

MODELOS CONCENTRADOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA APLICADOS A CORPOS COM FORMA ARBITRÁRIA

Antonio Gilson Barbosa de Lima¹

Silvia Azucena Nebra²

¹ Departamento de Engenharia Mecânica, CCT, Universidade Federal da Paraíba (UFPB), 58109-970, Campina Grande, PB, Brasil. E-mail: gilson@dem.ufpb.br

² Departamento de Energia, FEM, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 13083-970, Campinas, SP, Brasil. E-mail: sanebra@fem.unicamp.br

Resumo

Os modelos concentrados descrevem as taxas de transferência de calor e/ou massa em um sólido, admitindo que a grandeza de interesse (temperatura ou massa) dentro do sólido seja espacialmente uniforme em qualquer instante durante o processo transiente, portanto considera-se desprezível os gradientes térmicos e/ou de massa no interior do corpo. Neste trabalho apresentam-se modelos matemáticos baseados numa análise concentrada que descrevem a transferência de calor e massa simultâneas em corpos com geometria arbitrária, considerando existência de geração interna de massa e energia, convecção térmica e de massa, evaporação e aquecimento do vapor produzido na superfície do produto. Equações adimensionais para descrever o processo de secagem são dadas, e soluções analíticas são mostradas. Vários resultados dos efeitos dos parâmetros adimensionais tais como, número de Biot, geração interna de massa e energia e relação área/volume do corpo, sobre a cinética de secagem e o aquecimento do sólido são apresentados e analisados.

Palavras-chave: Modelos, Análise concentrada, Analítico, Calor e massa

1. INTRODUÇÃO

Operações de desidratação ou secagem são importantes passos nas indústrias química e de processamento de alimentos, como também no armazenamento e processamento de grãos e outros produtos biológicos. Durante a secagem de produtos biológicos ocorrem variações nas suas características físicas, químicas e biológicas, que, dependendo da intensidade do efeito, podem causar a sua perda ou inutilidade para uma determinada função. Um vasto número de estudos tem sido conduzidos para analisar o processo de secagem. Uns consideram as condições externas do ar, tais como, temperatura, umidade relativa e velocidade, correlacionadas à taxa de secagem do sólido, enquanto outros consideram as condições internas ao produto com ênfase aos mecanismos de movimento de umidade e seus efeitos sobre o mesmo. O conhecimento dos mecanismos de movimento de umidade no interior dos materiais é de fundamental importância e precede a tentativa de descrever a migração de umidade na massa de um sólido. Uma detalhada discussão sobre os mecanismos de transferência de umidade durante a secagem podem ser encontradas em Fortes & Okos (1980), Alvarenga et al. (1980), Fortes (1982), Strumillo & Kudra (1986), Keey(1992), Lima (1995) e Dand (1986), citado por Ibrahim et al. (1997).

Na tentativa de correlacionar dados experimentais da secagem de um material particular à um modelo matemático, os pesquisadores da área de secagem, tem difundido uma gama de modelos que representam a cinética de secagem deste particular material, podendo serem divididos em três grandes grupos: modelos empíricos e semi-empíricos; modelos difusivos e modelos baseados na termodinâmica dos processos irreversíveis (Fortes & Okos, 1980; Parry, 1985; Jayas et al., 1991; Parti, 1993 e Lima, 1999).

O objetivo deste trabalho é modelar e apresentar soluções analíticas para transferência de calor e massa em corpos com geometria arbitrária, baseando-se numa análise concentrada.

Procurando situar o avanço atual deste trabalho dentro da linha de pesquisa de transferência de calor e massa, constatou-se que inúmeros trabalhos dos modelos empíricos e semi-empíricos para descrever a secagem de produtos biológicos foram publicados, em geral, contudo, escassos são os dados em relação a corpos com forma arbitrária que levam em consideração fenômenos acoplados de transferência de calor e massa, considerando existência de geração interna de massa e energia, convecção, evaporação e aquecimento do vapor produzido na superfície do produto.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA

Esta pesquisa envolve a determinação da transferência de calor e massa em produtos com geometria arbitrária sob o ponto de vista da análise concentrada, e foi baseado no trabalho de Schneider (1985).

