ESTUDO DA TRANSMISSÃO DE CALOR RADIANTE E CONVECTIVO EM CILINDROS CONCÊNTRICOS PELOS MÉTODOS DE MONTE CARLO E RESÍDUOS PONDERADOS.

Carlos Alberto de Almeida Vilela
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Faculdade de Engenharia Mecânica - FEM
Departamento de Energia - DE
Campinas - SP - Brasil
Caixa Postal 6122
CEP 13083-970
Marcelo Cunha da Silva

Resumo

Aplicando os métodos de Monte Carlo e resíduos ponderados, são calculados os fluxos de calor radiante e convectivo em cavidade formada por cilindros concêntricos, de comprimento finito, considerando a superfície interna negra e a superfície externa como cinza, com temperaturas constantes. As propriedades da superfície externa são consideradas as da liga Al-Cu. No problema, é considerado ainda o escoamento de fluido não participante em regime laminar desenvolvido por toda cavidade. São apresentados como resultados do estudo, a distribuição da temperatura do fluido e o calor trocado por convecção ao longo da cavidade, o fluxo de calor radiante trocado entre as superfícies, e o comprimento da cavidade necessário para que seja atingido o regime térmico completamente desenvolvido, e a distribuição do número de Nusselt para vários números de Reynolds e diferenças de temperatura entre as superfícies.

Palavras-chave: Radiação, Convecção, Resíduos Ponderados

1. INTRODUÇÃO

De interesse à diversas aplicações práticas, tem-se feito o estudo do escoamento em inúmeras configurações envolvendo ou não a transferência de calor ao fluído, e em alguns casos sendo de relevância a parte radiativa da transferência de calor. A complexidade de análise de cada caso, se dá de acordo com as condições de contorno envolvidas, sendo necessário ou não o acoplamento das equações envolvidas e são também desconsideradas as espessuras das paredes.

Neste estudo em particular, é considerado o escoamento de fluido em um tubo anular concêntrico, com temperaturas das paredes internas e externas mantidas constantes e diferentes e fluido não participante na troca de calor radiante. Com estas condições, pode-se tratar o problema como dois casos em separado. Primeiro envolvendo a parte radiativa da troca de calor entre as superfícies e segundo a parte convectiva entre as superfícies e o fluido. Para o tratamento das equações envolventes, foram aplicados os métodos de Monte Carlo para radiação, e um método analítico aproximado baseado em resíduos ponderados, para convecção.

Como resultado de toda análise, são apresentados gráficos e tabelas do desenvolvimento térmico ao longo do tubo, número de Nusselt desenvolvido, comprimento de tudo necessário para desenvolvimento térmico, e calor radiante trocado, para várias configurações de raio (R*), número de Reynolds e temperaturas.

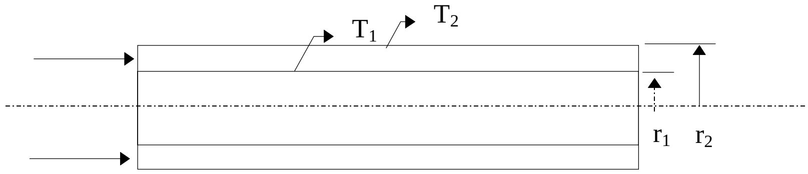


Figura 1. esquema do sistema

2. MODELO MATEMÁTICO

O problema é um caso onde ocorre a transferência de calor pela radiação e convecção de forma desacoplada, já que as temperaturas das superfícies são mantidas constantes.

2.1 Energia emitida pelas superfícies

Como apresentado por Goldstein Jr(1988), tem-se as relações para radiação das energia emitidas pelas superfícies 1, ϕ_1 e pela superfície 2, ϕ_2.

