

## IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS DE PLACA

**Silmara Cassola**

**João Antonio Pereira**

**Amarildo Tabone Paschoalini**

UNESP- Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira- Departamento de Engenharia Mecânica  
Av. Brasil, 56 - 15.385.000 - Ilha Solteira, SP, Brasil, [silmara@dem.feis.unesp.br](mailto:silmara@dem.feis.unesp.br)

### **Resumo**

O estudo do comportamento dinâmico de estruturas de laje de concreto é tratado neste trabalho. Estruturas bastante leves e esbeltas estão cada vez mais presentes na construção civil, e são muito susceptíveis aos efeitos de vibrações causadas pelos próprios usuários. Neste caso, o isolamento é bastante complexo, e os níveis de vibrações devem ser controlados pelas próprias características da estrutura, o que torna o conhecimento das suas propriedades dinâmicas uma condição fundamental para o desenvolvimento de projetos que ofereçam não apenas segurança, mas também conforto aos usuários. Este trabalho descreve a proposta de aplicação de uma técnica de ajuste de modelo para o caso de placas.

**Palavras-chave:** Técnica de ajuste de modelo, Elementos finitos, Placas

### **1. INTRODUÇÃO**

O uso de técnicas de pós-tensionamento, de concretos de alta resistência e de técnicas elaboradas de análise estrutural, tem permitido a construção de lajes bastante esbeltas, e ainda atendendo às condições de resistência impostas pelas Normas Técnicas. No entanto, o uso de pisos mais esbeltos leva a uma preocupação imediata com os efeitos de vibrações, pois estas estruturas apresentam pouco amortecimento e frequências naturais baixas, e podem ser facilmente excitadas pelos próprios usuários. O isolamento é bastante complexo, uma vez que as pessoas são a fonte e os sensores da vibração. Neste caso, os níveis de vibrações devem ser controlados pelas próprias características da estrutura o que torna imprescindível o conhecimento dos seus parâmetros dinâmicos (frequências naturais, modos próprios, fator de amortecimento), visto que os efeitos de vibrações em construções tem um efeito psicológico muito acentuado nas pessoas. Quando exposto a vibrações, o ser humano apresenta reações subjetivas que vão desde a simples percepção e desconforto, até apreensão e dor (CEB nº209, 1991). De acordo com Stephenson et al. (1998), há um grande interesse no mundo inteiro no conhecimento da resposta de pisos ao impacto causado pelo uso cotidiano das pessoas, tal como um simples caminhar. Este assunto é particularmente relevante quando se consideram estruturas esbeltas, e as investigações buscam um maior entendimento do comportamento deste tipo de estrutura, e de que maneira suas

características de vibração podem ser relacionadas com o conforto humano, de forma a se evitar as frequências que podem causar desconforto, ainda que não seja necessariamente o tempo todo.

A elaboração de modelos analíticos de estruturas de pisos de lajes de concreto visa conhecer o seu comportamento dinâmico por meio da simulação de diferentes condições de operação e carregamento, sem que se tenha de construir um modelo real para cada condição, o qual é bastante oneroso e complexo. No entanto, a modelagem dinâmica de estruturas de engenharia civil por elementos finitos ainda requer cuidados especiais e várias hipóteses e simplificações, usualmente adotadas neste tipo de análise, podem levar a resultados muito discrepantes em relação às situações reais. Isto é, o modelo analítico pode não representar adequadamente a estrutura real. Portanto, existe a necessidade de se desenvolver modelos mais elaborados, e eventualmente validar o modelo de elementos finitos da estrutura a fim de se obter uma solução mais realística, principalmente quando se deseja definir um modelo de predição confiável e representativo (Cassola e Pereira, 1999). As técnicas de ajuste de modelo têm produzido resultados bastante satisfatórios nesta área.

O processo de ajuste de modelos busca corrigir as imperfeições do modelo analítico, obtido geralmente por elementos finitos, minimizando a diferença dos dados calculados com relação aos dados medidos no modelo real. O principal objetivo é definir um modelo analítico representativo e confiável do modelo experimental.

