

# PROJETO ÓTIMO DE ABSORVEDORES DINÂMICOS DO TIPO VIGA PARA A ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES MULTIDIRECIONAIS

**Sebastião Simões Cunha Jr.** e-mail: [simoes@mecanica.ufu.br](mailto:simoes@mecanica.ufu.br)

**Domingos Alves Rade** e-mail: [domingos@ufu.br](mailto:domingos@ufu.br)

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica.

Av. João Naves de Ávila 2160 – Bloco M, CEP: 38400-902, Uberlândia, MG, Brasil.

## Resumo

Este trabalho mostra uma metodologia de projeto ótimo de um Absorvedor Dinâmico de Vibrações (ADV) do tipo viga para atenuação simultânea de vibrações de translação e de rotação de sistemas estruturais planos. Utiliza-se uma técnica de acoplamento de sub-estruturas baseada em funções de resposta em frequência (FRFs), onde as FRFs da estrutura acoplada (estrutura primária + ADV) são calculadas a partir das FRFs destas duas sub-estruturas. As FRFs da estrutura acoplada são utilizadas para definir índices de desempenho relacionados com os níveis de vibração do sistema dentro de uma dada banda de frequência. Estes índices, que traduzem uma combinação dos níveis de vibrações de translação e de rotação, são otimizados utilizando Algoritmos Genéticos (AGs), tendo como variáveis de projetos as propriedades físicas e/ou geométricas do ADV. Na primeira parte deste trabalho apresentam-se a formulação básica da técnica de acoplamento de sub-estruturas, a definição dos índices de desempenho e uma breve revisão dos AGs. Por fim, tem-se um exemplo de simulação numérica ilustrando a metodologia proposta.

**Palavras-chave:** Absorvedor Dinâmico de Vibrações, Controle de vibrações, Otimização

## 1. INTRODUÇÃO

Na sua forma mais simples, absorvedores dinâmicos de vibrações (ADVs) são dispositivos de parâmetros concentrados de massa, rigidez e amortecimento que, uma vez acoplados a uma dada estrutura, dita *estrutura primária*, são capazes de absorver a energia vibratória no ponto de conexão.

Desde sua invenção por Frahm no início do século (Frahm,1911), os ADVs têm sido extensivamente utilizados para atenuar vibrações em diversos tipos de máquinas e estruturas. Além do ADV de Frahm, constituído de um sistema de 1 GDL com amortecimento viscoso também têm sido utilizados sistemas estruturais discretos de vários GDL (Ram & Elhay,1996) e sistemas contínuos (Cunha Jr., 1999). Um estudo abrangente da teoria e aplicações práticas dos ADVs é apresentado por Koronev & Reznikov (1993). Uma síntese dos principais estudos recentes de ADVs passivos, semi-ativos e ativos é apresentada por Sun *et al.* (1995).

Dentre os ADVs contínuos, aqueles do tipo viga vêm sendo estudados por diversos autores. Snowdon & Nobile (1980) analisaram o desempenho de diferentes configurações de ADVs acoplados tanto a sistemas de 1 GDL quanto a sistemas contínuos. ADVs viscoelásticos do tipo viga foram considerados por Freitas & Espíndola (1993) no contexto de uma teoria geral de projeto ótimo de sistemas absorvedores. Cunha Jr & Rade (1999) propuseram uma metodologia de projeto ótimo de ADVs do tipo viga para atenuação de vibrações em uma única direção empregando uma técnica de acoplamento de sub-estruturas.

Em sua configuração básica, um ADV é capaz de absorver o movimento vibratório segundo uma única coordenada espacial. Contudo, em problemas mais complexos, envolvendo sistemas vibratórios contínuos multidimensionais, é desejável a atenuação simultânea das vibrações (translacionais e rotacionais) em diversas direções. Neste contexto, o presente trabalho apresenta um estudo da viabilidade de uma técnica de projeto ótimo de ADVs multidirecionais modelados como vigas de Euler-Bernoulli. A metodologia apresentada permite sintonizar o absorvedor para a atenuação de vibrações harmônicas, numa dada banda de frequência, em duas direções distintas, simultaneamente. O procedimento proposto consiste no emprego de uma técnica de acoplamento de sub-estruturas baseada em FRFs, que permite obter as FRFs da estrutura acoplada (estrutura primária + ADV), a partir das FRFs de cada uma das duas sub-estruturas. As FRFs da estrutura composta, expressas em função de parâmetros físicos e/ou geométricos do ADV, são empregadas para definir índices de desempenho relacionados com os níveis da resposta harmônica dentro de uma banda de frequência pré-definida.

