

# INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE FOURIER NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS INVERSOS DE CONDUÇÃO DE CALOR ATRAVÉS DO MÉTODO DO GRADIENTE CONJUGADO

**Frederico Romagnoli Silveira Lima**

**Gilmar Guimarães**

Universidade Federal de Uberlândia, Campus Santa Mônica, Faculdade de Eng<sup>a</sup> Mecânica, 38400-902, Uberlândia, MG, Brasil. - [romagnol@mecanica.ufu.br](mailto:romagnol@mecanica.ufu.br); [gguima@mecanica.ufu.br](mailto:gguima@mecanica.ufu.br)

## Resumo

Os problemas inversos de condução de calor caracterizam-se pela obtenção da solução para um problema térmico sem a necessidade de se conhecer a forma funcional do parâmetro a ser estimado. O parâmetro desconhecido pode ser uma condição de contorno, condição inicial ou ainda a geração de calor (termo fonte). Neste trabalho, a técnica inversa baseada em gradientes conjugados é empregada para a obtenção de um fluxo de calor superficial. Observa-se que a eficiência na aplicação desta metodologia só é obtida a partir de certas condições de projeto. Nesse sentido, apresenta-se um estudo unidimensional dos parâmetros físicos envolvidos no problema. Nesta análise verifica-se a influência do Número de Fourier, que relaciona o tipo de material, dimensão da amostra e o tempo final de medição, sobre os resultados simulados usando o método do gradiente conjugado. Resultados experimentais também são apresentados.

**Palavras-chave:** Problemas inversos, Condução de calor, Estimação de parâmetros.

## 1. INTRODUÇÃO

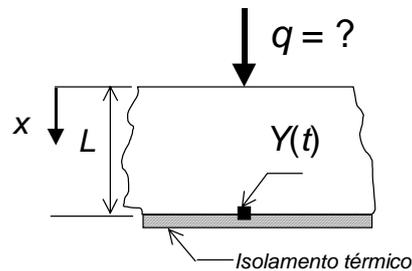
Nas ciências térmicas existem inúmeros problemas de condução de calor cujas soluções não são conhecidas diretamente devido à dificuldade no estabelecimento das condições de contorno, condição inicial ou ainda do termo fonte. Uma alternativa para se obter a solução destes tipos de problemas é o uso de metodologias inversas. Nesse sentido, diferentes concepções de técnicas inversas têm sido propostas na literatura. Dentre elas podemos citar o Método de “Mollification” (Murio, 1989), o Método de Programação Dinâmica (Busby & Trujillo, 1985), o Método de Monte Carlo (Haji-Sheikh & Buckingham, 1993), o “Método da Marcha Espacial” (Raynaud & Sassi., 1994), o Método de Função Especificada Sequencial (Beck et al., 1985) e o Método do Gradiente Conjugado (Alifanov, 1974). Neste trabalho optou-se pelo uso do método do gradiente conjugado. A técnica escolhida é uma poderosa ferramenta para a minimização de uma função objetivo, pois permite estimar qualquer parâmetro desconhecido no problema térmico, tal como a condição inicial, condição de contorno ou ainda o termo fonte (Jarny et al., 1991). Entretanto, devido a concepção iterativa e de domínio global do método, o seu emprego possui algumas limitações (Alifanov & Egorov, 1995).

Neste trabalho, o problema inverso estudado é o da obtenção da distribuição de fluxo de calor e o campo de temperatura numa ferramenta de corte durante o processo de usinagem por torneamento. Observa-se que a estimação da temperatura na região de corte é de grande importância para o estudo do desgaste da ferramenta pois ela interfere na sua vida útil.

O principal objetivo, entretanto, é apresentar uma análise numérica da influência dos parâmetros físicos nos resultados estimados. Os parâmetros analisados levam em conta o tipo de material, a espessura e ainda o tempo final de aquecimento. Uma relação entre estes parâmetros pode ser dada pelo número de Fourier. Assim, a atenção é voltada para se estabelecer condições ideais de projeto, para obtenção resultados estimados confiáveis. A ferramenta de corte é, então, simulada como uma placa plana submetida a um fluxo de calor na superfície frontal e isolada na superfície oposta. Embora o problema real da ferramenta seja bem mais complexo, com características tridimensionais e com geração de calor localizada, o modelo simplificado é eficiente e adequado uma vez, que neste trabalho, apenas o desempenho da técnica através da identificação de valores ótimos de  $F_0$  é estudado.

