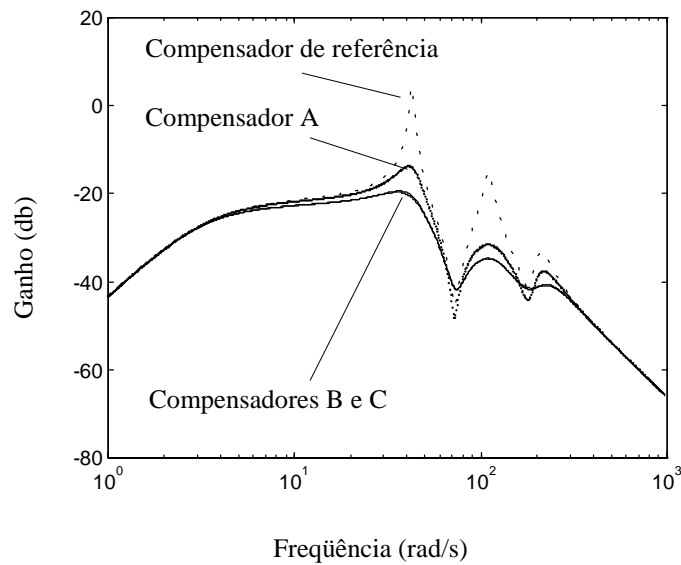
**Figura 2.** Deslocamento da ponta livre para entrada degrau na posição angular (considerando apenas a deformação elástica). Linha tracejada: compensador de referência. Linha pontilhada: compensador A. Linha contínua: compensadores B e C (as curvas estão superpostas).

A figura 3 mostra os gráficos da energia devido à deformação elástica, conforme a expressão (5). Nota-se novamente que a vibração elástica é bastante atenuada pelos compensadores, em particular com o uso adicional do atuador piezelétrico.



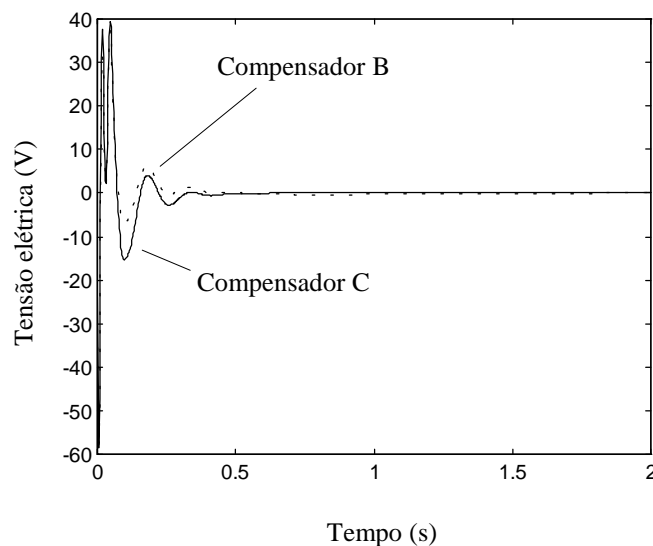
**Figura 3.** Soma das energias dos três modos de vibração elástica. Linha tracejada: compensador de referência. Linha pontilhada: compensador A. Linha contínua: compensadores B e C (as curvas estão superpostas).

A figura 4 mostra a resposta em frequência de malha fechada para cada um dos compensadores analisados. Novamente os compensadores B e C são equivalentes.



**Figura 4.** Resposta em frequência do sistema de malha fechada. Linha tracejada: compensador de referência. Linha pontilhada: compensador A. Linha contínua: compensadores B e C (as curvas estão superpostas).

A figura 5 mostra a tensão aplicada no atuador piezolétrico nos compensadores B e C. A tensão elétrica não ultrapassa 60V nas condições de simulação, conforme um dos requisitos de projeto.



**Figura 5.** Tensão elétrica aplicada no atuador piezolétrico. Linha tracejada: compensador B. Linha contínua: compensador C.

Embora não se possa notar na figura 3, a tensão máxima exigida pelo compensador B é de 59,5 V e a tensão máxima no caso do compensador C é de 58,5 V. Mas a integral da tensão ao quadrado (que é proporcional à energia usada) é 55,0  $V^2s$  para o compensador B e 66,5  $V^2s$  para o compensador C.

## 5 CONCLUSÕES

Foram avaliados três diferentes esquemas de controle de vibração elástica de uma viga flexível rotativa. O uso do atuador piezelétrico mostrou-se efetivo, tanto no caso do compensador projetado usando a abordagem de controle ótimo tanto no compensador em que apenas a velocidade foi realimentada. Também não foram notadas influências negativas devido ao fenômeno de *spillover*, mas simulações numéricas são limitadas ao modelo usado, que, neste trabalho, é bastante simplificado em relação ao sistema real. Todos os compensadores aqui examinados exigem que todas as variáveis de estados estejam disponíveis, o que pode não ser prático, principalmente no caso da medição das velocidades modais. Assim pode ser necessário o uso de um observador de estados, o que aumentaria a complexidade do sistema de controle, e que poderia afetar o desempenho e a estabilidade. Uma alternativa seria empregar o conceito de realimentação positiva da posição, onde é possível aumentar o amortecimento sem ter que realimentar a velocidade. Estas alternativas deverão ser objeto de estudos futuros.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Baz, A., Poh, S. e Fedor, J., 1992, “Independent Modal Space Control With Positive Position Feedback”, Transactions of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, v.114, n.3, pp. 96–103.
- Benain, J. M., Ferreira, P. R. e Sotelo Jr., J. (orientador), 1997, “Análise Dinâmica de uma Barra Flexível Inteligente”, Trabalho de Formatura, Escola Politécnica da USP, São Paulo, SP, Brasil.
- Choi, S. B., Cho, S. S. e Park, Y. P., 1999, “Vibration and Position Tracking Control of Piezoceramic-Based Smart Structures Via QFT”, Transactions of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, v.121, n.3, pp. 27–33.
- Gildin, E. e Moscato, L. A. (orientador), 1998, “Desenvolvimento de um Controlador Adaptativo para Manipuladores Flexíveis com Incertezas de Cargas”, Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da USP, São Paulo, SP, Brasil, 93p.
- Lim, K.B., Maghami, P.G. e Joshi, S.M., 1992, “Comparison of Controller Designs for an Experimental Flexible Structure”, IEE Control Systems, v.12, n.3, pp. 108-118.
- Liu, Y. C. e Yang, S. M., 1995, “Vibration Control Experiment of a Slewing Flexible Beam”, Transactions of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, v.117, n.9, pp. 432–435.
- Pota, H. R., Alberts, T. E., 1995, “Multivariable Transfer Functions for a Slewing Piezoelectric Laminate Beam”, Transactions of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, v.117, n.9, pp. 352–359.