Os parâmetros ótimos do ADV são então obtidos através da minimização destes índices, empregando como ferramenta de otimização os Algoritmos Genéticos.

Uma característica importante da metodologia proposta é a de que ela permite operar com FRFs experimentais da estrutura primária, evitando assim o emprego de modelos analíticos que podem ser imprecisos, notadamente no caso de configurações estruturais complexas. Contudo, as incertezas proporcionadas pela presença de ruídos experimentais devem ser convenientemente considerados. Um estudo incluindo o emprego de FRFs experimentais é apresentado por Rade & Steffen (1999).

No que segue, apresenta-se a formulação pertinente à técnica de acoplamento de sub-estruturas baseada em FRFs, seguida da definição dos índices de desempenho e uma breve revisão sobre os Algoritmos Genéticos. Então, um exemplo numérico baseado em simulação por elementos finitos é apresentado com o objetivo de evidenciar as principais características da metodologia proposta.

## 2. TÉCNICA DE ACOPLAMENTO DE SUB-ESTRUTURAS BASEADA EM FRFs

Nesta seção é apresentada a formulação de uma técnica de acoplamento de sub-estruturas baseada em FRFs. Esta formulação, originalmente proposta por Crowley *et al.* (1984), foi recentemente adaptada por Rade & Steffen (1999) ao problema de otimização de parâmetros de ADVs de 1 GDL.

Dadas as FRFs das duas sub-estruturas A e B, mostradas na Figura 1, deseja-se determinar as FRFs da estrutura acoplada C, resultante da conexão das sub-estruturas através de um conjunto de coordenadas de conexão. Para cada configuração, as equações para a flexibilidade dinâmica são dadas por:

$$\{X_A(\omega)\} = [H_A(\omega)]\{F_A\} \quad (1)$$

$$\{X_B(\omega)\} = [H_B(\omega)]\{F_B\} \quad (2)$$

$$\{X_C(\omega)\} = [H_C(\omega)]\{F_C\}, \quad (3)$$

onde,  $\{X_A\}$ ,  $\{X_B\}$  e  $\{X_C\}$  representam os vetores das amplitudes das respostas harmônicas,  $\{F_A\}$ ,  $\{F_B\}$  e  $\{F_C\}$  são os vetores das forças de excitação e  $[H_A(\Omega)]$ ,  $[H_B(\Omega)]$  e  $[H_C(\Omega)]$  são as matrizes de flexibilidade dinâmica de A, B e C respectivamente.

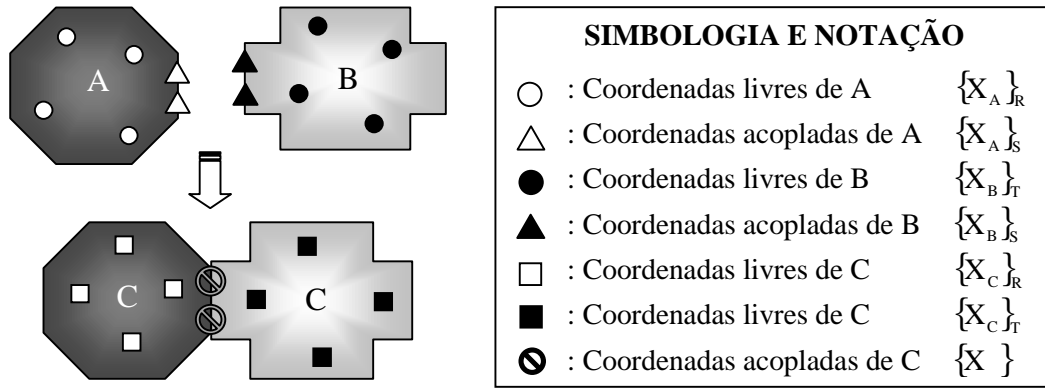


Figura 1. Acoplamento de sub-estruturas.