$$\phi_1 = \varepsilon_{\Omega 1} \mathrm{E}_{b1} A_1 \qquad (1)$$

$$\varepsilon_{\Omega 1} = 1 \qquad \text{(superfície negra)} \qquad (2)$$

$$\mathrm{E}_{b1} = \sigma T_1^4 \qquad (3)$$

$$A_1 = 2\pi r_1 L \qquad (4)$$

$$\phi_2 = \varepsilon_{\Omega 2} \mathrm{E}_{b2} A_2 \qquad (5)$$

$$\mathrm{E}_{b2} = \sigma T_2^4$$

$$A_2 = 2\pi r_2 L$$

A emitância da superfície 2 pode ser obtida pela seguinte relação:

$$\varepsilon_{\Omega 2} = \frac{\mathrm{E}_2}{\mathrm{E}_{b2}} = \frac{\int_{\Omega} i_2 \cos(\beta_2) dw}{i_{b2}\pi}$$ a qual pode ser rescrita como :

$$\varepsilon_{\Omega 2} = 2\int_0^{\pi/2} \varepsilon_2 \cos(\beta_2) \operatorname{sen}(\beta_2) d\beta_2 \qquad (6)$$

A integração desta equação pode ser feita a partir das relações que descrevem os valores de ε_2 em função de β obtida na figura (2).

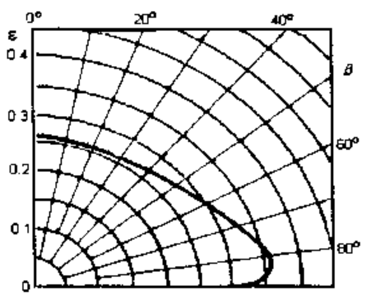


Figura 2. Variação direcional de ε_2 para liga de Alumínio-Bronze

Para $0 \leq \beta \leq 30^{\circ} \rightarrow \varepsilon_2 = 0.26$ (7)

$$30^{\circ} \langle \beta \leq 80^{\circ} \rightarrow \varepsilon_2 = 0.26 + 0.1\left(\frac{\beta}{0.85141} - 0.61498\right)^2 \quad (8)$$

$$80^{\circ} \langle \beta \leq 88^{\circ} \rightarrow \varepsilon_2 = 0.365 - 0.1\left(\frac{\beta}{0.23111} - 6.04152\right)^2 \quad (9)$$

$$88^{\circ} \langle \beta \leq 90^{\circ} \rightarrow \varepsilon_2 = 14.76011 - 9.39658\beta \quad (10)$$

A partir das aproximações feitas, tem-se que:

$\varepsilon_{\Omega 2} = 0.28304$

2.2 Cálculo do número de pacotes emitidos pelas superfícies N_1, e N_2.

O método de Monte Carlo é baseado na totalização de pacotes de energia trocados pelas superfícies, daí tem-se a definição da energia contida em cada pacote:

$$\phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{N} \quad (11)$$

Superfície 1: $N_1 = \dfrac{\phi_1}{\phi_2} N$

Superfície 2: $N_2 = \dfrac{\phi_2}{\phi} N$ *N* - número total de pacotes

2.3 Acompanhamento dos pacotes emitidos pela superfície 2

O acompanhamento de cada pacote de energia é o que determina o quanto de energia é trocada pelas superfícies. Este procedimento é detalhado por Henriquez *et al*(1996). Tem-se que a cada um dos pacotes de energia emitidos pela superfície 2, pode caber uma das possibilidades a seguir:

a) O pacote é absorvido pela superfície negra.
b) O pacote é absorvido pela própria superfície emissora 2.
c) O pacote é refletido especularmente pela própria superfície emissora.
d) O pacote é refletido difusamente pela própria superfície emissora 2.

2.4 Acompanhamento dos pacotes emitidos pela superfície 1

A cada um dos pacotes emitidos pela superfície 1, pode ocorrer uma das seguintes possibilidades.

a) O pacote é absorvido na superfície 2.
b) O pacote é refletido especularmente.
c) O pacote é refletido difusamente.
d) O pacote sai para o ambiente.

2.5 Cálculo das taxas de transferência de calor radiante Q_1 e Q_2 :

Os pacotes emitidos pelas superfícies 1 e 2 são acompanhados até serem absorvidos ou emitidos para fora da cavidade. Faz-se então o balanço dos pacotes que são absorvidos na superfície 1, N_1', e os pacotes que são absorvidos na superfície 2, N_2'. Tem-se então que:

$$Q_1 = \phi\left(N_1 - N_1'\right) \text{(a)} \qquad Q_2 = \phi\left(N_2 - N_2'\right) \text{(b)} \qquad Q_1 + Q_2 + Q_\rho = 0 \text{(c)} \tag{12}$$

onde Q_ρ é o calor perdido para o ambiente.

