

FORMULAÇÃO GENÉRICA E VERIFICAÇÃO DE UM MÉTODO PARA SIMULAÇÃO E IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Natanael Victor de Oliveira

Universidade Federal da Paraíba, Departamento de Engenharia Mecânica, Centro de Ciência e Tecnologia, PRAI, UFPB, Campus-II
CEP 58109-970 Campina Grande, Brasil - E: mail:natanael@dem.ufpb.

Resumo. Procura-se, neste trabalho, desenvolver e apresentar uma formulação genérica para resolução de modelos matemáticos de sistemas mecânicos de finitos graus de liberdade. Em seguida, desenvolve-se, também, uma formulação matemática genérica para se verificar a eficiência do método de resolução que está associado ao processo inverso - problema de identificação de parâmetros. No método resolução do sistema de equações diferenciais para a obtenção dos sinais de deslocamentos no domínio do tempo - solução pseudo-exata, trabalha-se a priori com a versão dos sinais de deslocamentos no domínio complexo. Por este método, o suficiente é montar as matrizes de massa, rigidez e amortecimento, não havendo restrição com relação à matriz de massa, que poderá ser cheia, o que ocorre quando do modelamento via elementos finitos. Os resultados de simulação e verificação, através do problema inverso, mostraram-se potencialmente satisfatórios.

Palavras-Chave: Formulação, Genérica, Simulação, Identificação, Pseudo-exata

1. INTRODUÇÃO.

A análise e simulação prévia do comportamento dinâmico de sistemas e estruturas em geral, na engenharia, constituem-se num processo ou procedimento inevitável, como meio de monitorar a eficiência antecipada de aproximação do comportamento global de sistemas mecânicos e/ou de estruturas reais. Como exemplos clássicos, podemos citar estudos científicos no trato de pesquisas na área espacial, onde a análise prévia do comportamento de naves espaciais, lançamento de mísseis terra-ar, lançamento de satélites para observação da terra, visando o seu controle e monitoramento, são uma realidade. Mais especificamente, na engenharia mecânica, principalmente em simulação de sistema mecânicos, onde procura-se abordar o monitoramento, análise, processamento de sinais e controle de vibrações, controle de trajetórias de robôs manipuladores, identificação de parâmetros, modelamento de rotores de usinas hidroelétricas - dinâmica de rotores e estruturas em geral. As equações do movimento de sistemas mecânicos com finitos graus de liberdade podem ser resolvidas no domínio do tempo por métodos de aceleração generalizada tais como; Diferença Central, Houbolt, Wilson θ , Newmark; Runge-Kutta de 4^a e 5^a ordem, entre outros, pela transformação do sistema de equações diferenciais na forma de estado. A escolha do método que melhor se adapta ao processo de simulação, para testar métodos de identificação de parâmetros, depende essencialmente de fatores, como por exemplo, escolha do passo de integração, problemas de

instabilidade numérica inerentes ao método a ser escolhido, introdução de amortecimento fictício no sistema, etc. Estes fatores apresentam efeitos cruciais no processo de simulação do sistema e, em particular, no processo de identificação de parâmetros (Mariano & Oliveira, 1997). Neste trabalho procura-se desenvolver um método genérico, como alternativa, para simulação e identificação de sistemas mecânicos. Em seguida verifica-se o método de solução através do problema inverso.

2. FORMULAÇÃO GENÉRICA PARA O PROCESSO DE SIMULAÇÃO.

A formulação genérica para o processo de simulação de um sistema de vários graus de liberdade pode ser dada pelo sistema de equações diferenciais na forma matricial da equação eq.(1), (Meirovitch, 1975).

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (1)$$

onde $[M]$, $[C]$ e $[K]$ representam as matrizes de massa, amortecimento e rigidez respectivamente; $\{F\}$ é o vetor força de excitação; $\{x\}$, $\{\dot{x}\}$ e $\{\ddot{x}\}$ são os vetores deslocamento, velocidade e aceleração do sistema, respectivamente.