## 2. PROBLEMA DIRETO

A Figura 1 apresenta o problema térmico estudado.



**Figura 1.** Problema térmico unidimensional.

A espessura da placa é definida por  $L$  e as propriedades da placa como condutividade térmica,  $k$ , e difusividade térmica,  $\alpha$ , bem como a condição inicial,  $T_0$ , são consideradas conhecidas. Assim o problema apresentado pode ser descrito respectivamente pela equação da difusão de calor, pelas condições de contorno e pela condição inicial como sendo

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad (1)$$

$$-k \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = q(t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$T(x,0) = T_0 \quad (4)$$

A solução direta desse problema é bem conhecida e pode ser encontrada analiticamente (Guimarães, 1993). Nesse trabalho, a solução do problema térmico é obtida numericamente através da técnica de volumes finitos (Patankar, 1980).

## 3. PROBLEMA INVERSO

Para o problema inverso o fluxo de calor é considerado desconhecido e será estimado a partir do campo de temperatura experimental,  $Y(t)$ , obtido na face oposta ( $x=L$ ). Neste, trabalho este campo de temperatura é simulada através da solução do problema direto considerando-se um fluxo de calor,  $q$ , conhecido. Apresenta-se a seguir um resumo das principais equações que descrevem o problema inverso.

A solução do problema inverso é obtida através da minimização do funcional abaixo

$$J(q) = \int_{t=0}^{t=t_f} [T(L, t; q) - Y(L, t)]^2 dt \quad (5)$$

### 3.1 Método gradiente de minimização

O algoritmo iterativo do método do gradiente conjugado para estimar um fluxo de calor desconhecido  $q(t)$  é dado por Özisik (1993) tal que,

$$q^{n+1}(t) = q^n(t) - \beta^n P^n(t) \quad (6)$$

onde  $n$  é o índice que indica o número de iterações;  $P^n$  é a direção descendente de busca dada por

$$P^n(t) = J'^n + \gamma^n P^{n-1}(t) \quad (7)$$

sendo  $\gamma^n$  o coeficiente conjugado e  $\beta^n$  o tamanho do passo definidos respectivamente por

$$\beta^n = \frac{\int_{t=0}^{t=t_f} [T(L, t; q) - Y(L, t)] \Delta T(L, t) dt}{\int_{t=0}^{t=t_f} [\Delta T(L, t)]^2 dt} \quad (8)$$

$$\gamma^n = \frac{\int_{t=0}^{t=t_f} [J'^n(t)]^2 dt}{\int_{t=0}^{t=t_f} [J'^{n-1}(t)]^2 dt} \quad (9)$$

### 3.2 Problema adjunto e equação gradiente

A minimização do funcional  $J(t)$  que resulta num problema auxiliar baseado no problema direto é dado por

$$\frac{\partial^2 \lambda(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \lambda(x, t)}{\partial t} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \lambda(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \lambda(L, t)}{\partial x} = 2[T(L, t; q) - Y(L, t)] \quad (12)$$

$$\lambda(x, t_f) = 0 \quad (13)$$

A equação gradiente deriva do problema adjunto e é definida por (Alifanov, 1974) como

$$J'(t) = \lambda(0, t) \quad (14)$$

### 3.3 Critério de parada

A iterativo é interrompida quando o funcional Eq.(5) torna-se muito pequeno tal que,

$$J[q^{n+1}(t)] < \varepsilon \quad (15)$$

onde  $\varepsilon$  pode ser especificado como um número relativo pequeno ou através do princípio da discrepância (Alifanov, 1974). Assim,  $\varepsilon$  pode ser calculado em função do desvio padrão das medições de temperatura ( $\sigma$ ) ou seja

$$\varepsilon = \sigma^2 t_f \quad (16)$$

onde  $t_f$  é o tempo final de medição.

