

IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS E RECONSTRUÇÃO DE FORÇA ATRAVÉS DO MÉTODO DAS FUNÇÕES ORTOGONAIS

Ricardo Pereira Pacheco (*rpacheco@mecanica.ufu.br*)

Valder Steffen Jr. (*vsteffen@mecanica.ufu.br*)

Domingos Alves Rade (*domingos@ufu.br*)

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
38400-902, Uberlândia-MG, Brasil

Resumo

A identificação de parâmetros estruturais e forças de excitação em sistemas mecânicos pode ser realizada utilizando-se o método das funções ortogonais. Neste método, os sinais temporais envolvidos na equação de movimento do sistema são expandidos em séries de funções ortogonais. Integrando-se a equação diferencial de movimento e utilizando-se a propriedade de integração das séries ortogonais, através da matriz operacional de integração, obtém-se uma equação algébrica que permite identificar os parâmetros estruturais ou as forças de excitação do sistema. Um programa computacional desenvolvido para aplicar este método permite escolher entre seis tipos de funções ortogonais: séries de Fourier, polinômios de Legendre, polinômios de Jacobi, séries de Chebyshev, funções Block-Pulse e funções de Walsh. A viabilidade de aplicação do método das funções ortogonais na identificação de sistemas contínuos é realizada a partir do estudo de uma barra em vibração transversal, modelada por elementos finitos.

Palavras-chave: identificação, funções ortogonais, domínio do tempo

1. INTRODUÇÃO

A identificação de parâmetros de sistemas é um assunto que se encontra dentro de uma área mais ampla, qual seja a dos problemas inversos. Na área de Engenharia Mecânica, a identificação de parâmetros, tanto modais (frequências naturais, fatores de amortecimento modais e modos de vibrar) como estruturais (matrizes de inércia, de amortecimento e de rigidez), têm sido usados em ajuste de modelos de elementos finitos, controle, detecção de falhas, dentre outros.

Outro problema pertencente à classe dos problemas inversos que tem sido objeto de estudo é o da identificação de forças de excitação a partir de respostas dinâmicas. Isto pode ser de grande valia quando não se tem acesso ao local de aplicação da força, ou este é desconhecido, ou quando a introdução de um transdutor de força poderia modificar significativamente as características dinâmicas da estrutura (Genaro and Rade, 1998).

Vários tipos de funções ortogonais têm sido utilizados para análise, identificação e controle de sistemas dinâmicos, tais como: funções Walsh, polinômios de Laguerre, funções Block-Pulse, polinômios de Legendre, séries de Chebyshev, polinômios de Jacobi, séries de Fourier e polinômios de Hermite (Pacheco and Steffen, 1999a).

Neste trabalho, alguns tipos de funções ortogonais foram utilizados para identificação de parâmetros modais e reconstrução de forças de excitação. A aplicação de uma propriedade para integração de funções ortogonais no domínio do tempo, permite transformar a equação

diferencial de movimento que rege o sistema, numa equação algébrica cuja solução nos permite determinar os parâmetros desejados ou as forças de excitação, de acordo com o caso estudado.

Apresenta-se, na seqüência, uma breve descrição das funções ortogonais, a formulação da técnica de identificação e alguns casos, nos quais aplica-se a técnica de identificação do domínio do tempo ao problema da vibração transversal de barras modeladas por elementos finitos.

2. FUNÇÕES ORTOGONAIS

Um conjunto de funções ortogonais $\{\phi_i(t)\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$ é dito *ortogonal* no intervalo $[a, b]$ se:

$$\int_a^b \phi_m(t) \phi_n(t) dt = K_{mn}, \quad \text{onde: } \begin{cases} K_{mn} = 0 & \text{se } m \neq n \\ K_{mn} \neq 0 & \text{se } m = n \end{cases}$$

