

# ESTUDOS COMPARATIVOS DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE PLACAS TRIANGULARES E RETANGULARES MONTADAS EM BALANÇO

**Américo Tetuo Miyazima**

**Araildo Lima da Silva**

Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Departamento de Mecânica, 12500-000, Av. Ariberto Pereira da Cunha 333, Guaratinguetá, SP, Brasil. E-mail:[americo@iem.efei.br](mailto:americo@iem.efei.br)

**Paulo Shigueme Ide**

Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Departamento de Mecânica, 35700-000, Av. BPS 1303, Itajubá, MG, Brasil.

## RESUMO

O presente trabalho é um estudo de uma placa triangular e outra retangular em balanço, de comportamento linear, a fim de se compararem as frequências naturais obtidas pelo método de elementos finitos via resíduos ponderados com resultados experimentais. Para se realizar os ensaios experimentais foram construídas bancadas numa base de concreto para impor a condição de engastamento rígido e indeslocável. As placas em estudo possuem dimensões: triangular, no eixo x 0,80 m, eixo y 0,70 m e espessura 0,003 m; retangular, no eixo x 0,72 m, eixo y 0,70 m e espessura 0,003 m. O material da placa utilizada é de aço. Fixando-se a placa triangular em balanço na base de concreto, e utilizando um analisador de frequência interligado a um acelerômetro e com a excitação feita com uso de um martelo apropriado, foram levantadas as frequências naturais. Repetiu-se o ensaio também para a placa retangular o mesmo procedimento. Os resultados obtidos pelo método de elementos finitos em estudo, foram comparados com resultados obtidos pelos ensaios. Comparou-se também com resultados obtidos pelo software comercial ANSYS, os dois casos de placas apresentaram excelentes resultados.

**Palavras-chave:** Elementos finitos, Frequências naturais, Placas

## 1. INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos é um procedimento para discretização dos contínuos da Física Matemática. A solução analítica de equações diferenciais é substituída por uma aproximação constituída de uma superposição de funções coordenadas, cujos parâmetros são determinados e aplicando-se o Método dos Resíduos Ponderados. Para que o estudo de método numérico tenha confiabilidade em seus resultados, comparou-se com resultados obtidos através de ensaios experimentais e também com o software comercial ANSYS para mostrar a eficiência do método utilizado e do programa desenvolvido em linguagem Pascal.

## 2. EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO MOVIMENTO DAS PLACAS

### 2.1 Hipóteses

No desenvolvimento da equação diferencial do movimento serão admitidas as seguintes hipóteses:

- a - Pequenas deformações e deslocamentos;
- b - Retas normais ao plano médio da placa permanecem normais a esse plano após a deformação;
- c - O valor da tensão  $\sigma_z$  - tensão normal ao plano da placa - é desprezível quando comparado aos valores de  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ ;
- d - Carregamentos somente normais ao plano médio da placa indeformada.

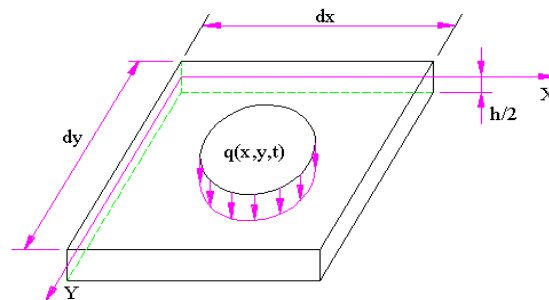
### 2.2 Relações deslocamentos-deformações

Da teoria da elasticidade linear, tem-se:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

### 2.3 Esforços solicitantes

Figura 1 mostra um elemento de placa de espessura  $h$  e de dimensões  $dx$  e  $dy$ , onde os eixos  $x$  e  $y$  estão situados no plano neutro da placa. O carregamento dinâmico  $q(x,y,t)$  presente na figura considerada é transversal à placa e possui dimensão de força por unidade de área.