#### 4. INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE FOURIER

O Número de Fourier compara a dimensão espacial,  $L$ , da amostra com a profundidade de penetração dos efeitos térmicos do calor imposto,  $q(t)$ , para um determinado tempo de aquecimento,  $t_f$ , e para uma determinada capacidade de difusão do calor,  $\alpha$ , ou seja,

$$F_0 = \frac{\alpha t_f}{L^2} \quad (17)$$

e indica fisicamente se a amostra atingiu o tempo de difusão do calor necessário para que o sinal de temperatura medido na face oposta contenha informação suficiente sobre o fluxo de calor imposto na face frontal. Para a identificação das condições de projeto ideais para a aplicação do método do gradiente conjugado apresenta-se a seguir uma metodologia que permite a comparação dos resultados estimados para diversas condições de trabalho.

A concepção do método do gradiente conjugado é de domínio global no tempo. Isto implica que o processo iterativo ocorre levando-se em conta todas as medições realizadas desde o instante inicial até o instante de tempo final. Além disso, devido a utilização de um problema de valor final (problema adjunto) que auxilia a minimização da função objetivo, observa-se que o parâmetro estimado terá sempre valor nulo no instante de tempo final (Eq. 13). Essas particularidades dificultam a comparação de resultados para diferentes combinações dos parâmetros  $L$ ,  $t_f$  e  $\alpha$ . Nesse sentido, alguns critérios comparativos são estabelecidos:

- O fluxo de calor imposto à placa tem seu valor conhecido, constante e igual para todos os testes simulados;
- O fluxo de calor estimado é comparado ao imposto somente a 70% do tempo final de medição em cada teste para atenuar o efeito do problema de valor final nos resultados.
- Os materiais usados na análise do número de Fourier são: metal duro (carbetto cementado) e cerâmica (materiais usados na fabricação das ferramentas de corte). Além disso, são usados mais três materiais condutores que visam simular problemas térmicos com diferentes características termofísicas: cobre puro, aço inoxidável AISI 304 e pyroceram MgO-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-SiO<sub>2</sub>, cuja propriedades térmicas são encontradas em Incropera e DeWitt, 1990;
- A incerteza entre a distribuição de fluxo de calor imposta e a distribuição de fluxo de calor estimada é dada por

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{nmed} [q_{exato} - q(i)_{estimado}]^2}{q_{exato}} \times 100 \quad (18)$$

onde  $nmed$  é igual a 70% do tempo final de medição  $t_f$ .

## 5. APARATO EXPERIMENTAL

A comprovação experimental da influência do número de Fourier nos resultados estimados é proposta através de testes unidimensionais. O aparato experimental é apresentado na Figura 2. Neste caso, uma amostra de aço inoxidável AISI 304 é submetida a uma fonte de calor de valor conhecido usando-se um duplo sensor resistência/transdutor de fluxo de calor. A aplicação de uma fonte de fluxo de calor sobre toda a superfície da amostra nos permite obter um problema térmico unidimensional. As dimensões da amostra e do duplo sensor são respectivamente  $0,05 \times 0,05 \times 0,01$  m e  $0,05 \times 0,05 \times 0,001$  m. O duplo sensor é responsável pela geração e medição do fluxo de calor imposto. O transdutor de fluxo de calor é baseado em termopilhas depositadas eletroliticamente com um tempo de resposta inferior a 10 ms. A temperatura experimental,  $Y(t)$ , é obtida em  $x=L$  através de um termopar de cobre/constantan fixado à face inferior da amostra isolada termicamente. As propriedades termofísicas da amostra são consideradas constantes.