Supondo o vetor força de excitação modelado na forma,

$$F(t) = Re \left[\sum_{n=1}^{\infty} F_{\alpha} e^{i\omega t} \right] \quad (2)$$

onde $\{F_{\alpha}\}$ são as amplitudes do vetor força de excitação, que poderá assumir valores constantes ou uma série temporal modelada a partir de sínteses de sinais periódicos, ou, se num processo estocástico, uma série de números pseudo-aleatórios, etc (...).

A solução do sistema de equações diferenciais em regime permanente da eq.(1), é da forma,

$$x(t) = Re \left[\sum_{n=1}^{\infty} X(\omega) e^{i(\omega t)} \right] \quad (3)$$

onde $X(\omega)$ são amplitudes complexas do vetor solução.

A forma do vetor solução da eq.(3), em se tratando de um sistema não conservativo, caso geral e genérico, pode ser dado na forma da eq.(4),

$$x(t) = Re \left[\sum_{n=1}^{\infty} |X(\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} \right] \quad (4)$$

As derivadas sucessivas da eq.(3), no sistema de equações diferenciais em (1), conduz a um sistema de equações lineares no domínio complexo na forma da eq. (5),

$$[[K] - \omega^2 [M] + i\omega [C]]\{X(\omega)\} = \{F_{\alpha}\} \quad (5)$$

A solução do sistema de equações lineares no domínio complexo da eq.(5), é obtida para cada componente em frequências discretas do vetor força de excitação. A formulação genérica, vetor solução do sistema de equações diferenciais em forma matricial da eq.(1), sendo dadas pelo grupo de equações (6) e (7) na forma,

$$[[K] - \omega^2 [M] + i\omega [C]]_{m \times m} \{X(\omega)\}_{m \times 1} = \{F_{\alpha m}\}_{m \times 1} \quad (6)$$

$$x_m(t) = R_e \left[\sum_{n=1}^{\infty} |X_m(\omega)| e^{i(\omega t - \phi_m)} \right] \quad (7)$$

onde $m = 1(1)f$; f o número de graus de liberdade; ϕ_m os ângulos de fase entre os vetores força de excitação e respostas; ω a frequência do vetor força de excitação. Ao conjunto de equações dadas pelas expressões (6) e (7), passamos a denominar de solução pseudo-exata,

3. FORMULAÇÃO GÊNÉRICA PARA O PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.

A formulação genérica para o processo de identificação de parâmetros de um sistema de n graus de liberdade, massa, mola, amortecedor viscoso, utilizando-se os coeficientes de Euler-Fourier da excitação (força) e respostas (deslocamentos), pode ser dado pelo sistema de equações lineares na forma da eq.(8).

$$\begin{bmatrix} [n\omega_o x^s]_{N \times f} & [n\omega_o x^c]_{N \times f} \\ [-n\omega_o x^c]_{N \times f} & [n\omega_o x^s]_{N \times f} \end{bmatrix}_{2N \times 2f} \times \begin{bmatrix} [C]^t \\ [K]^t \end{bmatrix}_{2 \times 2f} = \begin{bmatrix} F^c_{nm} + (n\omega_o)^2 Mx^c_{nm} \\ F^s_{nm} + (n\omega_o)^2 Mx^s_{nm} \end{bmatrix}_{2N \times f} \quad (8)$$

A equação (8), em notação compacta, pode ser representada pelo sistema de equações lineares na forma $A\phi = b$, onde: $A =$ Matriz retangular $2N \times 2f$ contendo as componentes reais e imaginárias dos deslocamentos; $\phi =$ Matriz retangular $2 \times 2f$ contendo os coeficientes de rigidez e amortecimento a serem estimados, e, portanto, desconhecida; $b =$ Matriz retangular de ordem $2N \times f$ contendo os coeficientes de Euler-Fourier das forças de inércia e das forças aplicadas (excitação), s e c parte imaginária e real dos coeficientes de Euler-Fourier, $m = 1(1)f$, $n = 1(1)N$ onde f é o número de graus de liberdade do sistema, N o número de pontos em frequência pelo qual se deseja amostrar os sinais de deslocamento, forças de inércia e forças de excitação; ω_o , a frequência fundamental do vetor força de excitação a ser gerado e que é obtida a partir de um critério, (Oliveira, 1997).