Se K_{mn} for o delta de Kronecker, o conjunto de funções $\{\phi_i(t)\}$ é denominado *ortonormal*. A seguinte propriedade para integrações sucessivas no domínio do tempo, de uma base vetorial de funções ortonormais truncada com r termos, se verifica:

$$\underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{n \text{ vezes}} \{\phi(\tau)\} (d\tau)^n \equiv [P]^n \{\phi(t)\} \quad (1)$$

onde: $[P] \in \mathfrak{R}^{r,r}$ é uma matriz quadrada com elementos constantes, chamada matriz operacional

$$\{\phi(t)\} = \{\phi_0(t) \quad \phi_1(t) \quad \dots \quad \phi_{r-1}(t)\}^T \text{ é a base vetorial da série ortogonal}$$

Uma breve descrição das funções ortogonais utilizadas neste trabalho pode ser encontrada em Pacheco *at al.* (1999).

3. TÉCNICA DE IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

A técnica de identificação proposta pode ser formulada para utilizar qualquer um dos três tipos possíveis de resposta de sistemas mecânicos: deslocamento, velocidade ou aceleração, tanto de sistemas livres como de sistemas forçados. Em razão da formulação para estes três tipos de resposta serem muito semelhantes, será apresentada apenas a formulação em termos do deslocamento.

3.1 Identificação de Parâmetros

A equação do movimento para um sistema com N g.d.l. é dada por:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2)$$

onde $[M]$, $[C]$ e $[K] \in \mathfrak{R}^{N,N}$ são, respectivamente, as matrizes de inércia, amortecimento e rigidez, $\{x(t)\} \in \mathfrak{R}^{N,1}$ é o vetor dos deslocamentos e $\{f(t)\} \in \mathfrak{R}^{N,1}$ é o vetor das forças de excitação.

Integrando a Eq. (2) duas vezes no intervalo $[0, t]$, obtém-se:

$$\begin{aligned} & [M] \left(\{x(t)\} - \{x(0)\} - \{\dot{x}(0)\}t \right) + [C] \left(\int_0^t \{x(\tau)\} d\tau - \{x(0)\}t \right) + \\ & + [K] \int_0^t \int_0^t \{x(\tau)\} d\tau^2 = \int_0^t \int_0^t \{f(\tau)\} d\tau^2 \end{aligned} \quad (3)$$

onde $\{x(0)\}$ e $\{\dot{x}(0)\}$ são os vetores das condições iniciais de deslocamento e velocidade, respectivamente.

Os sinais $\{x(t)\}$ e $\{f(t)\}$ podem ser expandidos em séries de funções ortogonais truncadas com r termos, como se segue:

$$\{x(t)\} = [X]\{\phi(t)\} \quad \{f(t)\} = [F]\{\phi(t)\} \quad (4)$$

onde: $[X] \in \mathfrak{R}^{N,r}$ é a matriz dos coeficientes da expansão de $\{x(t)\}$
 $[F] \in \mathfrak{R}^{N,r}$ é a matriz dos coeficientes da expansão de $\{f(t)\}$

Substituindo a Eq. (4) na Eq. (3) e aplicando a propriedade para integração dada pela Eq. (1), o seguinte sistema de equações algébricas é obtido:

$$[H][J] = [E] \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{onde: } [H] &= \begin{bmatrix} [M] & -[M]\{x(0)\} & -[M]\{\dot{x}(0)\} - [C]\{x(0)\} & [C] & [K] \end{bmatrix} \\ [J] &= \begin{bmatrix} [X]^T & \{e\} & [P]^T \{e\} & [P]^T [X]^T & [P]^T {}^2[X]^T \end{bmatrix}^T \\ [E] &= [F][P]^2 \end{aligned}$$

Nesta equação, $\{e\} \in \mathfrak{R}^{r,1}$ é um vetor constante cuja forma depende da escolha particular da série ortogonal: para as funções Block-Pulse, $\{e\} = \{1 \ 1 \ \dots \ 1\}^T$; para as séries de Fourier, Chebyshev, Legendre, Jacobi e Walsh, $\{e\} = \{1 \ 0 \ \dots \ 0\}^T$.