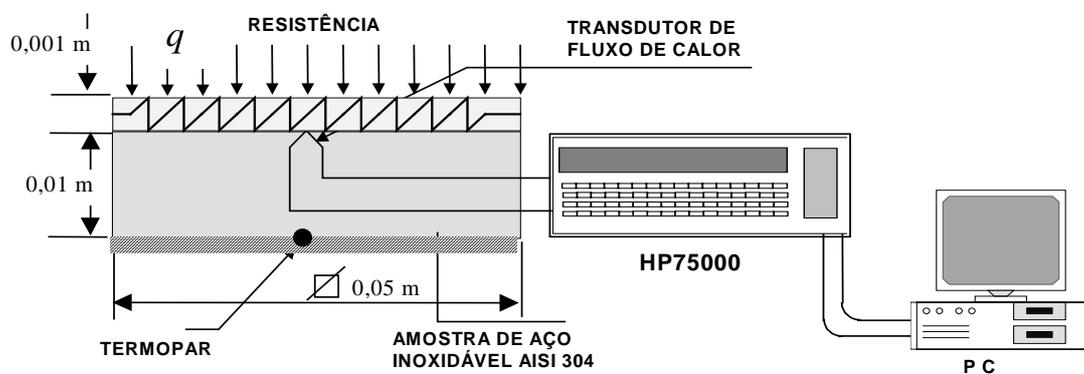


Figura 2. Aparato experimental.

## 6. RESULTADOS

Nesta seção resultados numéricos e experimentais são apresentados. Na primeira parte é apresentada a análise numérica que busca o estabelecimento das condições ideais para a uso do método do gradiente conjugado. Neste etapa é verificada principalmente a influência do número de Fourier na qualidade dos resultados estimados quando comparados aos valores exatos. Em seguida são apresentados dois casos testes experimentais para a comprovação da análise numérica. A temperatura experimental simulada foi obtida resolvendo-se o problema direto (Eqs.1-4). Um fluxo de calor constante ( $q = 5,0 \times 10^4$  W / m) é imposto à amostra para todos os casos testes simulados. O intervalo de tempo entre medições variou de acordo com o teste e é indicado na figura correspondente. A temperatura inicial é também considerada conhecida e igual a  $30,0^\circ\text{C}$ . As propriedades termofísicas são consideradas constantes e estão listadas na Tabela 1.

Tabela 1. Propriedades termofísicas.

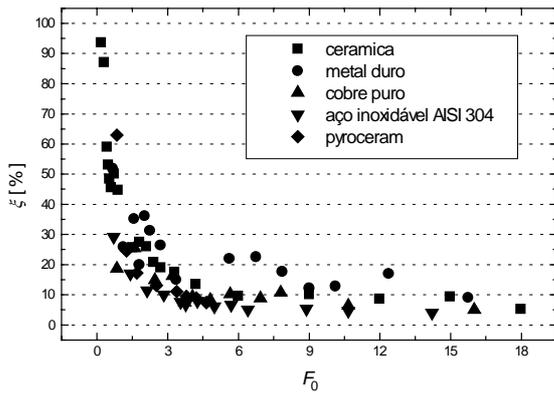
Material	Difusiv. térmica ( $\text{m}^2/\text{s}$ )	Condutiv. térmica ( $\text{W}/\text{mK}$ )
Cerâmica ( $\text{Si}_3\text{N}_4$ )*	$7,2 \times 10^{-6}$	25,0
Metal duro ( $\text{WC} + \text{CO}$ )*	$2,7 \times 10^{-5}$	100,0
Cobre Puro**	$1,2 \times 10^{-4}$	400,0
Aço Inoxidável AISI 304**	$4,0 \times 10^{-6}$	15,1
Pyroceram ( $\text{MgO}-\text{Al}_2\text{O}_3-\text{SiO}_2$ )**	$1,9 \times 10^{-6}$	3,9

\* (Melo, 1998)    \*\* (Incropera & DeWitt, 1990)