O estimador por mínimos quadrados dos parâmetros desconhecidos de ϕ fornece $\hat{\phi}_{MQ} = [A^T A]^{-1} A^T b$, que é a equação para o processo de identificação. Maiores considerações e discussões em (Pederiva, 1983), e, mais recentemente, (Mariano & Oliveira, 1997), no qual se procura identificar o sistema, utilizando-se vários tipos de integradores.

4. MODELO FÍSICO E MATEMÁTICO.

Para testar e analisar o método de simulação e identificação, procurou-se utilizar o modelo de um sistema físico, figura 1, com o cálculo dos respectivos autovalores, dados na tabela 1.

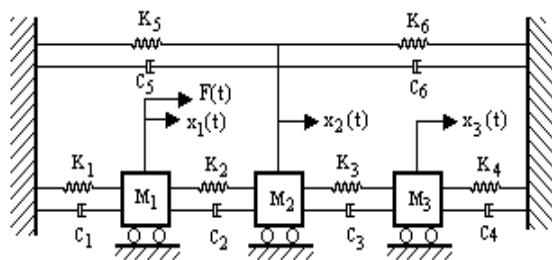


Figura 1 – Configuração do modelo físico

Tabela 1. Cálculo dos autovalores

$\lambda_{1,2}$	$-3.15 \pm 177.20i$
$\lambda_{3,4}$	$-6.30 \pm 259.08i$
$\lambda_{5,6}$	$6.56 \pm 418.74i$

Os elementos das matrizes de massa, amortecimento e rigidez da eq.(1), utilizando-se o modelamento a partir da equação de Lagrange, são dados respectivamente por:

$$M_{11} = M_1, M_{22} = M_2, M_{33} = M_3$$

$$C_{11} = (C_1 + C_2); C_{12} = -C_{21}; C_{13} = -C_{31}; C_{22} = (C_2 + C_3 + C_5 + C_6); C_{23} = C_{32} = -C_3; C_{33} = (C_3 + C_4)$$

$$K_{11} = (K_1 + K_2); K_{12} = -K_{21}; K_{13} = -K_{31}; K_{22} = (K_2 + K_3 + K_5 + K_6); K_{23} = K_{32} = -K_3; K_{33} = (K_3 + K_4)$$