Para este estudo, considere um corpo sólido de forma arbitrária como ilustrado na Figura 1. O sólido pode receber (ou ceder) um fluxo de Φ por unidade de área em sua superfície (Φ'') e ter geração interna de Φ por unidade de volume uniformemente distribuída (Φ'''). Admitindo que Φ do sólido seja espacialmente uniforme em qualquer instante durante o processo transiente, isto é, que os gradientes de Φ no interior do sólido sejam desprezíveis, todo o fluxo de Φ recebido e gerado difundirá instantaneamente através do mesmo. Isto acontece quando Γ^Φ (uma propriedade de transporte, por exemplo, condutividade térmica) for suficientemente alta ($\Gamma^\Phi \rightarrow \infty$). Embora esta condição não seja possível, ela será bem aproximada se a resistência ao fluxo de Φ no sólido for muito menor que a resistência à transferência de Φ entre o sólido e a sua vizinhança.

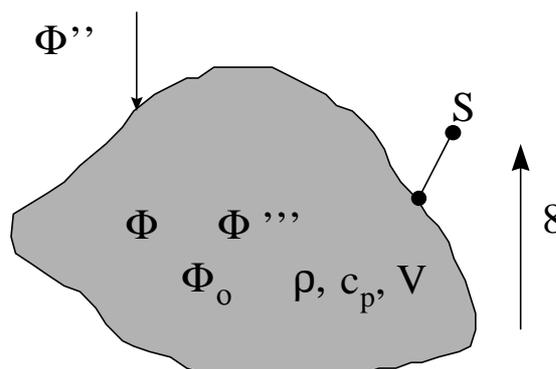


Figura 1. Corpo de forma arbitrária

Aplicando um balanço de Φ num elemento infinitesimal na superfície do sólido, em qualquer sistema de coordenadas, assumindo propriedades termo-físicas constantes e variações dimensionais desprezíveis, tem-se as seguintes equações para massa e energia, respectivamente:

$$V \frac{d\Phi}{dt} = -\Phi''S + \Phi'''V \quad (1)$$

$$V\rho \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\Phi''}{c_p}S + \frac{\Phi'''}{c_p}V \quad (2)$$

onde c_p , ρ , V e S são calor específico, densidade, volume e área do sólido úmido, respectivamente.

As quantidades Φ'' e Φ''' podem ser positivas ou negativas, podendo também serem constantes ou dependentes do tempo. Particularmente com respeito a energia, a quantidade Φ'' pode ser convectiva, radiativa, evaporativa e/ou aquecimento de vapor. A hipótese de ausência de gradientes de Φ internamente ao sólido não é apenas uma simplificação matemática, mas também uma forma simplificada para tratamento de problemas mais complexos (mais realista fisicamente). A presente formulação pode ser aplicada em regiões de transferência de calor e massa simultâneas. O caso particular ocorre quando os dois fenômenos são completamente independentes. Os dois fenômenos são acoplados quando adsorção e desorção na região são acompanhadas de efeitos térmicos.

2.1 Análise para transferência de massa

No caso de processos transientes de transporte de massa, Φ'' pode ser dado nas formas de convecção de massa e/ou reação heterogênea (resultante do contato entre os reagentes e uma superfície), enquanto que para Φ''' , pode ser dada por difusão com reações químicas homogêneas, por exemplo. As reações homogêneas envolvem a geração de espécies químicas no interior do sólido.

Assumindo condição convectiva para Φ'' e admitindo Φ''' constante, trocando-se Φ por \bar{M} , o teor de umidade do material em base seca, tem-se:

$$V \frac{d\bar{M}}{dt} = -h_m S (\bar{M} - \bar{M}_e) + \dot{M}V \quad (3)$$

com a seguinte condição inicial $\bar{M}(t=0) = \bar{M}_0$. Na equação (3), \bar{M}_e , h_m e \dot{M} indicam o teor de umidade de equilíbrio, o coeficiente de transferência de massa, a geração interna de massa por unidade de volume e o tempo, respectivamente.

Separando as variáveis da equação (3), integrando desde a condição inicial tem-se:

$$\frac{(\bar{M} - \bar{M}_e) - \frac{\dot{M}V}{h_m S}}{(\bar{M}_0 - \bar{M}_e) - \frac{\dot{M}V}{h_m S}} = \text{Exp} \left[- \left(\frac{h_m S}{V} \right) t \right] \quad (4)$$

Definindo as seguintes variáveis adimensionais:

$$S^* = \frac{SL_1}{V}; \quad P^* = \frac{\dot{M}L_1}{h_m S^* (\bar{M}_0 - \bar{M}_e)}; \quad Fo_m = \frac{Dt}{L_1^2}; \quad Bi_m = \frac{h_m L_1}{D} \quad \bar{M}^* = \frac{\bar{M} - \bar{M}_e}{\bar{M}_0 - \bar{M}_e} \quad (5)$$

substituindo na equação (4), obtém-se esta equação na forma adimensionalizada:

$$\bar{M}^* = P^* + (1 - P^*) \text{Exp} \left[-S^* Bi_m Fo_m \right] \quad (6)$$