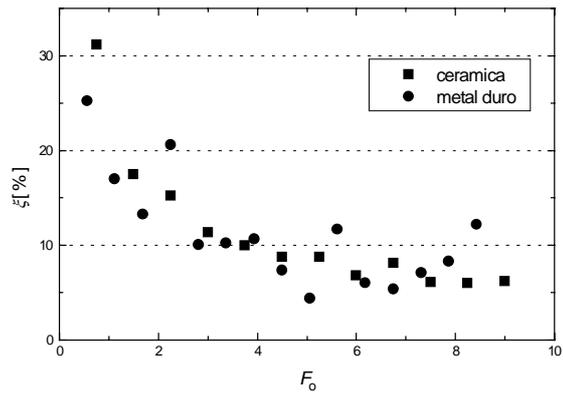
Na Figura 3 apresenta-se o comportamento da incerteza,  $\xi$ , em função do número de Fourier,  $F_0$  para cinco diferentes materiais, ou seja, é verificado a influência do tipo material através da difusividade térmica,  $\alpha$ . Neste teste, a espessura  $L$  foi mantida constante e igual a 0,0049m e o tempo final de medição  $t_f$  sofreu a mesma variação para todos os cinco materiais. Logo, observando a Figura 3 verifica-se que os cinco materiais apresentam uma mesma curva característica, isto é, quanto menor o  $F_0$  maior a incerteza entre os valores estimados e os valores exatos. Além disso, a mesma ordem de grandeza da incerteza também pode ser verificada. Pode-se observar ainda que para  $F_0$  maior que 3,0 a incerteza tende a 10% enquanto que para  $F_0$  menor que 3,0 estes valores alcançam até cerca de 90% como no caso da cerâmica. Apresenta-se nas Figuras 4-5 os resultados para relação entre  $\xi$  e  $F_0$  verificando-se a influência do tempo final de medição,  $t_f$ . Nesse sentido, os demais parâmetros considerados no cálculo do número de Fourier foram mantidos constantes, isto é,  $L = 0,0049\text{m}$  e  $\alpha = 7,2 \times 10^{-6}$  para a cerâmica e  $\alpha = 2,7 \times 10^{-5}$  para o metal duro. Na Figura 4 são apresentados os resultados usando-se um intervalo de tempo entre medições igual a 0,05s. Nesta figura observa-se em detalhe a evolução da incerteza para baixos números de Fourier. Verifica-se que a incerteza tende a diminuir a medida que o número de Fourier aumenta.

Na Figura 5 o intervalo entre medições ( $\Delta t$ ) foi elevado de 0,1s (Figura 3) para 0,25s. Este procedimento permite estudar o comportamento da incerteza para elevados números de Fourier. Verifica-se que a incerteza é menor que 10% para  $F_0$  superiores a 15. Logo, pode-se concluir que quanto maior o número de Fourier menor será a incerteza entre o valor estimado e o valor exato. Apresenta-se na Figura 6 a análise da influência da dimensão espacial na evolução da incerteza,  $\xi$ . Neste teste, o intervalo entre medições também foi mantido constante e igual a 0,1s e o tempo final de medição foi fixado em 3,0s e 10s para o metal duro e a cerâmica, respectivamente. Este procedimento permite que a grandeza do número de Fourier seja similar para ambos materiais. A variação da dimensão espacial é de 0,001m a 0,01m com intervalos de 0,005m até 0,055m e de 0,001 até 0,01m. Novamente, verifica-se o mesmo comportamento anterior, ou seja, para baixos número de Fourier ( $F_0 < 3,0$ ) a incerteza é elevada ( $\xi > 60,0\%$ ) enquanto para  $F_0 > 3,0$  a incerteza se mantém em torno de 10,0%.

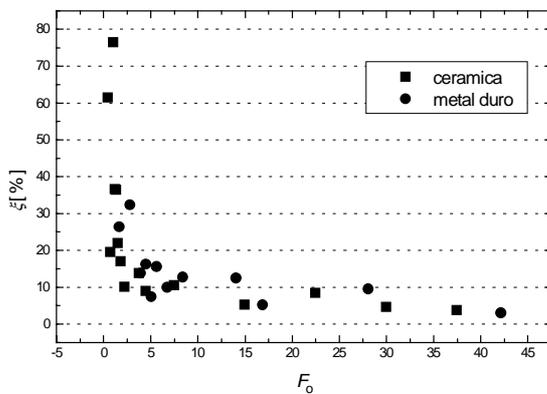
Nas Figuras 7 e 8 são apresentados os resultados para os testes experimentais para uma amostra de aço inoxidável. Na Figura 7, a amostra foi submetida a uma evolução de fluxo de calor com tempo de final de aquecimento de 35s para possibilitar que o problema térmico apresentasse um baixo número de Fourier ( $F_0 = 1,4$ ). Observa-se que os resultados estimados pelo método do gradiente conjugado não apresentam uma boa concordância quando comparados aos valores experimentais, como era esperado de acordo com a análise numérica mostrada ao longo deste trabalho. O erro médio relativo entre o fluxo de calor experimental e o fluxo de calor estimado na região de aquecimento (compreendida de 12s a 35s) é de 35,18%. Portanto, um número de Fourier desta magnitude implica num baixo nível de informação do campo de temperatura experimental, isto é, o tempo de difusão de calor foi pequeno para que a temperatura na face oposta contivesse informação suficiente sobre o fluxo de calor aplicado na face superior da amostra. Logo, conforme a análise numérica apresentada neste trabalho, a incerteza entre o fluxo de calor estimado e o fluxo de calor experimental tende a diminuir para sistemas com número de Fourier de ordem superior. Nesse sentido, apresenta-se na Figura 8 um teste experimental com número de Fourier igual a 3,4. Neste teste, o intervalo de medição e espessura da amostra foram mantidos constantes, sendo o tempo o único parâmetro. Observa-se uma boa concordância entre os valores estimados e exatos, onde neste caso o erro médio relativo calculado na região de aquecimento (12s a 85s) é igual a 9,72%.