5. MÉTODO PARA SIMULAÇÃO E IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS.

Na figura 2, apresenta-se uma sequência para verificação do método de resolução,

PROCEDIMENTOS PARA VERIFICAÇÃO DA SIMULAÇÃO E IDENTIFICAÇÃO

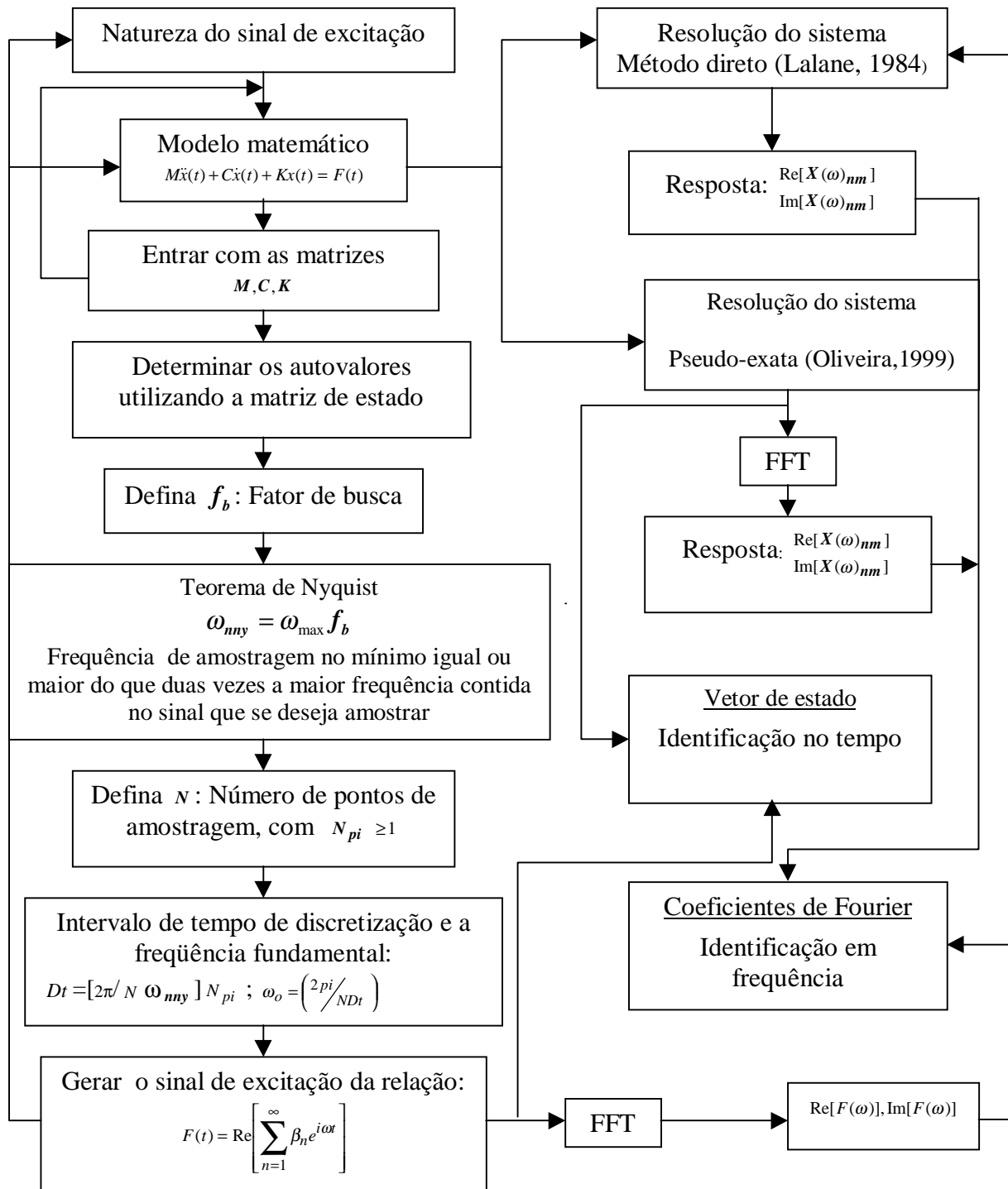


Figura 2 - Sequência para simulação e identificação

onde: **1.** Calculam-se os autovalores do sistema. **2.** Identifica-se a maior frequência, se natural ou amortecida, e fá-la igual a $\omega_{máx}$. **3.** Define-se um número fixo para $f_b \geq 2$. **4.** Define-se o número de amostras N , que se deseja representar o sinal, e, em seguida, define-se inicialmente ($N_{Pi} = N/2$). **5.** Determina-se o intervalo de tempo de discretização a partir da relação dada por ($Dt = [2\pi / (N\omega_{máx} f_b)] / N_{Pi}$). **6.** Determina-se a frequência fundamental a partir da relação dada por ($\omega_o = 2\pi / NDt$). **7.** Gera-se o sinal de excitação utilizando-se a frequência fundamental calculada no item 6. Maiores discussões em (Oliveira, 1997).

6. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO.