Utilizando o particionamento de coordenadas mostrado na Figura 1, as equações (1) a (3) são re-escritas como segue (para simplificação, a dependência da frequência é omitida):

$$\begin{Bmatrix} \{X_A\}_R \\ \{X_A\}_S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_A]_{RR} & [H_A]_{RS} \\ [H_A]_{SR} & [H_A]_{SS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{F_A\}_R \\ \{F_A\}_S \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} \{X_B\}_S \\ \{X_B\}_T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_B]_{SS} & [H_B]_{ST} \\ [H_B]_{TS} & [H_B]_{TT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{F_B\}_S \\ \{F_B\}_T \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} \{X_C\}_R \\ \{X_C\}_S \\ \{X_C\}_T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_C]_{RR} & [H_C]_{RS} & [H_C]_{RT} \\ [H_C]_{SR} & [H_C]_{SS} & [H_C]_{ST} \\ [H_C]_{TR} & [H_C]_{TS} & [H_C]_{TT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{F_C\}_R \\ \{F_C\}_S \\ \{F_C\}_T \end{Bmatrix} \quad (6)$$

O acoplamento das duas sub-estruturas é garantido impondo o equilíbrio de forças e a compatibilidade dos deslocamentos nas coordenadas de conexão:

$$\{X_A\}_S = \{X_B\}_S = \{X_C\}_S \quad (7)$$

$$\{F_A\}_S + \{F_B\}_S = \{F_C\}_S \quad (8)$$

Introduzindo as equações (7) e (8) nas equações (4) a (6), após algumas manipulações algébricas, obtém-se o seguinte conjunto de equações:

$$[H_C]_{RR} = [H_A]_{RR} - [H_A]_{RS} ([H_A]_{SS} + [H_B]_{SS})^{-1} [H_A]_{SR} \quad (9)$$

$$[H_C]_{RS} = [H_C]_{SR}^T = [H_A]_{RS} ([H_A]_{SS} + [H_B]_{SS})^{-1} [H_B]_{SS} \quad (10)$$

$$[H_C]_{RT} = [H_C]_{TR}^T = [H_A]_{RS} ([H_A]_{SS} + [H_B]_{SS})^{-1} [H_B]_{ST} \quad (11)$$

$$[H_C]_{SS} = [H_A]_{SS} ([H_A]_{SS} + [H_B]_{SS})^{-1} [H_B]_{SS} \quad (12)$$

$$[H_C]_{ST} = [H_C]_{TS}^T = [H_A]_{RS} ([H_A]_{SS} + [H_B]_{SS})^{-1} [H_B]_{ST} \quad (13)$$

$$[H_C]_{TT} = [H_B]_{TT} - [H_B]_{TS} ([H_A]_{SS} + [H_B]_{SS})^{-1} [H_B]_{ST} \quad (14)$$

No contexto do problema aqui examinado, a sub-estrutura A pode ser considerada como a estrutura primária e a sub-estrutura B como sendo o ADV, de modo que a estrutura C representa a estrutura acoplada (primária + ADV).

### 3. PROJETO ÓTIMO DE ADVs EM UMA DADA BANDA DE FREQUÊNCIA

#### 3.1. Índices de desempenho

Foi mostrado na seção anterior, como as FRFs da estrutura acoplada podem ser expressas em termos das FRFs da estrutura primária e do ADV. Uma vez definida a banda de frequência de interesse e as coordenadas onde as vibrações serão atenuadas, estas FRFs podem ser usadas para construir índices de desempenho, relacionados com os níveis de vibração do sistema acoplado dentro da banda de frequência de interesse. Assim, estes índices são otimizados objetivando a determinação dos parâmetros ótimos do ADV. Assumindo que o ADV seja representado por um modelo matemático (do tipo elementos finitos), as variáveis de projeto são definidas como sendo os parâmetros físicos e/ou geométricos do modelo. Cabe salientar que restrições de projeto podem ser impostas aos valores destas variáveis.