2.6 Transferência de calor convectiva.

Para o tratamento da equação da energia, que determinará a distribuição de temperatura no interior do tubo, são consideradas algumas hipóteses apresentadas a seguir:

- O problema é tratado em regime permanente de escoamento
- Densidade do fluido constante
- Dissipação viscosa desprezível
- Condução axial desprezível
- $\frac{\partial}{\partial\theta} = 0$, para todas as variáveis

Com estas considerações, a equação da energia em coordenadas cilíndricas, pode ser escrita como da forma:

$$\frac{v_z}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \quad \text{onde} \tag{13}$$

$$\alpha = \frac{\kappa}{\rho C_p} \tag{14}$$

As condições de contorno aplicadas ao problema são:

$$T_{(z,r1)} = T_1 \qquad T_{(z,r2)} = T_2 \qquad T_{(0,r)} = T_e$$

Definindo os grupos adimensionais como:

$$\theta = \frac{\left(T_1 - T\right)}{\left(T_1 - T_2\right)} \text{(a)} \qquad R = \frac{\left(r_1 - r\right)}{\left(r_1 - r_2\right)} \text{(b)} \qquad Z = \left(\frac{z}{\left(r_2 - r_1\right)\operatorname{Re}\operatorname{Pr}}\right) \text{(c)} \tag{15}$$

Re- número de Reynolds
Pr- número de Prandt

Então a equação adimensionalizada fica:

$$\frac{\partial\theta}{\partial Z} = \frac{\alpha \operatorname{Re}\operatorname{Pr}}{v\left(\left(r_2 - r_1\right)R + r_1\right)}\frac{\partial\theta}{\partial R} + \frac{\alpha \operatorname{Re}\operatorname{Pr}}{v\left(r_2 - r_1\right)}\frac{\partial^2\theta}{\partial R^2} \tag{16}$$

e as condições de contorno ficam:

$\theta_{(0,Z)} = 0 \qquad \theta_{(1,Z)} = 1 \qquad \theta_{(R,0)} = \theta_e$

Uma solução aproximada para a equação da energia, utilizando o método dos resíduos ponderados, é proposta da forma, onde uma função de aproximação é dada por:

$$\hat{\theta}_{(Z,R)} = R + \sum_{i=1}^{n} C_i R^{i+1} \text{ onde } C_i = f(Z) \tag{17}$$

Considerando uma aproximação de ordem 3, n=2;

$$\hat{\theta}_{(Z,R)} = R + C_1 R^2 + C_2 R^3 \tag{18}$$

Em Z=0, tem-se a condição de contorno de temperatura média de entrada:

$T_e = 27^oC \qquad \theta_e = -0.4$

$\hat{\theta}_{(Z,0)} = 0 \qquad \hat{\theta}_{(Z,1)} = 1 = 1 + C_1 + C_2$

portanto $\qquad C_1 = -C_2$

Logo a função (18) fica :

$$\hat{\theta}_{(Z,R)} = R + C_1\left(R^2 - R^3\right) \tag{19}$$

Para a avaliação da temperatura média, é usada a expressão abaixo:

$$\theta_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \theta_i}{n}$$ onde: *n*: número de pontos no intervalo

É adotado um perfil de temperatura em *Z=0*, tal que a temperatura média seja $\theta_m = \theta_e = -0.4$.
Um perfil é dado utilizando (19), portanto:

$$\theta_{(0,R)} = R + C_1\left(R^2 - R^3\right) \tag{20}$$

Utilizando o conceito de temperatura média no intervalo $0 \le R \le 1$, com n=100:
$C_{1(0)} = -11$
Então a função (20) fica:

$$\hat{\theta}_{(0,R)} = R - 11\left(R^2 - R^3\right) \tag{21}$$

que satisfaz as condições de contorno aplicadas em (16).

Pelo método da colocação, tem-se que o mínimo **R** seja dado por :

R=(equação diferencial)

A equação diferencial no ponto de colocação usando a aproximação dada por (18) seja nula.