Para exemplificar, a título de ilustração e manipulação das equações (6), (7), procura-se excitar o sistema num primeiro momento na massa M_1 . Como a matriz de massa é diagonal, as equações para o processo de simulação são dadas na forma das eqs.(9) e (10).

$$\begin{bmatrix} [(K_{11} - M_{11}\omega^2) + i\omega C_{11}] & (K_{12} + i\omega C_{12}) & (K_{13} + i\omega C_{13}) \\ & [(K_{22} - M_{22}\omega^2) + i\omega C_{22}] & (K_{23} + i\omega C_{23}) \\ & & [K_{33} - M_{33}\omega^2 + i\omega C_{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \\ X_3(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_n \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$x_1(t) = Re \left[\sum_{n=1}^{\infty} |X_1(\omega)| e^{i(\omega t - \phi_1)} \right]; x_2(t) = Re \left[\sum_{n=1}^{\infty} |X_2(\omega)| e^{i(\omega t - \phi_2)} \right]; x_3(t) = Re \left[\sum_{n=1}^{\infty} |X_3(\omega)| e^{i(\omega t - \phi_3)} \right] \quad (10)$$

Os vetores $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ e $X_3(\omega)$, são obtidos diretamente a partir dos sistema de equações lineares no domínio complexo da Eq. (9), com a excitação (força) agindo na massa M_1 , onde ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 na eq. (10) são os ângulos de fase entre a excitação(força) e respostas (deslocamentos) e $F_{\alpha 1} = \beta_n$ se constituindo numa série temporal com o vetor força de excitação, obtido a partir de síntese de sinais periódicos (Shroeder, 1970), com $\omega = n\omega_o$ e $n = 1(1)N$, a frequência fundamental para gerar a excitação. A formulação apresentada pelo grupo de eqs. (9) e (10), passamos a denominar de solução pseudo-exata, e se constitui numa forma alternativa para simular sistemas mecânicos no domínio do tempo e em frequência sem precisar, necessariamente, de usar métodos de integração numérica.

Nas figuras 3 a 8, apresentam-se curvas de respostas em frequência e no tempo, na qual se tomam os sinais de deslocamentos nas massas M_1 , M_2 e M_3 .