Para ilustração, considere um caso onde uma força harmônica  $F_i$  é aplicada na coordenada  $i$ , devendo a resposta na coordenada  $j$  ser minimizada sobre uma banda de frequência  $\omega_L \leq \omega \leq \omega_U$ , através da conexão de um ADV em uma das coordenadas. Para esta situação, alguns índices de desempenho podem ser definidos:

$$J_1(\{P\}) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p Q_k \text{abs}[H_{ij}(\omega_k, \{P\})] \quad (15)$$

$$J_2(\{P\}) = \max\{\text{abs}[H_{ij}(\omega_j, \{P\})]\} \quad (16)$$

onde  $p$  é o numero de linhas de frequência na banda de interesse,  $\{P\}$  designa o vetor das variáveis de projeto e  $Q_j, j=1$  to  $p$  representa fatores de ponderação atribuídos a cada linha de frequência.

Diferentes procedimentos de otimização podem ser utilizados para a otimização dos índices de desempenho. Neste trabalho serão utilizados os Algoritmos Genéticos (Goldberg,1989), devido à sua reconhecida robustez em relação à existência de mínimos locais, em comparação com os algoritmos tradicionais de otimização (Silva,1999). Uma síntese dos princípios fundamentais dos AGs é apresentada na seção seguinte.

#### 3.2. Uma Introdução aos Algoritmos Genéticos

Os AGs são um conjunto de procedimentos computacionais de busca e otimização, baseados na genética dos organismos biológicos. Os AGs foram inventados por Holland na década de 60 e um estudo abrangente sobre o tema foi realizado por Goldberg (1989).

Os AGs operam sobre uma população de indivíduos, geralmente representados por cadeias binárias, gerada aleatoriamente sobre o espaço de busca, onde cada indivíduo representa uma possível solução do problema. A cada indivíduo, é atribuído um índice de aptidão, quantificado pelo valor da função objetivo a ele associado. No processo de evolução da população, é dada uma maior probabilidade de reprodução aos indivíduos mais bem

adaptados. A evolução é feita através de três operadores fundamentais, realizados de forma aleatória (Goldberg, 1989):

- *seleção*: escolha dos indivíduos para reprodução, em quantidades proporcionais ao seu índice de aptidão.
- *cruzamento*: troca de material genético entre indivíduos da população.
- *mutação*: modificação do conteúdo genético da população.

A principal característica dos AGs é a de que eles operam simultaneamente com um amplo conjunto de pontos do espaço de busca, e não com um único ponto, como é o caso dos métodos convencionais de otimização. Além disso, a aplicabilidade dos AGs não é limitada pela necessidade de computar os gradientes e pela existência de descontinuidades na função objetivo, uma vez que são requeridos apenas os valores desta função, avaliados para cada indivíduo da população. É reconhecido, contudo, que os AGs requerem, em geral, maior esforço computacional que os métodos tradicionais de otimização.

#### 4. EXEMPLO NUMÉRICO

Afim de ilustrar o método proposto, é apresentado um exemplo de simulação numérica utilizando estruturas simuladas por elementos finitos.

A estrutura primária, ilustrada na Figura 2, consiste de uma viga bidimensional simplesmente apoiada, cujo modelo de EF é constituído de 30 elementos de viga de Euler-Bernoulli, cada um contendo 2 nós e 3 GDL por nó, perfazendo um total de 93 graus de liberdade. As características físicas e geométricas deste sistema são dadas pela Tabela 1. Os valores das 6 primeiras freqüências naturais são fornecidos na Tabela 2.

Admitindo uma única força excitadora aplicada segundo a direção transversal no nó A, pretende-se atenuar simultaneamente as respostas vibratórias de translação (direção  $y$ ) e de rotação (direção  $\theta$ ) da estrutura primária neste mesmo nó, mediante o acoplamento do ADV tipo viga (BCD), o qual é constituído de 20 elementos bidimensionais de viga de Euler-Bernoulli. As características físicas e geométricas do ADV são dadas na Figura 3 e na Tabela 3. É importante ressaltar que a conexão das duas sub-estruturas no ponto A é feita através das duas coordenadas segundo as quais deseja-se atenuar a vibração.