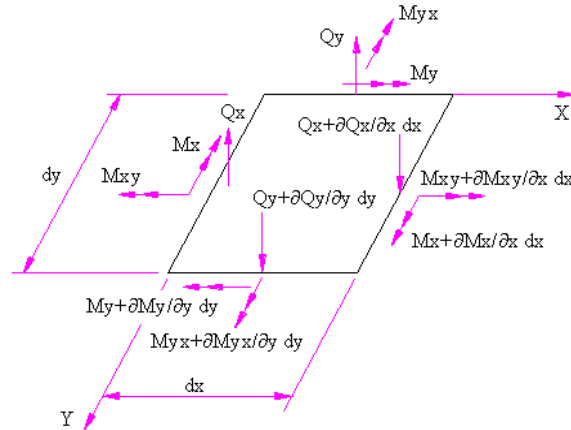


**Figura 1.** Carregamento dinâmico de um elemento de placa.

Fazendo-se o equilíbrio, obtém-se:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = +D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

e  $M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  onde  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  (2)



**Figura 2.** Esforço cortante e momentos atuando sobre um elemento de placa.

## 2.4 Equilíbrio de um elemento de placa

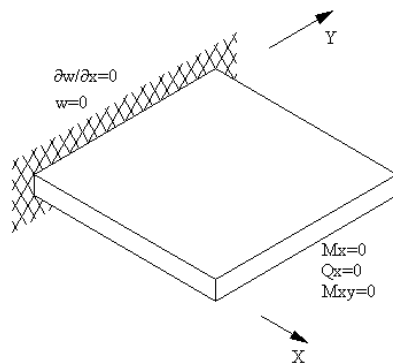
Equilíbrio dos esforços na direção z,

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q(x, y, t) = h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3)$$

Substituindo a Eq. (2) na Eq. (3), resulta-se:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y, t) - h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}}{D} \quad (4)$$

## 2.5 Condições de contorno da placa



**Figura 3.** Condições de contorno para uma placa em balanço.

## 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS VIA RESÍDUOS PONDERADOS

### 3.1 Método dos resíduos ponderados

A aplicação do método dos elementos finitos exige, como condição prévia, a transformação da equação diferencial do movimento em uma equação integral equivalente. Para isso considerando a função  $\gamma = \gamma(x, y)$ , arbitrária no espaço e no tempo, contínua e duas

vezes derivável no domínio da placa e tal que, ao longo de Cd, em qualquer instante, ocorra:  $\gamma=0$  e  $\frac{\partial \gamma}{\partial n} = 0$ ; donde  $\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0$  em Cd.

Multiplicando ambos lados da Eq. (3) pela função  $\gamma$  e integrando no domínio da placa resulta:

$$\iint_{\Omega} \gamma \left[ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q(x, y, t) - h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] dx dy = 0 \quad (5)$$

Integrando na região de contorno, resulta:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} M_x - 2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} M_{xy} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} M_y \right] dx dy + \int_{C\sigma} \gamma W n ds - \int_{C\sigma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} M n ds = \\ \iint_{\Omega} \gamma \left[ h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q(x, y, t) \right] dx dy \end{aligned} \quad (6)$$

Supondo-se uma solução aproximada para o deslocamento da placa  $\bar{w}(x, y)$ , os esforços  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$  poderão ser calculados através da Eq. (2). Adotando-se a solução aproximada  $\bar{w}$ , a Eq. (3), não será satisfeita:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q(x, y, t) - h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = R \neq 0 \quad (7)$$

onde R = resíduo no ponto de coordenadas (x,y).

### 3.2 Discretização da função peso e hipótese de Galerkin

Aplicando-se uma discretização pelo Método dos Elementos Finitos e adotando uma solução aproximada ( $\bar{w}$ ) para o deslocamento transversal da placa ( $w(x, y, t)$ ), da seguinte forma:

$$\bar{w} = \sum_{j=1}^n (w_j N_{j1} + \alpha_j N_{j2} + \beta_j N_{j3}) + \sum_{j=n+1}^m (w_j N_{j1} + \alpha_j N_{j2} + \beta_j N_{j3}) \quad (8)$$

onde w é o deslocamento transversal,  $\alpha$  e  $\beta$  são rotações nos pontos nodais, e N são funções de interpolação.