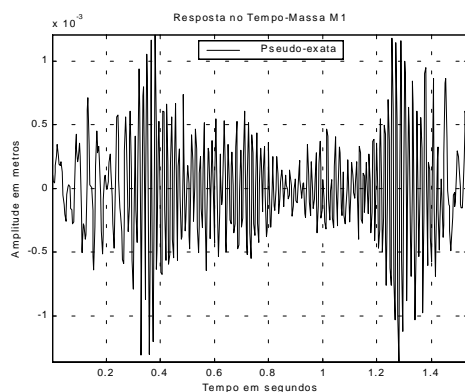


Figura 3 – Resposta em deslocamento em M1

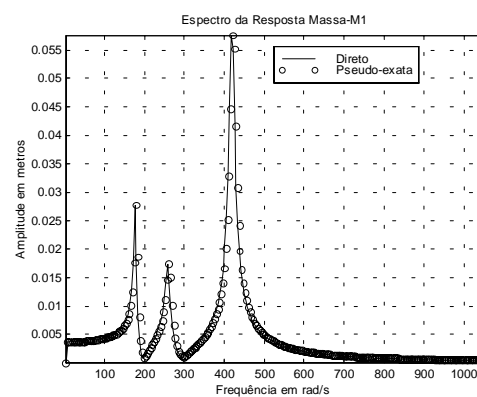


Figura 4 -Espectro da resposta em M1

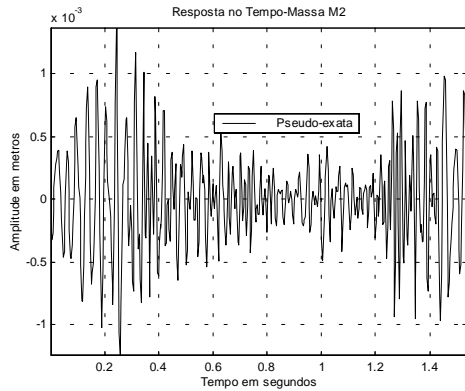


Figura 5 – Resposta em deslocamento em M2

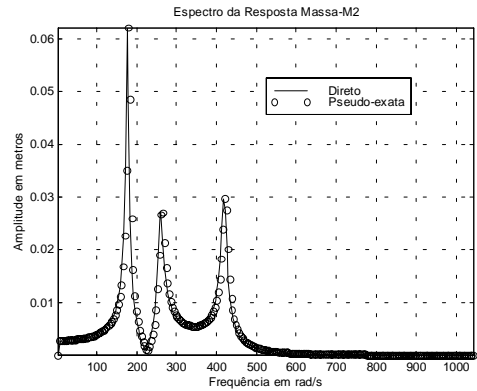


Figura 6 -Espectro da resposta em M2

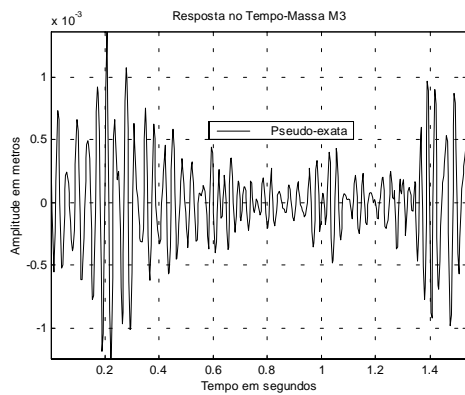


Figura 7 – Resposta em deslocamento em M3

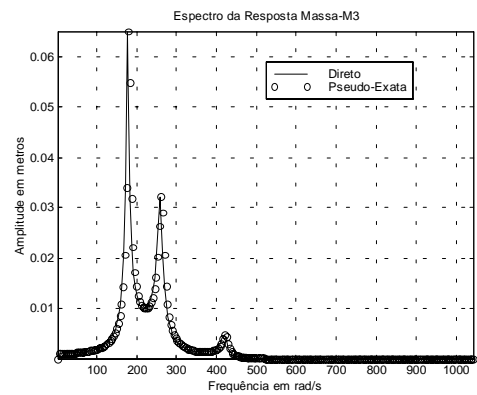


Figura 8 -Espectro da resposta em M3

Daí, para o fator de busca igual a 2.5, podem-se localizar as três frequências naturais amortecidas, referentes aos três picos de amplitudes máximas dos sinais de deslocamentos correspondentemente às oscilações das três massas no domínio da frequência, o que se encontra em sintonia com as componentes imaginárias dos autovalores calculados na tabela 1. Maiores discussões com relação a escolha do fator de busca, (Oliveira, 1999).

7. VERIFICAÇÃO DO MÉTODO DE SIMULAÇÃO E DISCUSSÕES

A verificação da consistência do método de simulação, utilizando-se o grupo de equações (9) e (10), passa sem perda de generalidades, pelo problema inverso, isto é, o problema de identificação de parâmetros. Como a matriz de massa é diagonal, as equações para o processo de identificação é dada na forma da eq.(11). Como se pode observar, para montagem daquele sistema de equações lineares, o suficiente é definir a ordem do modelo, isto é, o número de graus de liberdade do sistema, monitorar as coordenadas relacionadas a cada modo de vibração e resolver o sistema para os parâmetros que se deseja estimar e/ou identificar. A vantagem desta formulação é que não há restrição com relação à matriz de massa, que poderá ser cheia, o que ocorre, em geral, quando se modela o sistema via elementos finitos. Daí, a partir do conhecimento destas matrizes, a montagem e solução das equações 6, 7 e 8, serem imediatas.