Resolvendo-se o sistema (5) para a matriz $[H]$ obtém-se o modelo estrutural do sistema, representado pelas matrizes $[M]$, $[C]$ e $[K]$, e as condições iniciais. Uma solução computacionalmente estável para (5) pode ser conseguida através do método dos mínimos quadrados combinado com a técnica da decomposição em valores singulares.

Se as respostas livres são utilizadas, um sistema de equações similar a (5) é obtido, com:

$$\begin{aligned} [H] &= \begin{bmatrix} \{x(0)\} & \{\dot{x}(0)\} + [M]^{-1}[C]\{x(0)\} & -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K] \end{bmatrix} \\ [J] &= \begin{bmatrix} \{e\} & [P]^T \{e\} & [P]^T [X]^T & [P]^T {}^2[X]^T \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

$$[E] = [X]$$

Como se pode ver nas equações acima, não é possível identificar, separadamente, as matrizes $[M]$, $[C]$ e $[K]$ quando as respostas livres são utilizadas. Porém, independentemente do tipo de resposta, sempre é possível formar a seguinte matriz de estado cujas auto-soluções fornecem as frequências naturais, os fatores de amortecimento modais e os modos complexos de vibração do sistema:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2N, 2N}$$

Devido a restrições práticas, geralmente é impossível usar um número de sensores igual ao número de modos que contribuem para a resposta. Assim, a fim de se criar um modelo matemático superdimensionado a partir de um número reduzido de instrumentação, uma técnica denominada *Técnica das Estações Transformadas* tem sido utilizada, juntamente com o conceito de *Fator de Confiança Modal (FCM)*. O FCM é usado para separar os modos estruturais dos modos computacionais. Detalhes são dados em Pacheco and Steffen (1999b).

3.2 Identificação de Força

A metodologia para identificação de força é similar àquela apresentada na seção anterior para identificação de parâmetros modais. Considerando-se que as matrizes $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são conhecidas, é necessário apenas rearranjar a Eq. (5) para estimação da matriz $[F]$, a qual contém os coeficientes das forças de excitação. Neste caso, as matrizes em (5) são dadas por:

$$[H] = \begin{bmatrix} [F] \parallel [M]\{x(0)\} \parallel [M]\{\dot{x}(0)\} + [C]\{x(0)\} \\ [P]^T \parallel \{e\} \parallel [P]^T \{e\} \end{bmatrix}^T$$

$$[E] = [M][X] + [C][X][P] + [K][X][P]^2$$

Resolvendo o sistema (5) para a matriz $[H]$, é possível identificar as condições iniciais e os coeficientes da expansão das forças de excitação.

O método das estações transformadas não pode ser aplicado a sistemas sujeitos a excitação, já que sua formulação é obtida a partir das equações do movimento livre. Em função disto, torna-se necessário conhecer a resposta em todos os g.d.l. do modelo, o que representa grande restrição à aplicação das funções ortogonais para o problema de identificação de forças.

4. ESTUDO DE BARRAS EM FLEXÃO POR ELEMENTOS FINITOS

Aqui a formulação utilizada para barras em flexão seguiu Lalanne *at al.* (1983). Neste caso, consideram-se barras do tipo Bernoulli-Euler, ou seja, os efeitos secundários de cisalhamento transversal e inércia de rotação são desprezados. Cada elemento de barra possui dois nós e cada nó tem 2 g.d.l.: uma translação e uma rotação, como mostra a Figura 1.