A hipótese de Galerkin, é quando, as funções de ponderação serão as mesmas utilizadas para funções de forma.

### 3.3 Formulação matricial

Substituindo a Eq. (8) na Eq. (2), e por sua vez na Eq. (6), resulta:

$$\underline{KX} + \underline{M} \ddot{X} = \underline{F} \quad (9)$$

onde

$$\underline{K} = D \iint_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 N^t}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 N^t}{\partial y^2} \right) + \gamma \left[ \left( \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 N^t}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 N^t}{\partial x^2} \right) \right] + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 N^t}{\partial x \partial y} \right) \right\} dx dy \quad (10)$$

$$\underline{M} = h\rho \iint_{\Omega} NN^t dx dy \quad (11)$$

$$\underline{F} = - \iint_{\Omega} Nq dx dy - \int_{C\sigma} NVnds + \int_{C\sigma} \frac{\partial N}{\partial n} Mnds \quad (12)$$

## 4. ELEMENTOS FINITOS PARA PLACAS

### 4.1 Elemento triangular

A numeração nodal é anti-horária e a espessura (h) é constante ao longo do domínio do elemento.

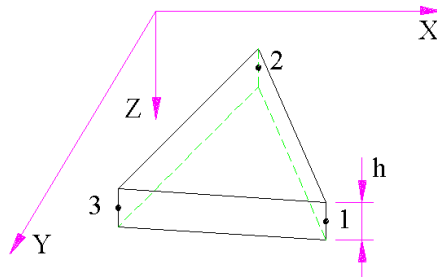


Figura 4. Sistema de coordenadas e numeração de nós.

### 4.2 Matriz de rigidez

A obtenção da matriz de rigidez demanda um trabalho considerável, Joseph *et al* (1979), por meio de manipulação algébrica obteve-se a expressão da matriz de rigidez. Utilizou-se a propriedades do material  $E = 210 \times 10^9$  Pa e  $\nu = 0,3$ .

$$\underline{K}^e = \frac{1}{8A_{123}^3} Q^t U Q$$

### 4.3 Matriz de massa

Substituindo-se o vetor de interpolação N, na Eq. (10), obtém-se a matriz de massa do elemento triangular em estudo. Utilizou-se a propriedade do material  $\rho = 7830$  Kg/m<sup>3</sup>.

## 5. MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO

Um modo natural de vibração é aquele onde todos os pontos do domínio do problema considerado executam um movimento harmônico simples de mesma frequência e fase, na ausência do correngamento externo. Logo:

$$\iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} M_x - 2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} M_{xy} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} M_y \right] dx dy = -\omega^2 \iint_{\Omega} \gamma h \rho V dx dy \quad (13)$$

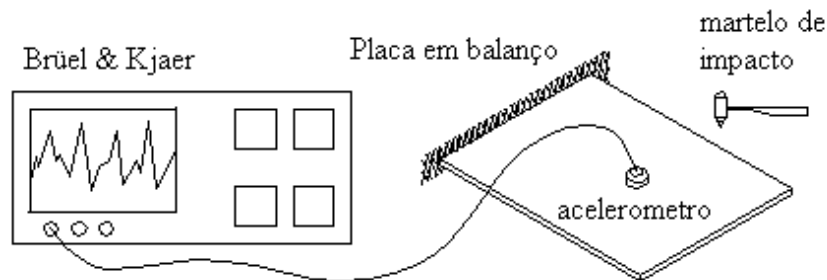
Na forma matricial:

$$\underline{K} \underline{X} - \omega^2 \underline{M} \underline{X} = \underline{0} \quad (14)$$

As frequências naturais foram obtidas utilizando o método de Jacobi.