$$\begin{bmatrix}
\omega_o x^s_{11} & \omega_o x^s_{12} & \omega_o x^s_{13} & \omega_o x^c_{11} & \omega_o x^c_{12} & \omega_o x^c_{13} \\
2\omega_o x^s_{21} & 2\omega_o x^s_{22} & 2\omega_o x^s_{23} & 2\omega_o x^c_{21} & 2\omega_o x^c_{22} & 2\omega_o x^c_{23} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
n\omega_o x^s_{n1} & n\omega_o x^s_{n2} & n\omega_o x^s_{n3} & n\omega_o x^c_{n1} & n\omega_o x^c_{n2} & n\omega_o x^c_{n3} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-\omega_o x^c_{11} & -\omega_o x^c_{12} & -\omega_o x^c_{13} & \omega_o x^s_{11} & \omega_o x^s_{12} & \omega_o x^s_{13} \\
-2\omega_o x^c_{21} & -2\omega_o x^c_{22} & -2\omega_o x^c_{23} & 2\omega_o x^s_{21} & 2\omega_o x^s_{22} & 2\omega_o x^s_{23} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-n\omega_o x^c_{n1} & -n\omega_o x^c_{n2} & -n\omega_o x^c_{n3} & n\omega_o x^s_{n1} & n\omega_o x^s_{n2} & n\omega_o x^s_{n3}
\end{bmatrix}_{2N \times 2f} \times \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \\ K_{11} & K_{21} & K_{31} \\ K_{12} & K_{22} & K_{32} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix}_{2 \times 3f} =$$

$$\begin{bmatrix}
F^c_{11} + (\omega_o)^2 M_{11} x^c_{11} & (\omega_o)^2 M_{22} x^c_{12} & (\omega_o)^2 M_{33} x^c_{13} \\
F^c_{21} + (2\omega_o)^2 M_{11} x^c_{21} & (2\omega_o)^2 M_{22} x^c_{22} & (2\omega_o)^2 M_{33} x^c_{23} \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
F^c_{n1} + (n\omega_o)^2 M_{11} x^c_{n1} & (n\omega_o)^2 M_{22} x^c_{n2} & (n\omega_o)^2 M_{33} x^c_{n3} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
F^s_{11} + (\omega_o)^2 M_{11} x^s_{11} & (\omega_o)^2 M_{22} x^s_{12} & (\omega_o)^2 M_{33} x^s_{13} \\
F^s_{21} + (2\omega_o)^2 M_{11} x^s_{21} & (2\omega_o)^2 M_{22} x^s_{22} & (2\omega_o)^2 M_{33} x^s_{23} \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
F^s_{n1} + (n\omega_o)^2 M_{11} x^s_{n1} & (n\omega_o)^2 M_{22} x^s_{n2} & (n\omega_o)^2 M_{33} x^s_{n3}
\end{bmatrix}_{2N \times f} \quad (11)$$

Se no processo de identificação dos parâmetros, a estimação for consistente, isto é, os erros nos coeficientes de rigidez e amortecimento forem muito próximos de zero, problema inverso, a solução do vetor resposta se aproxima do valor exato. Daí, ficam estabelecidos a potencialidade e validade do método de resolução proposto, como alternativa.

Na tabela 2, os resultados de identificação dos parâmetros dos elementos das matrizes de rigidez e amortecimento são com efeito todos consistentes, o que mostra a potencialidade do método. Os resultados de identificação de parâmetros apresentados, neste trabalho, vêm, de forma oportuna, validar ainda mais a formulação matemática para o processo de identificação no domínio da frequência para um sistema de dois graus de liberdade eixo-rotor-mancal-hidrodinâmico, inicialmente proposta por (Burrows & Sahinkay, 1982).