Este artigo descreve a implementação de um programa de ajuste de modelo utilizando Funções de Resposta em Frequência – FRF(s) - para a modelagem de estruturas do tipo placa. A modelagem por elementos finitos e análise modal experimental é usada neste caso para a definição de um modelo de predição representativo do modelo real para o caso de placas. Técnicas de correlação e comparação de modelos são utilizadas para identificar a discrepância entre os modelos e posteriormente, corrigir o modelo de elementos finitos com base nos dados experimentais.

A proposta é testada com dados simulados numericamente. A fim de definir uma condição mais próxima da condição real de teste, estes dados foram contaminados com ruído gaussiano, distribuição normal com média zero e variância unitária.

## 2. TÉCNICA DE AJUSTE DE MODELO

As técnicas de ajuste de modelo têm sido usadas para a obtenção de um modelo analítico o mais próximo possível do modelo experimental. Vários autores vêm trabalhando nesta área ao longo das últimas décadas. Wang et al (1997), Cantieni et al (1998), Reynolds et al (1998 a), Reynolds et al (1998 b), Papadimitriou et al (1998), Pavic et al (1999), são alguns dos estudos realizados abordando técnicas de ajuste de modelo nos problemas de vibração em engenharia civil.

A metodologia proposta envolve basicamente três etapas. Na primeira etapa, com base no sistema físico, como por exemplo a estrutura de uma laje, são derivados o modelo experimental, por meio da análise modal experimental (AME), e o modelo analítico, pelo método dos elementos finitos (MEF). Baseado nestes modelos são obtidos os parâmetros modais (frequências naturais, amortecimento modal e modos próprios) experimentais e os parâmetros modais analíticos, respectivamente, por meio do programa de ajuste de modelo **PRO**gram **Model** **U**pdating - **PROMU**. Numa segunda etapa, estes parâmetros são comparados com critérios, por meio de técnicas de correlação de parâmetros, pode-se verificar se os modelos são correlacionados ou não. Se os modelos são correlacionados, tem-se um modelo analítico representativo do sistema físico, e todo estudo efetuado por meio deste modelo apresentará

resultados compatíveis com a realidade. Por outro lado, se os modelos não são correlacionados, a utilização do modelo analítico para estudar o comportamento do sistema pode levar a resultados não realísticos. Neste caso, e como terceira etapa, o uso de técnicas de ajuste de modelo pode levar a uma melhor representação do modelo analítico, e consequentemente a resultados mais realísticos com relação ao comportamento do sistema. Para tal, assume-se que o modelo experimental é o correto e procede-se à correção dos parâmetros do modelo analítico com base nos dados experimentais. Dependendo da estratégia matemática utilizada na formulação do problema e do tipo de parâmetros utilizados no ajuste, os métodos são classificados em diferentes categorias (Mortershead and Friswell, 1993, Lin and Ewins, 1994, Natke et al, 1997, Friswell et al, 1998). Neste trabalho o problema de ajuste será formulado com base nas Funções de Resposta em Frequência - FRF(s) medidas (Larsson e Sas, 1992, Pereira, 1996), e as variáveis de ajuste podem ser selecionadas dentre os parâmetros físicos e/ou geométricos do modelo.

A discrepância entre os modelos é avaliada com base em um balanço de força e a diferença entre os dados analíticos e experimentais é descrita como uma função resíduo. O resíduo obtido neste caso é definido em função dos parâmetros do modelo analítico (matriz de rigidez dinâmica  $[Z^A(\{p\})]$ ) e dos dados experimentais (FRF(s)), conforme mostra esquematicamente a Expressão (1). Para uma perfeita correlação entre os modelos os valores de  $\{\Delta p\}$  são nulos, no entanto, em situações práticas isto não ocorre visto que os dados experimentais não estão perfeitamente correlacionados com os dados analíticos. A solução do problema é estimada neste caso por meio do cálculo da correção dos p-parâmetros do modelo que minimize a discrepância entre os modelos.