De (18)

$$\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial R} = 1 + C_1\left(2R - 3R^2\right) \qquad \frac{\partial^2\hat{\theta}}{\partial R^2} = C_1(2 - 6R) \qquad \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial Z} = C_1'\left(R^2 - R^3\right)$$

Substituindo em (16), fica:

$$\mathbf{R} = -C_1'\left(R_c^2 - R_c^3\right) + \frac{\alpha \operatorname{Re}\Pr\left[1 + C_1\left(2R_c - 3R_c^2\right)\right]}{v\left[\left(r_2 - r_1\right)R_c + r_1\right]} + \frac{\alpha \operatorname{Re}\Pr C_1\left(2 - 6R_c\right)}{v\left(r_2 - r_1\right)} = 0 \qquad (22)$$

onde R_c é o ponto de colocação.

A equação (22) pode ser escrita como :

$$\mathbf{R} = AC_1' + BC_1 + D = 0 \qquad \rightarrow \qquad C_1' + \frac{B}{A}C_1 = -\frac{D}{A} \qquad (23)$$

A solução de (23), é dada por Kreyseg(1993):

$$C_{1(Z)} = e^{-h}\left[\int e^{h}\left(\frac{-D}{A}\right)dZ + K_1\right] \qquad \text{onde: } h = \int \frac{B}{A}dz$$

Tem-se que:

$$h = \frac{B}{A}Z$$

$$C_{1(Z)} = e^{\frac{-B}{A}Z}\left[\int e^{\frac{B}{A}Z}\left(\frac{-D}{A}\right)dZ + K_1\right]$$

$$C_{1(Z)} = \frac{-D}{B} + K_1 e^{\frac{-B}{A}Z} \qquad (24)$$

Mas para *Z=0*, $C_{1(Z)} = -11$

Então (24):

$$K_1 = \left(-11 + \frac{D}{B}\right)$$

$$C_{1(Z)} = \frac{-D}{B} + \left(-11 + \frac{D}{B}\right)e^{\frac{-B}{A}Z} \qquad (25)$$

que substituindo em (18), tem-se a equação que é a solução aproximada de (22), para distribuição de temperatura:

$$\hat{\theta}_{(Z,R)} = R - \frac{D}{B}\left(R^2 - R^3\right) + \left(-11 + \frac{D}{B}\right)e^{\frac{-B}{A}Z}\left(R^2 - R^3\right) \qquad (26)$$

Os resultados obtidos pelo método aproximado, foram comparados com a solução apresentada por Kays *et al*(1985) para o caso de temperaturas constantes e diferentes das superfícies cilíndricas concêntricas com escoamento no regime laminar.
As equações para o problema são:

$$Q_1'' = \frac{h}{D_h}\left[\left(T_1 - T_e\right)\Phi_{ii} + \left(T_2 - T_e\right)\Phi_{io}\right] \qquad \text{[w/m2]} \qquad (27)$$

$$Q_2'' = \frac{k}{D_h}\left[\left(T_1 - T_e\right)\Phi_{oi} + \left(T_2 - T_e\right)\Phi_{oo}\right] \qquad \text{[w/m2]} \qquad (28)$$

$$T_s - T_e = \left(T_1 - T_e\right)\Phi_{bi} + \left(T_2 - T_e\right)\Phi_{bo} \qquad \text{[K]} \qquad (29)$$

onde:

Q'' -fluxo de calor convectivo trocado pela superfície 1 ou 2 com o fluido.
k- condutividade térmica do fluido.
D_h -diâmetro hidráulico.
Φ -função dada por Kays *et al*(1985).