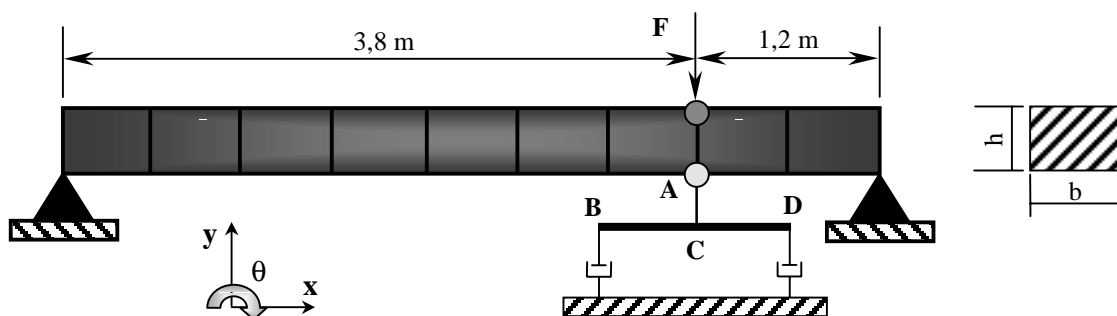


Figura 2. Características do sistema acoplado.

Tabela 1. Características físicas e geométricas do modelo de EF da estrutura primária.

Propriedade	Valor
densidade	2700 kg/m <sup>3</sup>
módulo de Young	7,0×10 <sup>10</sup> N/m <sup>2</sup>
área da seção transversal (b x h)	5,0 cm × 15,0 cm
massa total (m <sub>A</sub> )	101,25 kg

Tabela 2. Valores de algumas frequências naturais da estrutura primária.

Modo	Frequência [Hz]	Modo	Frequência [Hz]
1	1,85	4	32,60
2	8,00	5	51,25
3	18,55	6	73,75

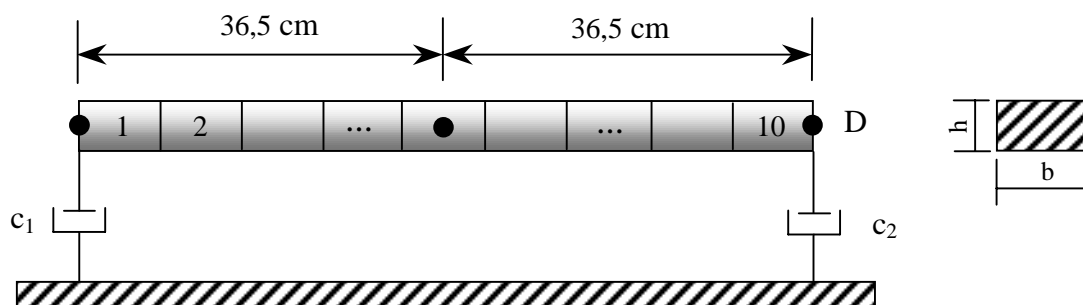


Figura 3 – Características do modelo de EF do ADV dividido em 10 macro-elementos.

Tabela 3. Características físicas e geométricas do modelo inicial do ADV.

Propriedades	Valor
densidade	$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$
módulo de Young	$E = 2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
seção transversal (b×h)	36,6 mm × 11,4 mm
coeficientes de amortecimento viscoso	$c_1 = 10 \text{ Ns/m}$ ; $c_2 = 10 \text{ Ns/m}$
massa total ( $m_B$ )	$m_B = 2,54 \text{ kg}$

Para o projeto ótimo do ADV, adota-se a seguinte estratégia: cada par de elementos vizinhos do ADV são agrupados em um único macro-elemento. Estes macro-elementos são numerados a partir do lado esquerdo do ADV como mostrado na Figura 3. A cada macro-elemento é designada uma variável de projeto  $\alpha_i^h$ ,  $i = 1$  a 10, que são fatores adimensionais multiplicativos que modificam as alturas das seções transversais dos respectivos macro-elementos. Assim, estas variáveis traduzem modificações da inércia e da rigidez à flexão dos macro-elementos. Definem-se também as variáveis  $\alpha_i^c$ ,  $i = 1$  a 2, como sendo fatores modificadores dos coeficientes de amortecimento viscoso do ADV. Tem-se, neste exemplo, um total de 12 variáveis de projeto.