$$\{\varepsilon\} = \mathcal{E}([Z^A(p_1 + \Delta p_1, p_2 + \Delta p_2, \dots, p_m + \Delta p_m)] \{H^x(\omega_i)\}) \equiv \{0\} \quad (1)$$

A equação do balanço de força é definida pela diferença da força atuando no modelo experimental e a correspondente força necessária para produzir uma resposta do modelo analítico igual à resposta experimental. A Equação 2 mostra de forma simplificada, após a linearização com relação aos parâmetros de ajuste, o resíduo com relação aos parâmetros medidos e aos parâmetros calculados por elementos finitos (Larsson and Sas, 1992 e Pereira et al., 1994).

$$\{\varepsilon(\omega_k)\} = [Z_k(\{p_0\})] \{H_k\}_j + \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial [Z_k(\{p\})]}{\partial p_i} \Delta p_i \{H_k\}_j - \{1\}_j \quad (2)$$

Um conjunto de equações de ajuste é definido com base na seleção de n-pontos de frequência ( $\omega_i$ ) e a solução do problema consiste em encontrar  $m$  mudanças nos parâmetros analíticos que minimizam a diferença entre os modelos. Os p-parâmetros podem representar qualquer propriedade física ou geométrica do modelo, eles podem ser um parâmetro de um elemento, no caso dos elementos ajustados independentemente, ou um parâmetro de um grupo de elementos, quando alguns elementos são ajustados proporcionalmente.

Em geral, os critérios adotados para comparar os modelos levam a um conjunto de equações não lineares em relação aos parâmetros de ajuste selecionados  $\{p\}$ . Dependendo do tipo de parâmetros selecionados, a solução das equações torna-se muito complexa ou pode não existir. A linearização destas equações, para a maioria dos sistemas físicos, é uma suposição válida nas faixas de frequências de interesse para análises de vibração. Uma solução aproximada do

problema é obtida por meio da linearização da Expressão (2) nos p-parâmetros, conduzindo a um sistema de equações lineares, como mostra a Expressão (3):

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\Delta p\} - \{B\} \quad (3)$$

na qual os elementos da matriz sensibilidade  $[S]$  e do vetor diferença  $\{B\}$  são conhecidos. Eles são obtidos com base na matriz de rigidez dinâmica do modelo analítico e nas funções de resposta em frequência medidas na estrutura para n-pontos de frequência selecionados, ou seja, os  $\omega_{i's}$ . Os elementos do vetor  $\{\Delta p\}$  são incógnitas a serem estimadas. A solução do sistema de equações linearizadas fornece um modelo analítico corrigido. Se a discrepância entre os modelos não for ainda suficientemente pequena, o processo é iterativamente repetido.

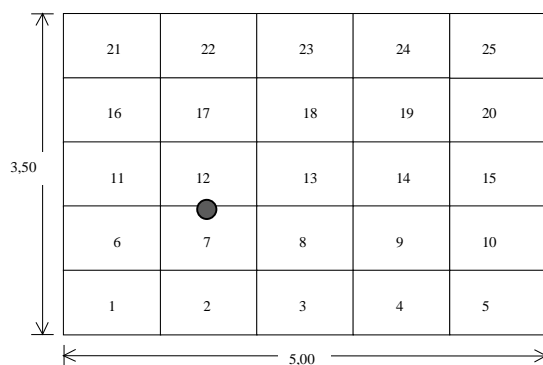
A seguir é discutida a aplicação da proposta para um exemplo simulado.

### 3. APLICAÇÃO DA PROPOSTA PARA A ESTRUTURA DE PLACA

O modelo analítico da placa foi gerado por programa computacional de elementos finitos para análise dinâmica implementado pelos autores. O programa considera elementos isoparamétricos, quadrilaterais, quadráticos da família Lagrangeana (9 nós) com integração numérica consistente, isto é, 3x3 (m=9) pontos de integração na superfície média, pois de acordo com Paschoalini (1995) o elemento da família Lagrangeana apresenta melhor desempenho do que o elemento da família Serendipity na análise dinâmica.