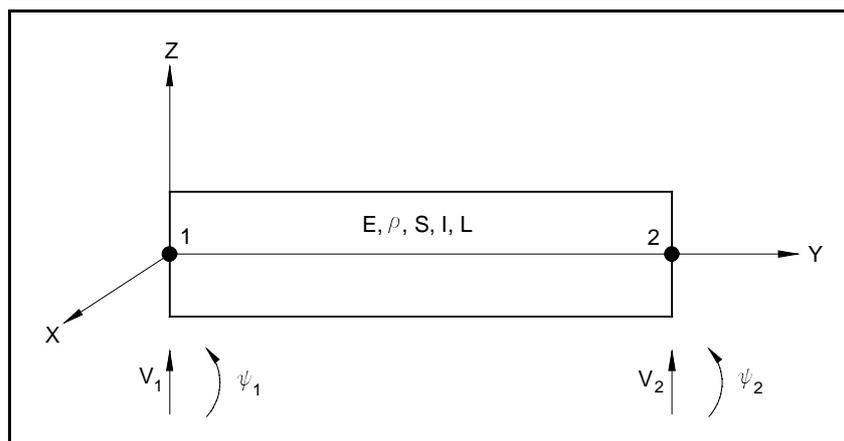


Figura 1 – Elemento de barra em flexão

As propriedades físicas e geométricas do elemento de barra são representadas pelo módulo de elasticidade normal (E), densidade (ρ), área da seção transversal (S), módulo de inércia de área em relação ao eixo X (I) e pelo comprimento do elemento (L).

O vetor de deslocamento nodal é dado por:

$$\delta = [v_1 \quad \psi_1 \quad v_2 \quad \psi_2]^T \quad (6)$$

5. APLICAÇÕES

Nas simulações numéricas utilizou-se uma barra de alumínio de seção transversal retangular em vibração de flexão, com condições de contorno livres. Tal barra foi modelada por elementos finitos utilizando-se 30 elementos. O modelo físico da estrutura é mostrado na figura abaixo.

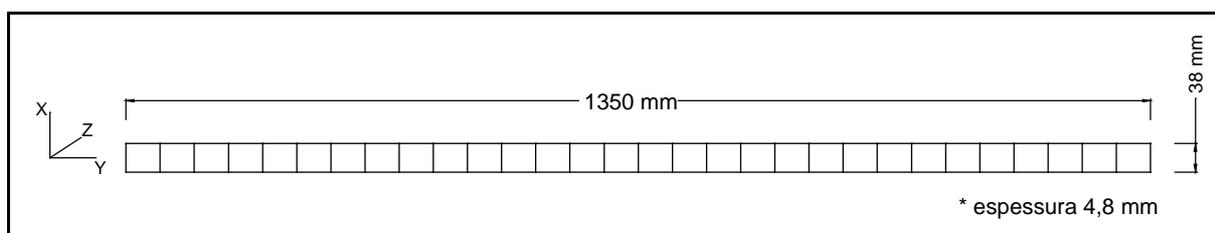


Figura 2 – Modelo físico da barra

5.1 Identificação de Parâmetros Modais

A partir do modelo paramétrico global da estrutura, calculou-se a resposta do sistema, levando-se em conta a contribuição dos 20 primeiros modos e 2048 pontos no intervalo de 0 a 0,05 s, com a condição inicial $\dot{x}_3(0) = 1 \text{ m/s}$. A Figura 3 mostra a aceleração do nó 1 na direção Z, ao longo do tempo.

Para o processo de identificação, utilizaram-se as respostas de aceleração dos nós 1, 2, 3 e 4, e foram criadas mais 20 estações transformadas ou assumidas. Utilizou-se a série de Fourier com 81 termos na expansão ($r=81$). Os resultados com as frequências naturais (f) e os fatores de amortecimento (ξ) exatos e identificados são apresentados na Tabela 1. Os valores

exatos foram obtidos através da solução do problema de auto-valores definido a partir do modelo elementos finitos acima mencionado.