Na equação (5), L_1 e D indicam um comprimento característico do sólido e a sua difusividade de massa, respectivamente

2.2 Análise para transferência de calor

Procedendo-se similarmente ao caso para transferência de massa e assumindo-se que na superfície do sólido ocorre convecção térmica, evaporação e aquecimento do vapor, trocando-se Φ por $\bar{\theta}$, a temperatura do sólido, a equação (2), pode ser escrita como:

$$\rho V \frac{d\bar{\theta}}{dt} = \frac{\left[h_c (\bar{\theta}_\infty - \bar{\theta}) + \frac{\rho_s V}{S} \frac{d\bar{M}}{dt} (h_{fg} + c_v (\bar{\theta}_\infty - \bar{\theta})) \right]}{c_p} S + \frac{\dot{q}V}{c_p} \quad (7)$$

com a seguinte condição de inicial $\bar{\theta}(t=0) = \bar{\theta}_o$. Para este caso, Φ''' pode ser, por exemplo para frutas, o calor de respiração. Na equação (7), h_c , h_{fg} , \dot{q} , c_v e $\bar{\theta}_\infty$ são o coeficiente de transferência de calor, o calor latente de vaporização da água, a geração interna de calor, o calor específico do vapor e a temperatura do sólido em equilíbrio com o meio externo, respectivamente.

Substituindo $\frac{d\bar{M}}{dt}$ e \bar{M} , das equações (3) e (4), na equação (7), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\theta}}{dt} = & \left\{ \left[\left(-\rho_s h_m (\bar{M}_o - \bar{M}_e) + \frac{\dot{M}V\rho_s}{S} \right) \frac{h_{fg}S}{\rho V c_p} \right] \text{Exp} \left[-\left(\frac{h_m S}{V} \right) t \right] + \right. \\ & \left. + \left[\frac{h_c S}{\rho V c_p} + \left(-\rho_s h_m (\bar{M}_o - \bar{M}_e) + \frac{\dot{M}V\rho_s}{S} \right) \frac{c_v S}{\rho V c_p} \text{Exp} \left[-\left(\frac{h_m S}{V} \right) t \right] \right] (\bar{\theta}_\infty - \bar{\theta}_o) \right\} + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} \quad (8) \end{aligned}$$

A equação diferencial ordinária de 1ª ordem, não-linear e não-homogênea, equação (8), até então não pode ser resolvida de forma fechada para fornecer uma solução exata. Contudo, mediante métodos numéricos, uma solução aproximada pode ser obtida. As soluções exatas da equação (8) podem ser obtidas, nas versões simplificadas. Por exemplo, negligenciando a energia necessária para aquecer o vapor de água desde a temperatura na superfície do sólido até a temperatura do fluido, esta equação reduz-se a:

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \left[\left(-\rho_s h_m (\bar{M}_o - \bar{M}_e) + \frac{\dot{M}V\rho_s}{S} \right) \frac{h_{fg}S}{\rho V c_p} \right] \text{Exp} \left[-\left(\frac{h_m S}{V} \right) t \right] + \left[\frac{h_c S}{\rho V c_p} \right] (\bar{\theta}_\infty - \bar{\theta}) + \frac{\dot{q}}{\rho c_p} \quad (9)$$

Resolvendo esta equação, usando a condição de contorno para a equação (7), tem-se que:

$$\begin{aligned} \bar{\theta} - \bar{\theta}_\infty = & \left[\frac{\left(-\rho_s h_m (\bar{M}_o - \bar{M}_e) + \frac{\dot{M}V\rho_s}{S} \right) h_{fg}}{h_m S \rho c_p - h_c S} - \frac{\dot{q}V}{h_c S} + (\bar{\theta}_o - \bar{\theta}_\infty) \right] \text{Exp} \left[-\left(\frac{h_m S}{V} \right) t \right] - \\ & - \left[\frac{\left(-\rho_s h_m (\bar{M}_o - \bar{M}_e) + \frac{\dot{M}V\rho_s}{S} \right) h_{fg}}{h_m S \rho c_p - h_c S} \right] \text{Exp} \left[-\left(\frac{h_m S}{V} \right) t \right] + \frac{\dot{q}V}{h_c S} \quad (10) \end{aligned}$$