As dimensões laterais da placa estudada são 5.00 m x 3.50 m, e coincidem com as direções x e y respectivamente. O modelo é definido para uma malha 5x5 (25 elementos), 121 nós (5 gl(s) por nó), sendo 40 nós totalmente restringidos, ou seja, todos os lados estão engastados, e portanto a estrutura possui 405 graus de liberdade. Os dados de entrada são as dimensões da placa, suas propriedades geométricas (espessura) e as propriedades do material (módulo de elasticidade, coeficiente de poisson e densidade), condições de contorno e incidências nodais.

O modelo experimental, neste caso, é um modelo simulado e foi definido com base neste modelo inicial de elementos finitos introduzindo pequenas variações na espessura dos elementos, ou seja, a espessura varia entre 0.018 e 0.022 m, o que representa pequena irregularidade no piso. A Figura 1 mostra as dimensões da placa e a malha de elementos finitos.



**Figura 1:** Elementos da Placa

Os dados “experimentais” são obtidos assumindo que apenas um número reduzido de graus de liberdade e modos próprios são disponíveis no modelo experimental. Foram utilizadas apenas as FRF(s) relacionadas com os deslocamentos na direção z, isto representa considerar apenas

20% dos graus de liberdade do modelo analítico da estrutura. As FRF(s) são definidas numa faixa de frequência de 5 Hz a 26 Hz, para uma excitação aplicada na direção  $z$  (perpendicular à superfície da placa) como indicado. As FRF(s) foram contaminadas por ruído gaussiano a fim de definir uma condição mais próxima da condição real de teste.

O modelo analítico a ser comparado com o modelo “experimental” é definido considerando que todos os elementos possuem a mesma espessura, 0.020 m. E ainda, é introduzida uma variação significativa em uma propriedade da estrutura, que consiste no aumento em 45% da espessura do elemento 23. Isto acarreta um aumento nas frequências naturais do modelo analítico em relação ao modelo “experimental”, e diferenças nos modos próprios.

A fase de correlação dos dados pressupõe uma base de comparação compatível para os modelos, na qual os ngl(s) analíticos e “experimentais” devem ser geometricamente e numericamente correspondentes. Como os modelos são derivados do mesmo modelo inicial de elementos finitos, a compatibilidade geométrica (topologia) dos modelos é perfeita, e a diferença entre o número de graus de liberdade entre os modelos é corrigida por meio da redução do modelo analítico (método da redução dinâmica). Uma vez definida a compatibilidade dos modelos, as respostas e parâmetros modais são comparados visando definir a correlação dos mesmos.

A Tabela 1 e a Figura 2 mostram a discrepância entre os modelos. O primeiro e o terceiro modos apresentam as maiores diferenças de frequência. O primeiro modo apresenta uma grande diferença de frequência, 5.422%, mas o MAC-valor está acima de 98%, o que significa que o primeiro modo de vibrar os modelos não foram afetados significativamente. O contrário pode ser observado no quarto modo, o qual apresenta pequena diferença de frequência e o menor valor de MAC, 94.3%. Outras técnicas de comparação e correlação foram utilizadas, mostrando a discrepância entre os modelos, no entanto, em virtude das limitações de espaço, os resultados não são apresentados.