3. RESULTADOS OBTIDOS

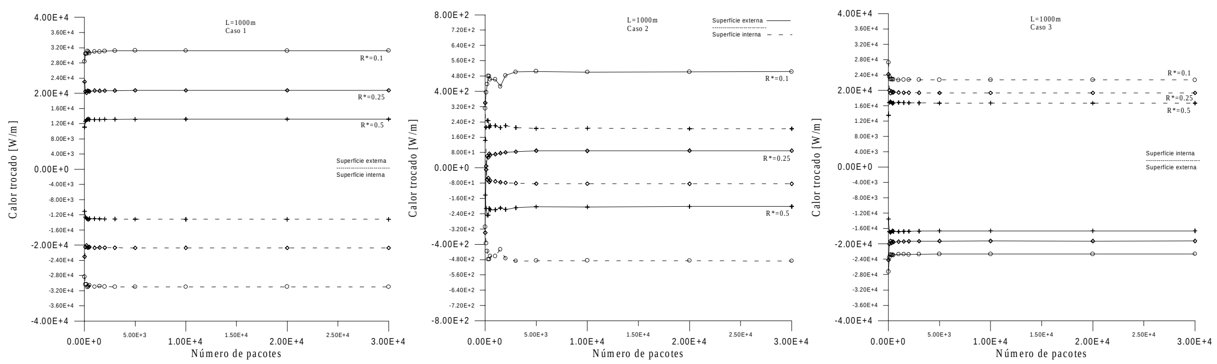
Os gráficos seguintes, foram obtidos para três casos estudados com as condições de contorno seguintes:

Tabela 1. Condições de teste

	T_1[K]	T_2[K]	T_e[K]
Caso 1	500	1000	300
Caso 2	500	500	300
Caso 3	1000	500	300

Tabela 2. Relação de raios

R*	r_1	r_2	D_h
0,5	0,1	0,2	0,2
0,25	0,1	0,4	0,6
0,1	0,1	1,0	1,8



(a) (b) (c)

Figura 3. Troca de calor radiativo: (a) caso1, (b) caso 2, (c) caso 3

Tabela 3. Temperatura desenvolvida

	Caso 1		Caso 2		Caso 3	
	Kays	Resíduos ponderados	Kays	Resíduos ponderados	Kays	Resíduos ponderados
R*=0.1	873.5	853.8	500	500	626.5	646.2
R*=0.25	834.5	814.3	500	500	665.5	685.7
R*=0.5	795.0	780.0	500	500	705.0	720.0

Tabela 4. Nusselt desenvolvido

	CASO 1		CASO 2		CASO 3	
	Nu_i	Nu_e	Nu_i	Nu_e	Nu_i	Nu_e
R*=0.1	10.46-	3.09+	0	0	10.46+	3.09-
R*=0.25	6.47-	3.26+	0	0	6.47+	3.26-
R*=0.5	4.89-	3.51+	0	0	4.89+	3.51-

O sinal ao lado do valor de Nu, significa que a superfície está cedendo calor (+) ou recebendo calor(-).

4. CONCLUSÃO

Os resultados apresentados demostram que o método dos resíduos ponderados aplicado a este problema proporcionou uma boa aproximação do perfil de temperatura desenvolvida na cavidade. Nos gráficos relativos a troca de calor radiativo pode-se observar que a partir de aproximadamente 5000 pacotes utilizados para o cálculo da troca de calor, o valor desta se estabiliza, demonstrando que a quantidade de pacotes utilizada é importante para se obter um resultado mais confiável. Observa-se também que com a variação das temperaturas de superfície, há uma inversão na troca de calor radiativo. A diferença entre as curvas de razão de raio deve-se principalmente as áreas de troca, e para os casos estudados as perdas de energia para o ambiente são muito pequenas, isto é mostrado pela simetria das curvas de mesma razão de raio.

5. REFERÊNCIAS

- Henriquez, J. R.; Rodriguez, R. J.; Mohamed, M.; Goldstein Jr, L..; ”Modelo de Troca de Calor Radiante entre Duas Superfícies Cilíndricas Concêntricas pelo Método de Monte Carlo”, VI ENCIT / VI LATCYM, Florianópolis - SC - Brasil, Novembro 1996.
- Kays, W. M.; Perkins, H. C.; “Handbook of Heat Transfer: Fundamentals”, Second Edition, New York, Mc Graw Hill, 1985.
- Goldstein Jr, Leonardo; “Elementos de Radiação Térmica”, Universidade Estadual de Campinas - DETF, Apostila, 1988.
- Kreyseg, E.; “Advanced Engineering Mathematics”, John Wiley & Sons, 1993.