## 6. ESQUEMA DOS ENSAIOS EXPERIMENTAIS

Uma placa triangular (geometria triangulo retangulo) é fixada numa base de concreto para impor a condição de fixação rígida e indesejável. Aplicou-se o mesmo procedimento para placa retangular. Um aparelho que medem as frequências naturais foi instrumentado como se mostra na Figura 5, e excitou-se a placa utilizando um martelo de impacto. Após alguns segundos o aparelho registra frequências naturais que estão citadas nas Tabelas 1 e 3.



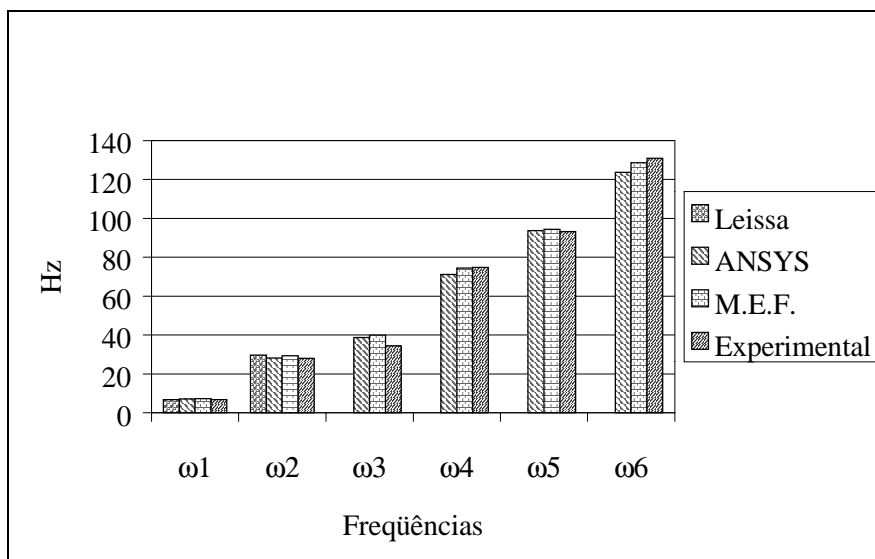
**Figura 5.** Esquema para obter frequências naturais experimentalmente.

## 7. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados de frequências naturais obtidos pelo Método de Elementos Finitos (M.E.F.) utilizou-se divisão de malhas 4x4 em casos de placas triangular e retangular, foram comparados com fontes de Leissa (1969), ANSYS, e ensaio experimental.

**Tabela 1.** Frequências naturais - Placa triangular

Frequências (Hz)	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
Leissa	6,88	29,69	-	-	-	-
ANSYS	7,20	28,24	38,64	71,17	93,70	123,69
M.E.F.	7,31	29,39	40,11	74,50	94,39	128,65
Experimental	6,80	28,00	34,40	74,80	93,20	131,00



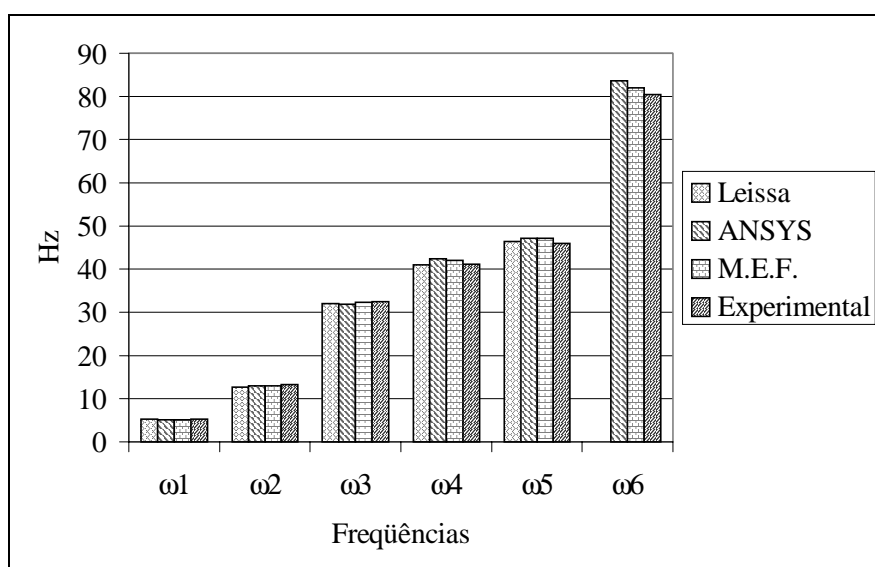
**Figura 6.** Frequências naturais de Placa triangular em balanço.