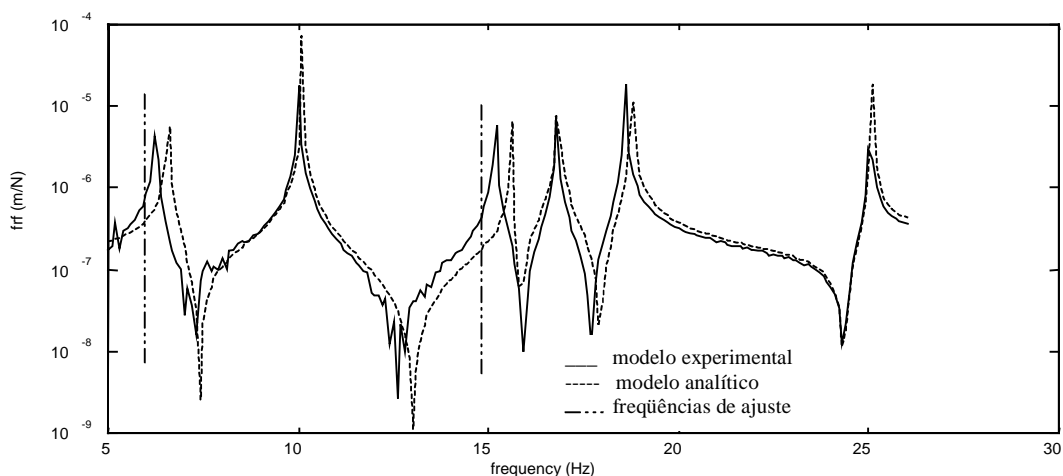
**Tabela 1** - Comparação das FRF(s) dos modelos “experimental” e analítico

Modo Exp.	Modo Ana.	F <sub>x</sub> (Hz)	F <sub>a</sub> (Hz)	Df (%)	MAC (%)
1	1	6.24	6.57	5.422	99.9
2	2	10.02	10.10	0.797	99.7
3	3	15.18	15.59	2.717	95.5
4	4	16.78	16.83	0.296	94.3
5	5	18.60	18.78	0.967	98.9
6	6	25.04	25.09	0.221	98.1

A Figura 2 mostra a superposição das FRF(s) (excitação no nó 48 na direção  $z$ , como indicado na Fig. 1, e resposta no nó 13 - centro do elemento 1, na direção  $z$ ) antes e depois do ajuste. A Figura mostra ainda o efeito do ruído introduzido nos dados experimentais. Como pode ser observado, a FRF “experimental” (traço contínuo) apresenta pequenas oscilações de amplitude, o que ocorre com frequência em medições. A seguir, passou-se para o processo de ajuste, visando corrigir a discrepância entre os modelos.

Para o processo de ajuste, foi escolhido o parâmetro espessura, para todos os elementos, pois este é um parâmetro bastante susceptível a erros de modelagem. As frequências de ajuste foram selecionadas graficamente, em regiões da curva de receptância medida próxima das frequências naturais, e abaixo dos valores desta (Fig. 2), o que evita variações bruscas de diferença entre as

receptâncias durante as iterações, que levariam a problemas numéricos durante o processo de ajuste.

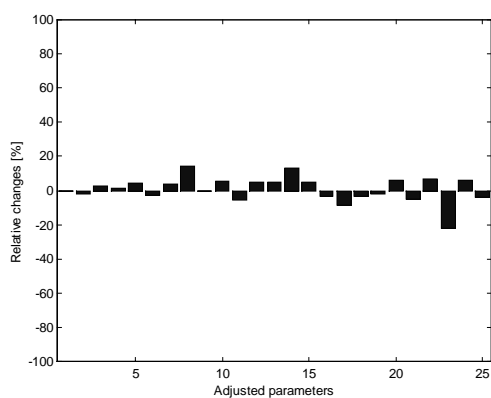


**Figura 2:** Superposição das FRF(s) medidas no centro do elemento 1

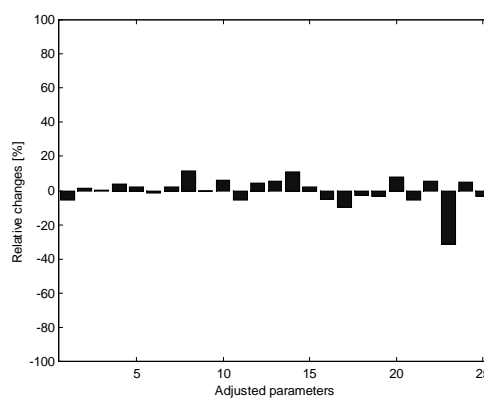
A Tabela 2 mostra os resultados da correlação entre o modelo analítico ajustado e o modelo “experimental”, e a Figura 3 mostra o gráfico da variação dos parâmetros corrigidos. Os valores das espessuras do modelo analítico, inicialmente igual a 0.020 sofrem aumento ou redução de 5% a 10%, ou seja, dentro da faixa de 0.018 a 0.022. O parâmetro com a perturbação significativa é claramente localizado e corretamente estimado após algumas iterações.