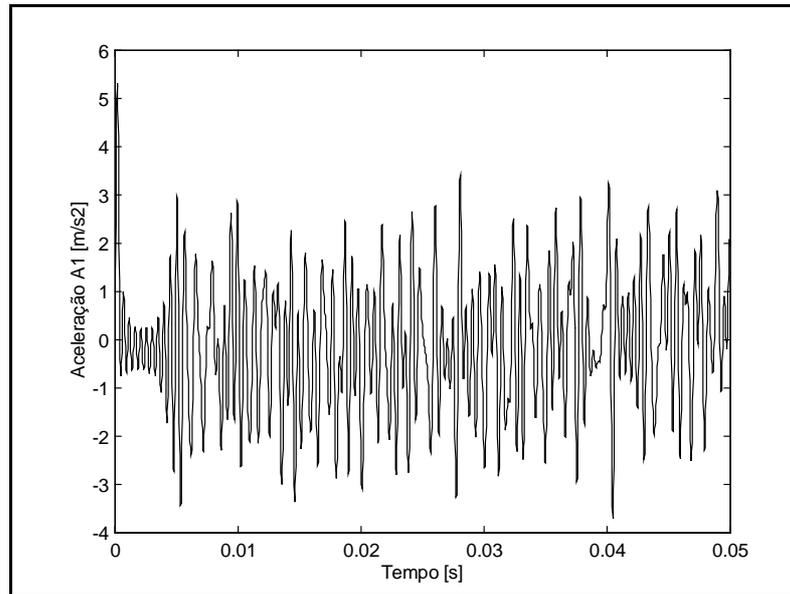


Figura 3 – Aceleração do nó 1 na direção Z

Tabela 1 – Parâmetros modais exatos e identificados

MODO	f_e [Hz]	f_i [Hz]	ξ_e	ξ_i
1	0,0	0,0	-	-
2	0,0	0,0	-	-
3	13,5	13,5	0,00	0,00
4	37,2	37,3	0,00	0,01
5	72,9	72,9	0,00	0,00
6	120,5	120,5	0,00	0,00
7	180,0	180,0	0,00	0,00
8	251,4	251,4	0,00	0,00
9	334,7	334,7	0,00	0,00
10	429,8	429,8	0,00	0,00
11	536,9	536,9	0,00	0,00
12	655,8	655,8	0,00	0,00
13	786,7	786,7	0,00	0,00
14	929,6	929,6	0,00	0,00
15	1084,5	1084,5	0,00	0,00
16	1251,6	1251,6	0,00	0,00
17	1430,9	1430,9	0,00	0,00
18	1622,6	1622,5	0,00	0,00
19	1826,7	1826,6	0,00	0,00
20	2043,5	2043,4	0,00	0,00

Obs.: Os sub-índices e e i indicam, respectivamente, valores exatos e identificados.

5.2 Identificação de Forças Excitadoras

Para o problema de identificação de força, foi aplicada uma excitação periódica com dois harmônicos no nó 2 definida por:

$$f_3(t) = 5 \sin(2000 \pi t) + 2 \cos(1600 \pi t) \text{ [N]}$$

Através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, as respostas utilizadas no processo de identificação foram geradas no intervalo [0 ; 0,006] s. Neste caso o sinal de saída usado foi o da velocidade.

A Figura 4 apresenta o gráfico da força identificada através das séries de Fourier (r=151). O erro relativo cometido comparando-se com o valor RMS do sinal foi de 3,4%.

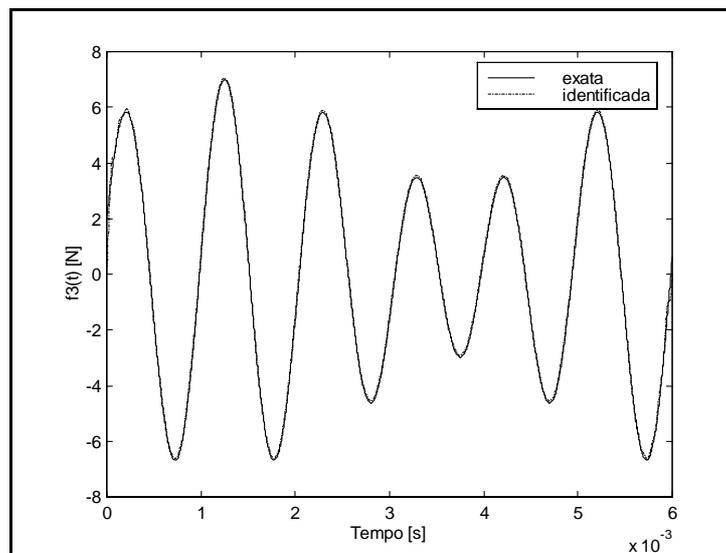


Figura 4 – Forças exata e identificada – séries de Fourier

O resultado obtido fazendo-se a expansão com as funções Block-Pulse (r=512) é mostrado na Figura 5. O erro em relação ao valor RMS foi de 2,7%.