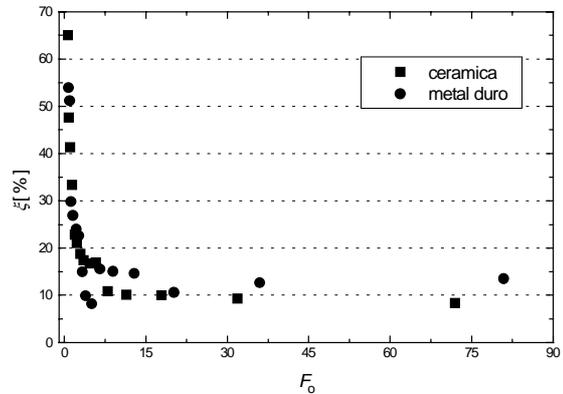
**Figura 3.** Influência da difusividade térmica na evolução da incerteza,  $\xi$ ,  $\Delta t = 0,1s$ .



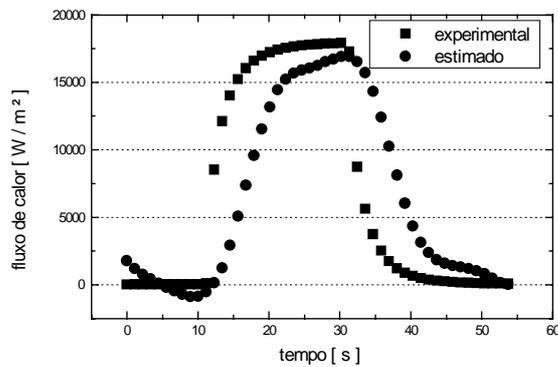
**Figura 4.** Influência do tempo final de medição na evolução da incerteza,  $\xi$ ,  $\Delta t = 0,05s$ .



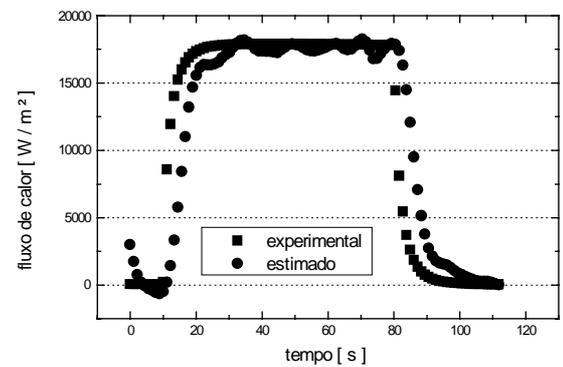
**Figura 5.** Influência do tempo final de medição na evolução da incerteza,  $\xi$ ,  $\Delta t = 0,25s$ .