**Tabela 2** - Comparação das FRF(s) dos modelos “experimental” e analítico ajustado

Modo Exp.	Modo Ana.	Fx (Hz)	Fa (Hz)	Df (%)	MAC (%)
1	1	6.24	6.24	-0.002	100.0
2	2	10.02	10.03	0.155	100.0
3	3	15.18	15.18	0.005	99.8
4	4	16.78	16.79	0.071	100.0
5	5	18.60	18.60	0.003	99.8
6	6	25.04	25.05	0.048	99.8



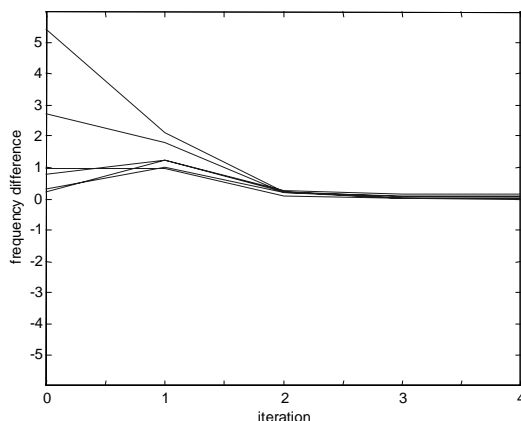
(a) primeira iteração



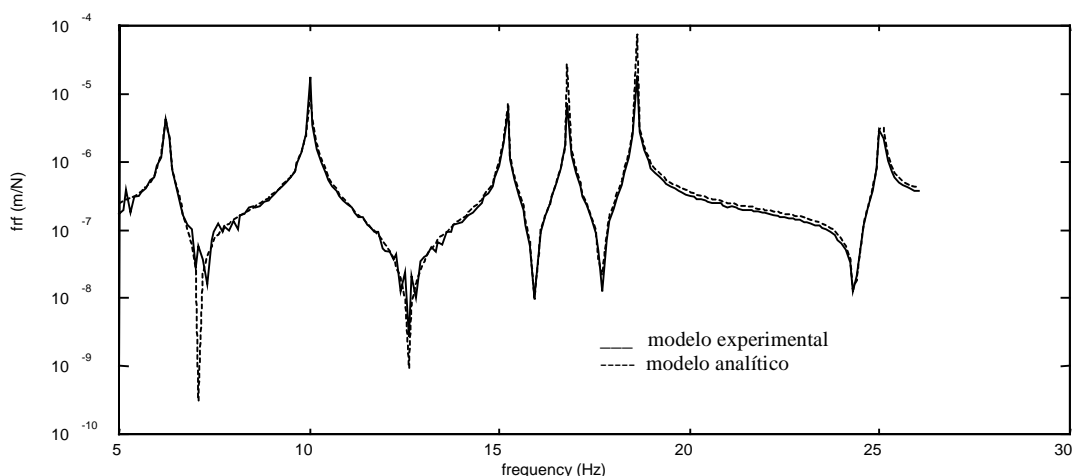
(b) quarta iteração

**Figura 3:** Evolução da variação dos parâmetros

Com 4 iterações, a diferença de frequência entre os modelos “experimental” e analítico é praticamente nula, como mostram a Figura 4 e a Figura 5, e os modos apresentam-se perfeitamente correlacionados (Tabela 2).