**Tabela 2.** Desvio percentual – Placa Triangular

(%)	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
M.E.F. x Leissa	7,50	1,02	-	-	-	-
M.E.F. x ANSYS	1,50	3,91	3,66	4,47	0,73	3,86
M.E.F. x Exper.	6,98	4,73	14,24	0,40	1,26	1,83

**Tabela 3.** Frequências naturais - Placa retangular

Frequências (Hz)	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
Leissa	5,20	12,72	31,98	40,96	46,49	-
ANSYS	5,17	13,01	31,93	42,41	47,15	83,59
M.E.F.	5,17	13,03	32,26	42,06	47,12	82,05
Experimental	5,20	13,20	32,40	41,20	46,00	80,40



**Figura 7.** Frequências naturais de Placa retangular em balanço.

**Tabela 4.** Desvio percentual – Placa Retangular

(%)	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
M.E.F. x Leissa	0,58	2,38	0,87	2,62	1,34	-
M.E.F. x ANSYS	0,00	0,15	1,02	0,83	0,06	1,88
M.E.F. x Exper.	0,58	1,30	0,43	2,04	2,38	2,01

## 8. CONCLUSÕES

O presente trabalho teve a preocupação de mostrar que o método de elementos finitos (via resíduos ponderados), aplicado numa placa em balanço, possuem uma precisão muito boa de frequências naturais como se mostram nas Tabelas 2 e 4. O maior desvio percentual apresentado no caso de placa triangular foi na primeira e terceira frequências em relação Leissa e Experimental. Em relação ANSYS apresentaram desvios bem comportados ficando abaixo de 5%.

O desvio percentual para o caso de placa retangular, apresentaram de uma forma mais uniforme, ficando abaixo de 3%. Em particular com relação ao ANSYS, ficaram abaixo de 2%. Portanto o método de elementos finitos em estudo apresentaram frequências naturais extremamente confiáveis principalmente para o caso de placa retangular.

## 9. REFERÊNCIAS

- Bathe, K. J., 1982, Finite Element Procedures in Engineering Analysis., Englewood Cliffs, N.J., Prince Hall.
- Caughey, T. K., 1960, Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems., J. Applied Mechanics, vol. 27, 269-271 p.
- Clough, R. W. & Penzien, J., 1975, Dynamics of Structures., McGraw-Hill, London.
- Costa, H. B., 1986, Elementos Finitos (via resíduos ponderados) na Resolução do Problema de Segunda Ordem das Placas., Tese de Doutorado, EPUSP, São Paulo, Brasil.
- Garzeri, F. J., 1991, Elementos Finitos (via resíduos ponderados) na Análise Dinâmica de Placas de Comportamento Linear., EPUSP, São Paulo.
- Gorman, D. J., 1982, Free Vibration Analysis of Rectangular Plates., Elsevier North Holland, New York.
- Joseph, K. T. & Rao, S., 1979, A Fast Algorithm for Triangular Plate Bending Element., Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 14, 1100-1103 p.
- Leissa, A. W., 1969, Rectangular Plates in Vibration of Plates, NASA SP-160, Washington, 41-160 p.
- Timoshenko, S. P. & Woinowsky-Krieger, S., 1959, Small Deflections of Laterally Loaded Plates in Theory of Plates and Shells., McGraw-Hill, London, 79-104p.
- Zienkiewicz, O.C., 1977, Bending of Thin Plates, In: The Finite Element Method. 3 ed. McGraw-Hill, London, 226-267p.