Definindo os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned}
Fo_c &= \frac{\alpha t}{L_1^2}; & Bi_c &= \frac{h_c L_1}{k} & \bar{\theta}^* &= \frac{(\bar{\theta} - \bar{\theta}_\infty)}{(\bar{\theta}_o - \bar{\theta}_\infty)} & Q^* &= \frac{\dot{q} L_1}{S^* h_c (\bar{\theta}_\infty - \bar{\theta}_o)} \\
V^* &= \frac{h_c (\bar{\theta}_\infty - \bar{\theta}_o)}{h_{fg} h_m \rho_s (\bar{M}_o - \bar{M}_e)} & R^* &= \frac{\rho c_p (\bar{\theta}_\infty - \bar{\theta}_o)}{h_{fg} \rho_s (\bar{M}_o - \bar{M}_e)}
\end{aligned} \quad (11)$$

onde ρ_s é a densidade do sólido seco, k é a condutividade térmica do sólido e $\alpha=k/(\rho c_p)$, é a sua difusividade térmica; utilizando destes e dos parâmetros adimensionais apresentados anteriormente na equação (5) e rearranjando os termos, a equação (10) pode ser adimensionalizada assumindo a forma:

$$\bar{\theta}^* = \left(\frac{P^* - 1}{V^* - R^*} + Q^* + 1 \right) \text{Exp}[-S^* Bi_c Fo_c] - \left(\frac{P^* - 1}{V^* - R^*} \right) \text{Exp}[-S^* Bi_m Fo_m] - Q^* \quad (12)$$

A comparação das equações (6) e (12), evidencia a considerável vantagem em se exprimir o problema na forma adimensional, uma vez que as soluções não dependem das propriedades termo-físicas e das condições inicial e final do sólido. Assim, este procedimento simplifica a apresentação do equacionamento, a solução do problema e generaliza a aplicabilidade da equação em problemas transientes.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para demonstrar o mérito relativo da presente solução, no que diz respeito a usabilidade e limitações, foi decidido selecionar, como proposta de ilustração, algumas situações baseando-se nos parâmetros adimensionais apresentados. Para a geração dos resultados, foi implementado um programa computacional utilizando o Software Mathematica[®], considerando $D=3,428 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}$ e $\alpha=9,250 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$. Em virtude da difusividade térmica do sólido ser aproximadamente 270 vezes maior que sua difusividade de massa, os processos de transferência de calor e massa ocorrem simultaneamente com diferentes taxas, fazendo com que a primeira parcela da equação (12) tenda a zero mais rápido que a segunda

As Figuras 2, 3 e 4 evidenciam os efeitos dos parâmetros P^* , S^* e Bi_m no fenômeno de secagem, respectivamente. Vale salientar que ao estudar-se um dos efeitos citados, os demais parâmetros foram mantidos constantes.

A análise da Figura 2 mostra que, o limite do teor de umidade médio adimensional é o parâmetro P^* e que com o decréscimo deste parâmetro a taxa de secagem aumenta. No entanto o regime permanente é atingido praticamente no mesmo instante ($Fo_m \approx 1000$).

A Figura 3 mostra que o aumento do número de Biot de transferência de massa, tem-se um aumento na taxa de secagem do processo. Contudo vale salientar que existe um limite para este parâmetro adimensional que depende da geometria do corpo e da forma como este é definido. Este valor limite identifica o ponto em que a existência de gradientes de umidade dentro do sólido passa a ser significativo, a ponto da análise concentrada não mais poder ser usada com precisão para descrever o processo. Neste caso diz-se que o processo é controlado interna e externamente, e portanto a lei de Fick deve ser usada para prever o fenômeno. Para se ter uma idéia, Lima (1999) reporta valores máximo do $Bi_m=h_m L/D$, de 0,05 para elipsóide ($L_2/L_1=2,0$) e de 0,005 para esfera ($L_2/L_1=1,0$), onde $L=(L_2^2-L_1^2)^{1/2}$ e L_2 e L_1 são os semi-eixos maior e menor do elipsóide, respectivamente

A Figura 4 ilustra que, para valores fixados de L_1 , corpos com maior relação área/volume do corpo, atingem o regime permanente mais rápido, isto é, apresentam altas taxas de secagem. Contudo este efeito é menos visível para valores de $S^* > 0,5$.