**Figura 4:** Diferença das frequências naturais dos modelos experimental e analítico



**Figura 5:** Superposição das FRF(s) medidas no centro do elemento 1

#### 4. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi discutido o processo de ajuste de modelos utilizando diretamente as FRF(s) do modelo para estrutura do tipo placa. O modelo de elementos finitos foi ajustado baseado em dados experimentais de análise modal, tendo em vista a importância de se definir um modelo analítico representativo quando se deseja estudar as características dinâmicas de um sistema, especialmente quando o objetivo é prever seu comportamento dinâmico. A introdução de ruído nos dados “experimentais” simulados permitiu a geração de dados mais condizentes com aqueles obtidos em um experimento, o que permitiu avaliar a metodologia para condições mais próximas das condições de teste. Os resultados mostraram-se satisfatórios. A próxima etapa do trabalho será utilizar dados experimentais obtidos em laboratório para validar a metodologia.

## *Agradecimentos*

Os autores agradecem à Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP pelo apoio financeiro para o desenvolvimento deste trabalho.

## **5. REFERÊNCIAS**

- Cantieni, R., Pietrzko, S. and Deger Y., 1998, “Modal investigation of an office building floor”, proceedings of the XVI-IMAC.
- Cassola, S., and Pereira, J.A., 1999, “Caracterização dos Parâmetros Dinâmicos de Estruturas Metálicas do Tipo *Steel Joist*”, proceedings of the XV COBEM.
- Comitê Euro-International du beton – Bulletin d’Information n° 209 ,1991–“Vibration problems in structures” - CEB n° 209/1991- Viena.
- Mottershead, J. E. and Friswell, M. I., 1993, “Model updating in structural dynamics: a survey”, *Journal of Sound and Vibration*, 167(2), pp 347-375.
- Friswell, M. J. and Mottershead, J. E., 1998, Editorial, *Mechanical Systems and Signal Processing*, MSSP, 12(1), 1-6.
- Larsson, P. O. and Sas, P., 1992, “Model updating based on forced vibration testing using numerically stable formulations”, proceedings of the X-IMAC.
- Lin, R. M. and Ewins, D. J., 1994, “Analytical model improvement using frequency response functions, *Mechanical System and Signal*” Processing, 8(4), pp 437-458.
- Natke, H. G. et al, 1997, “Some recent advances in model updating”, proceedings of DETC’97, ASME Design Engineering Technical Conferences, 16th Biennial Conf. on Mechanics Vib. and Noise: Sacramento-USA. sept/97, paper DETC97/VIB-4142.
- Papadimitriou, C., Levine-West, M. and Milman, M., 1998, “Application of a Finite Element Model Updating Methodology on the IPEX-II Structure,” proceedings XVI – IMAC.
- Paschoalini, A. T., 1995, “Estudo comparativo do comportamento dinâmico do elemento isoparamétrico de placas das famílias Serendipity e Lagrangeana”, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil.
- Pavic, A., Reynolds, P., 1999, “Experimental assessment of vibration serviceability of existing office floors under human-induced excitation”, *Experimental Techniques*, september/october 1999, pp 41-45.
- Pereira, J. A., et al., 1994, “Model updating and failure detection based on experimental FRF’s: case study on a space frame structure”, proceedings of the 19<sup>th</sup> ISMA, pp 669-681.
- Pereira, J. A., 1996, “Structural damage detection methodology using a model updating procedure based on frequency response functions - FRF(s)”, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil.
- Reynolds P. et al., 1998(a), “Modal testing, FE analysis and FE model correlation of a 600 tonne post-tensioned concrete floor”. XXIII-International Seminar on Modal Analysis.
- Reynolds, P., Pavic, A. and Waldron, P., 1998(b), “Modal testing of a 150-tonne concrete slab incorporating a false floor system”, proceedings of the XVI-IMAC.
- Stephenson, A. C. and Humphreys, 1998, “Quantification of Steel Floor Vibration and its Relationship to Human Comfort”, *Journal of Constructional Steel Research*, 46: pp 1-3, paper n° 256.
- Wang, M. L., Heo, G. and Satpathi, D., 1997, “Dynamic Characterization of a Long Span Bridge: a Finite Element Based Approach”, proceedings Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 16: pp 503-512