A generalização para sistemas com multi-graus-de-liberdade é apresentada na eq. (8), que poderá ser indistintamente utilizada, tanto para sistemas convencionais e/ou clássicos, como para sistemas dinâmicos rotativos-(dinâmica de rotores). Num procedimento experimental, o suficiente seria definir o modelo matemático do sistema, a ordem do modelo (número de graus de liberdade) e, concomitantemente, definir e/ou monitorar as coordenadas dos pontos de medição. Em seguida, utilizar a formulação genérica para o processo de identificação de parâmetros dada pela eq.(8). Uma outra formulação genérica para o processo de simulação e identificação das matrizes de rigidez e amortecimento estrutural, encontra-se em desenvolvimento.

Tabela 2. Coeficientes de rigidez e amortecimento identificados

Rigidez(N/m)	Teórica	Estimada	Erros em (%)
<i>K11</i>	75000	7,5000e+004	-3,8805e-014
<i>K12</i>	-25000	-2,5000e+004	1,4552e-014
<i>K13</i>	0	-8,6911e-013	Inf
<i>K21</i>	-25000	-2,5000e+004	2,4738e-013
<i>K22</i>	37000	3,7000e+004	-5,8994e-014
<i>K23</i>	-10000	-1,0000e+004	-7,2760e-014
<i>K31</i>	0	-4,4073e-011	Inf
<i>K32</i>	-10000	-1,0000e+004	1,8190e-014
<i>K33</i>	25000	2,5000e+004	-1,4552e-014
Amortecimento(N.s/m)	Teórico	Estimado	Erros em (%)
<i>C11</i>	4	4,0000	3,5527e-013
<i>C12</i>	-2	-2,0000	1,5543e-013
<i>C13</i>	0	-1,7773e-015	-1,7773e-015
<i>C21</i>	-2	-2,0000	-6,6613e-014
<i>C22</i>	8	8,0000	-1,7773e-015
<i>C23</i>	-2	-2,0000	-8,8818e-014
<i>C31</i>	0	-1,8829e-014	Inf
<i>C32</i>	-2	-2,0000	-6,2172e-013
<i>C33</i>	4	4,0000	-2,2204e-014

8. CONCLUSÃO.

Apresentou-se, neste trabalho, uma formulação genérica alternativa para simulação dinâmica de modelos físicos de sistemas mecânicos. A verificação e potencialidade do método de simulação proposto, que é verificado através do problema inverso, isto é, uma formulação genérica que trata do problema de identificação de parâmetros no domínio da frequência, é apresentada. Os resultados de simulação e verificação do método são mostrados, respectivamente, nas figuras de 3 a 8, e na tabela 2.

9. REFERÊNCIAS.

- Burrows, C. R. & Sahinkay, M. N., 1982, "Frequency domain estimation of linearized oil-film coefficients", Trans ASME, Lubrication. 210-215.
- Lalane, M., 1984, "Mechanical vibrations for engineers", New York.
- Oliveira, N.V., 1997, "The criterion conjunction utilizing the Nyquist theorem for the dynamics simulation of the mechanical systems". 14 th Brazilian Congress of Mechanical Engineering. Bauru-São Paulo-Brazil, Paper COB: 962-CD/ROM.
- Oliveira, N.V., 1999, "Analysis of the criterion in conjunction with the Nyquist Theorem for the parameters identification of the mechanical system", 14 th Brazilian Congress of Mechanical Engineering. Águas de Lindóia-São Paulo-Brazil, Paper AAADCJ CD/ROM.
- Shroeder, M. R., 1970, "Synthesis of low-peak factor signals and binary sequences low auto-correlation", IEEE, Transactions on Information and Theory.
- Mariano, V & Oliveira, N.V., 1997, "Numerical Valuation Integration Methods Applied to a External Perturbations Identification". 14 th Brazilian Congress of Mechanical Engineering. Bauru-São Paulo-Brazil. Paper COB: 964-CD/ROM.
- Pederiva, R., 1983, "Identificação de sistemas mecânicos no domínio do tempo: Alguns aspectos práticos". Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, SP.
- Meirovitch, L., 1975, "Elements of vibration analysis", Mc.Graw-Hill Kogakusha, Inc.