**Figura 6.** Influência da dimensão espacial ( $L$ ) na evolução da incerteza,  $\xi$ ,  $\Delta t = 1,0s$ .



**Figura 7.** Teste experimental,  $F_0 = 1,4$ .  
 $\Delta t = 1,12s$ ,  $t_f = 35s$ ,  $L = 0,01m$ .



**Figura 8.** Teste experimental,  $F_0 = 3,4$ .  
 $\Delta t = 1,12s$ ,  $t_f = 85s$ ,  $L = 0,01m$

## 7. CONCLUSÃO

Após os testes numéricos realizados, conclui-se que uma análise prévia do número de Fourier,  $F_0$ , é necessária para que a aplicação do método do gradiente conjugado na solução de problemas inversos de condução de calor seja eficaz. Verifica-se que para  $F_0 > 3,0$  a incerteza entre os valores estimados e exatos tende a se manter em torno de 10,0%. Este comportamento se repete para diferentes combinações dos parâmetros  $L$ ,  $t_f$  e  $\alpha$ . A análise das curvas de incerteza em função do número de Fourier indicam que para  $F_0 > 3,0$  as amostras

atingem tempo de difusão do calor necessário para que o sinal de temperatura medido ou simulado na face oposta contenha informação suficiente sobre o fluxo de calor no qual a amostra foi submetida. Os resultados experimentais comprovam a análise numérica, isto é, para um baixo número de Fourier a concordância entre o fluxo de calor experimental e o fluxo de calor estimado é baixa (35,18% de erro médio relativo); e para um número de Fourier da ordem de 3,0 a concordância apresenta uma sensível melhora (somente 9,15% de erro médio relativo). Portanto, a análise prévia do número de Fourier é proposta como uma técnica para auxiliar o uso do método do gradiente conjugado principalmente em problemas térmicos reais onde a natureza e a grandeza da fonte de fluxo de calor são desconhecidas. Assim, a análise *a priori* dos parâmetros de projeto  $L$ ,  $t_f$  e  $\alpha$  através do número de Fourier,  $F_0$ , pode representar a obtenção de resultados estimados confiáveis e com significado físico.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES, CNPq e FAPEMIG pelo apoio financeiro.

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alifanov, O. M., “Solution of an Inverse Problem of Heat Conduction by Iterations Methods”, Journal of Engineering Physics, Vol. 26, N. 4, 1974.
- Alifanov, O. M. e Egorov, Yu. V., “Algorithms and Results of Solving the Inverse Heat Conduction Boundary Problem in Two-Dimensional Formulation”, Journal of Eng. Physics, Vol. 48, N. 4, 1985.
- Beck, J.V., Blackwell, B. e St. Clair, C. R., “Inverse Heat Conduction, Ill-Posed Problems”, Wiley Interscience Publication, New York, 1985.
- Busby, H. R. e Trujillo, D. M., “Numerical Solution to a Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 21, Pp. 349-359, 1985.
- Guimarães, G., “Estimação de Parâmetros no Domínio da Frequência para a Determinação Simultânea da Condutividade e Difusividade Térmica”, Tese De Doutorado, Universidade Federal De Santa Catarina, Florianópolis, 1993.
- Haji-Sheikh, A. e Buckingham, F. P., “Multidimensional Inverse Heat Conduction Using the Monte Carlo Method”, Journal of Heat Transfer, Vol. 115, Pp. 26-33, 1993.
- Incropera, F. P. e Dewitt, D. P., “Introduction to Heat Transfer, 2<sup>nd</sup> Ed.”, Ed John Wiley & Sons, New York, 1990.
- Jarny, Y., Özisik, M. N. e Bardou, J. P., “A General Optimization Method Using Adjoint Equation for Solving Multidimensional Inverse Heat Conduction”, International Journal of Heat And Mass Transfer, Vol. 34, pp.2911-2919, 1991.
- Melo, A. C. A., “Estimação da Temperatura de Corte Utilizando Problemas Inversos de Condução de Calor”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Mg, Brasil, 1998.
- Murio, D. A., “The Mollification Method and the Numerical Solution of the Inverse Heat Conduction Problem by Finite Differences”, Computers Math. Applic., Vol.17, No. 10, Pp. 1385-1396, 1989.
- Patankar, S. V., Numerical Heat Transfer, Hemisphere, Washington, 1980.
- Özisik, M. N., Heat Conduction, 2<sup>nd</sup> Ed., Ed John Wiley & Sons, New York, 1993.
- Raynaud, M. e Sassi, M., Étude de Faisabilité de la Détermination des Températures et Flux Surfaiques Transitoires d’une Enveloppe Sphérique a Partir de Mesures de Températures Internes”, Rapport Final, Institut National Des Sciences Appliquees de Lyon, 1994.