As principais características dos procedimentos de otimização são:

- **banda de frequência:**  $[47 - 56 \text{ Hz}]$ , contendo a quinta frequência natural da estrutura primária.
- **restrições de projeto:**
  - $0,5 \leq \alpha_i^h \leq 9$ ,  $i = 1$  a 10
  - $0,5 \leq \alpha_i^c \leq 9$ ,  $i = 1$  a 2
  - $m_B \leq 10\%$  de  $m_A$
- **índice de desempenho:**  $J = \max\{20 \log_{10}(\text{abs}[H_{yy}^A(\omega)]/1 \times 10^{-6})\} + \max\{20 \log_{10}(\text{abs}[H_{y0}^A(\omega)]/1 \times 10^{-6})\}$

• **Algoritmos Genéticos:**

- *tamanho da população: 50*
- *probabilidade de mutação: 1%*
- *probabilidade de cruzamento: 90%*
- *número máximo de gerações: 30*

Na expressão do índice de desempenho definidas acima,  $H_{yy}^A(\omega)$  e  $H_{y\theta}^A(\omega)$  designam, respectivamente, a FRFs pontual e cruzada relacionando as coordenadas de translação e de rotação no ponto A do sistema acoplado.

Os valores ótimos das variáveis de projeto estão dispostos na Tabela 4. Na Figura 4 são confrontadas as amplitudes das FRF de interesse, antes e após o acoplamento do ADV, sendo destacada a banda de frequência adotada na otimização. Como pode ser observado, dentro desta banda, foi obtida substancial redução dos níveis de vibração em ambas direções, com a remoção dos picos de ressonância.

Tabela 4. Valores ótimos das variáveis de projeto.

Variável	Valor	Variável	Valor
$\alpha_1^h$	4,15	$\alpha_7^h$	1,20
$\alpha_2^h$	8,50	$\alpha_8^h$	4,45
$\alpha_3^h$	8,65	$\alpha_9^h$	6,55
$\alpha_4^h$	1,15	$\alpha_{10}^h$	6,70
$\alpha_5^h$	1,90	$\alpha_1^c$	6,30
$\alpha_6^h$	1,80	$\alpha_2^c$	2,80