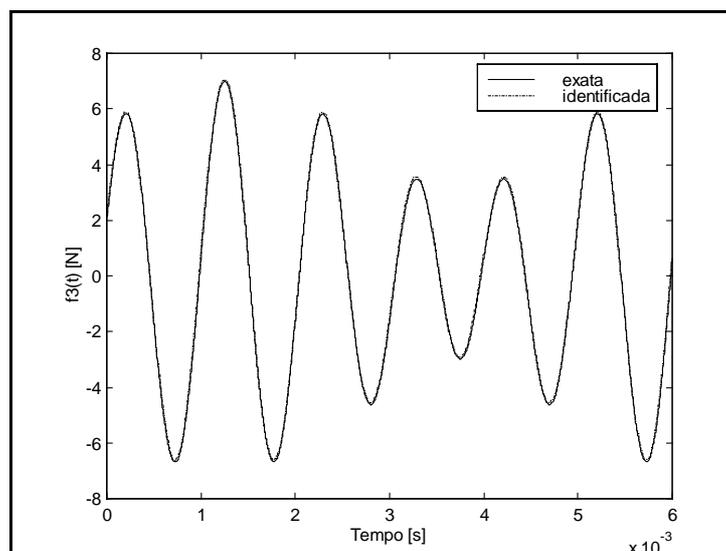


Figura 5 – Forças exata e identificada – funções Block-Pulse

Ao se introduzir ruído nos sinais de resposta, observa-se que o método utilizado é relativamente robusto. Foi possível observar que até 3% de ruído aleatório sobre os sinais de resposta, implicaram em erros inferiores a 5% nos resultados apresentados. Para níveis superiores de ruído, pode ser empregada a técnica das variáveis instrumentais (Seibold, 1997).

6. CONCLUSÕES

Neste trabalho, mostrou-se como as funções ortogonais podem ser empregadas para a identificação de parâmetros modais e reconstrução de força em sistemas mecânicos.

Os resultados obtidos mostram que este método de identificação no domínio do tempo pode ser aplicado a estruturas contínuas modeladas por elementos finitos e indicam a viabilidade de aplicação em estruturas reais.

Pretende-se, na seqüência deste trabalho, realizar um procedimento experimental visando a identificação modal de uma barra com as mesmas características da que foi utilizada nas simulações apresentadas.

No caso de identificação de força, talvez a aplicação de algum método de redução de modelos ajude a contornar o problema relacionado à necessidade de se instrumentar todos os g.d.l. envolvidos.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Genaro, G., Rade, D. A., 1998, Input Force Reconstruction in the Time Domain, Proc. (in CD) of the 16th International Modal Analysis Conference, Santa Barbara - CA, USA.
- Lallane, M., Berthier, P., Hagopian, J. D., 1983, “Mechanical Vibrations for Engineers”, John Wiley and Sons, Northern Ireland, 266 p.
- Pacheco, R. P., Steffen Jr., V., 1999a, “Using Orthogonal Functions for Time Domain Identification”, Proc. of the 6th Pan-American Congress of Applied Mechanics and 8th International Conference on Dynamic Problems in Mechanics, Rio de Janeiro, Brazil, vol. 8, pp. 1469-1472
- Pacheco, R. P., Steffen Jr., V., 1999b, “On Time Domain Identification Using Orthogonal Functions”, Proc. (in CD) of the 1999 ASME Design Engineering Technical Conferences – DETC’99 – Design for the Next Millenium, Las Vegas-NV, 12-16 Sept.
- Pacheco, R. P., Steffen Jr., V., Rade, D. A., 1999, “Time Domain-Based Identification of Modal Parameters and Excitation Forces Using Orthogonal Functions”, Proc. (in CD) of the 15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Águas de Lindóia, Brazil, 21-26 Nov.
- Seibold, S., 1997, “Identification of Physical Parameters Using an Instrumental Variables Technique”, MSSP – Mechanical Systems and Signal Processing, 11(3), pp. 425-439