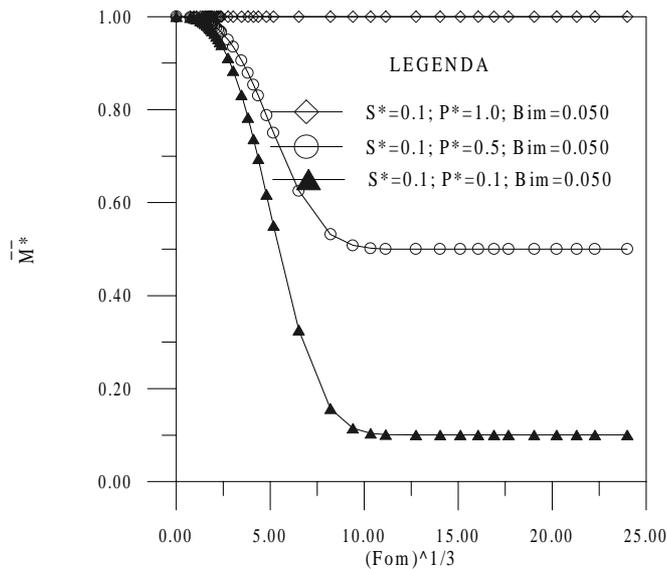


Figura 2. Teor de umidade médio adimensional em função do número de Fourier de transferência de massa evidenciando o efeito do parâmetro P^* .

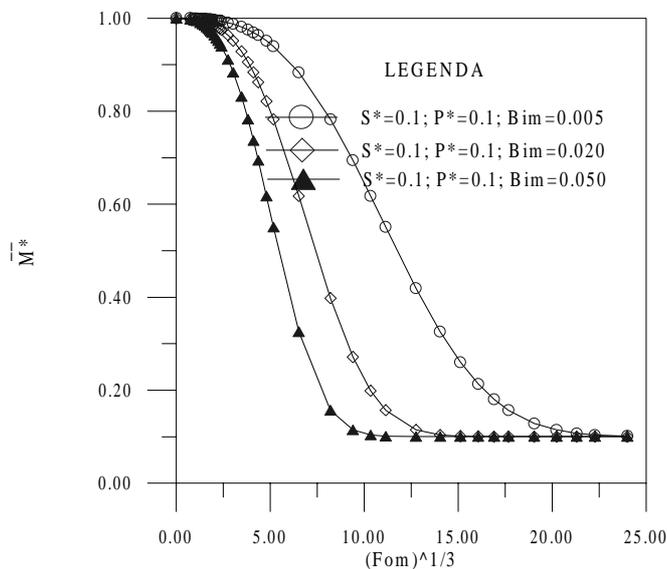


Figura 3. Teor de umidade médio adimensional em função do número de Fourier de transferência de massa evidenciando o efeito do parâmetro Bi_m .

A Figura 5 ilustra a variação da temperatura média do sólido em função do número de Fourier de transferência de calor (Fo_c) e dos vários parâmetros adimensionais. De uma análise comparativa entre as curvas pode-se verificar que um aumento do parâmetro V^* tem-se um aumento na taxa de aquecimento do sólido (curvas a e b). Por outro lado, um decréscimo do parâmetro Q^* permite um leve decréscimo da taxa de aquecimento, evidenciado pelo deslocamento sofrido pela curva c em relação a curva b.

Verifica-se também que o crescimento do parâmetro R^* ($R^* > V^*$) gera uma mudança radical no comportamento da curva de aquecimento, apresentado uma região em que a temperatura do sólido supera a do fluido, seguida de um resfriamento até atingir o equilíbrio térmico com o meio (curvas b e d). No entanto, com a redução do número de Biot para transferência de calor, devido ao decréscimo na taxa de aquecimento, este efeito é menos observado (curvas d e e e f e g).