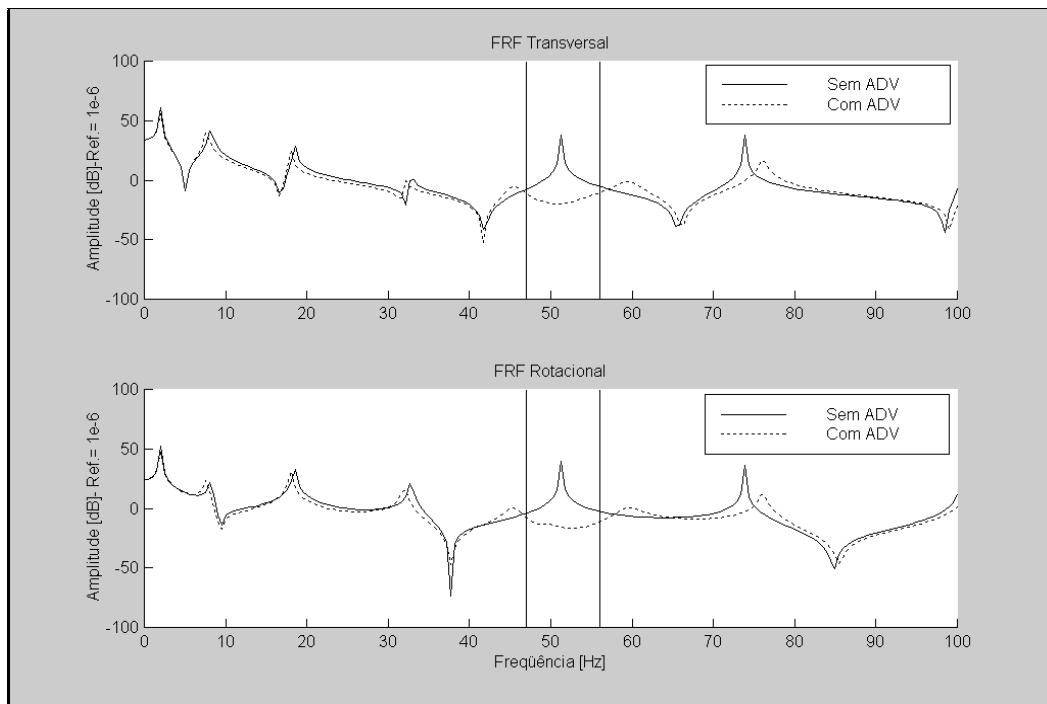


Figura 4. FRFs  $H_{AA}^{yy}(\omega)$  e  $H_{AA}^{y\theta}(\omega)$  antes e após o acoplamento do ADV.

## 5. CONCLUSÕES

Foi mostrada uma metodologia de projeto ótimo de absorvedores dinâmicos de vibrações constituídos por estruturas contínuas para a atenuação simultânea de vibrações de translação e rotação em sistemas bidimensionais.

Embora o estudo tenha sido limitado a ADVs do tipo viga, devido à sua facilidade de projeto e realização física, a metodologia pode ser facilmente estendida a outros tipos de elementos estruturais, tais como placas.

Os primeiros testes numéricos levam a concluir que o método é eficiente, permitindo tratar, numa abordagem bem geral, o problema de otimização de ADVs, contemplando a conexão através de uma ou várias coordenadas, além de diferentes tipos de amortecimento. Além disso, o método pode operar tanto com FRFs provenientes de modelos analíticos quanto FRFs obtidas experimentalmente. Neste segundo caso, evitam-se os erros de modelagem, embora deva-se tratar o problema de ruído presente nas FRFs experimentais.

A avaliação dos índices de desempenho requer pequeno esforço computacional, uma vez que as FRFs da estrutura primária são calculadas uma única vez e o cálculo das FRFs da estrutura acoplada requer a inversão de matrizes de pequena dimensão.

Os Algoritmos Genéticos se mostraram bastante eficientes e robustos, respondendo, contudo, pela maior parte do esforço computacional do método de projeto.

Como desenvolvimentos futuros, prevê-se a inclusão de material viscoelástico na estrutura do ADV e o projeto de ADVs para a atenuação simultânea em várias bandas de frequência descontínuas.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cunha Jr, S. S., 1999, “Estudo numérico e teórico de absorvedores dinâmicos de vibração”, dissertação de mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.
- Cunha Jr, S. S., Rade, D. A., “A Model Updating-Based Method for the Optimum Design of Beamlike Dynamic Vibration Absorbers, 15<sup>th</sup> Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Águas de Lindóia, SP, 1999.
- Frahm, H., 1911, “Device for Damping Vibrations of Bodies”, US Patent 989, 958.
- Freitas, F. L.; Espíndola, J. J., “Noise and Vibration Reduction with Beam-like Dynamic Neutralizers, 12<sup>th</sup> Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Brasília, DF, 1993.
- Goldberg, D. E., “Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning”, Reading, MA, Addison Wesley PUB. Co, 1989.
- Koronev, B. G., Reznikov, L. M., 1993, “Dynamic Vibration Absorbers. Theory and Technical Applications”. John Wiley & Sons.
- Rade, D. A. and Steffen Jr., V., 1999, “Optimization of Dynamic Vibration Absorbers Over a Frequency Band”, Proceedings of the 17<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, Kissimee, Fl, pp.188-193.
- Ram, Y. M., Elhay, S., 1996, “The theory of a Multi-Degree-of-Freedom Dynamic Absorber”, Journal of Sound and Vibration, vol. 195, n°4, pp. 607-615.
- Silva, L. A., 1999; “Estudo Avaliativo de Algoritmos Genéticos aplicados à Problemas de Identificação em Elastodinâmica”, Dissertação de Mestrado, UFU, Uberlândia, MG.
- Snowdon, J. C.; Nobile, M. A., “Beamlike Dynamic Vibration Absorbers”, Acoustic, vol. 44, pp. 98-108, 1980.
- Sun. J. Q.; Jolly, M. R.; Norris, M. A., “Passive, Adaptative and Active Tuned Vibration Absorbers – A Survey”, Transactions of the ASME, vol. 117, pp. 234-242, June 1995.