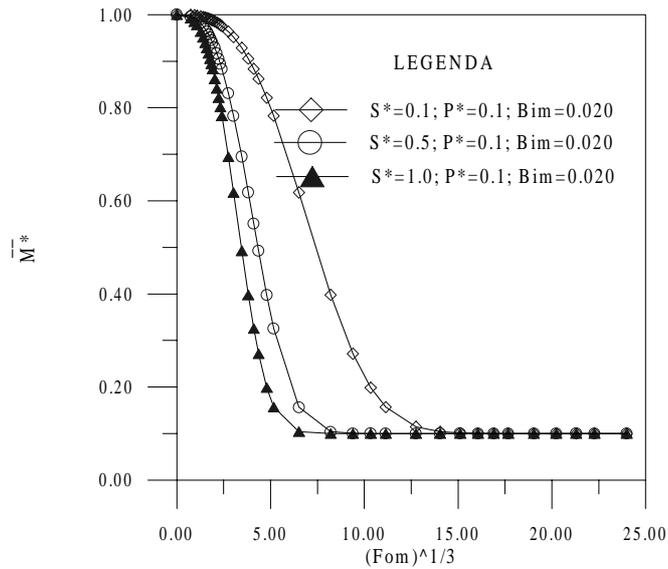
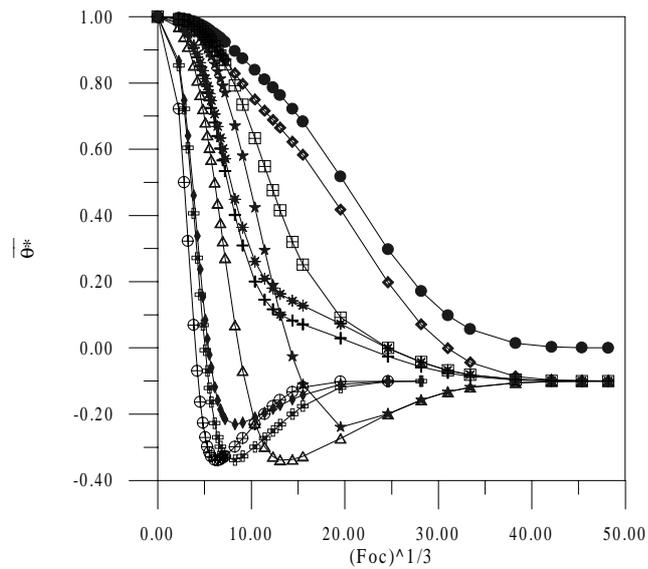


Figura 4. Teor de umidade médio adimensional em função do número de Fourier de transferência de massa evidenciando o efeito do parâmetro S^* .



LEGENDA

- +— $S^*=0.1$; $Bim=0.020$; $P^*=0.1$; $Q^*=0.1$; $Bic=0.020$; $R^*=1.0$; $V^*=5.0$
- ◇— $S^*=0.1$; $Bim=0.020$; $P^*=0.1$; $Q^*=0.1$; $Bic=0.020$; $R^*=1.0$; $V^*=2.0$
- $S^*=0.1$; $Bim=0.020$; $P^*=0.1$; $Q^*=0.0$; $Bic=0.020$; $R^*=1.0$; $V^*=2.0$
- △— $S^*=0.1$; $Bim=0.020$; $P^*=0.1$; $Q^*=0.1$; $Bic=0.020$; $R^*=5.0$; $V^*=2.0$
- ★— $S^*=0.1$; $Bim=0.020$; $P^*=0.1$; $Q^*=0.1$; $Bic=0.005$; $R^*=5.0$; $V^*=2.0$
- *— $S^*=0.1$; $Bim=0.020$; $P^*=0.1$; $Q^*=0.1$; $Bic=0.020$; $R^*=2.0$; $V^*=5.0$
- $S^*=0.1$; $Bim=0.020$; $P^*=0.1$; $Q^*=0.1$; $Bic=0.005$; $R^*=2.0$; $V^*=5.0$
- ⊠— $S^*=0.5$; $Bim=0.020$; $P^*=0.1$; $Q^*=0.1$; $Bic=0.020$; $R^*=5.0$; $V^*=2.0$
- ⊕— $S^*=1.0$; $Bim=0.020$; $P^*=0.1$; $Q^*=0.1$; $Bic=0.020$; $R^*=5.0$; $V^*=2.0$
- ◆— $S^*=0.5$; $Bim=0.020$; $P^*=0.5$; $Q^*=0.1$; $Bic=0.020$; $R^*=5.0$; $V^*=2.0$

Figura 5. Temperatura média adimensional em função do número de Fourier de transferência de calor para várias condições operacionais

O efeito do parâmetro S^* está evidenciado na comparação das curvas \underline{d} , \underline{h} e \underline{j} . Como pode ser visto, o aumento deste parâmetro permite um crescimento da taxa de aquecimento do sólido. O contrário ocorre com o crescimento de P^* , onde neste caso, a taxa de aquecimento do sólido decresce e a temperatura máxima do sólido é menor (curvas \underline{h} e \underline{j}).

4. CONCLUSÕES

Da análise dos resultados obtidos pode-se concluir que: o decréscimo do parâmetro P^* e o aumento do número de Biot, aumentam a taxa de secagem do sólido; para um valor de L_1 fixo, corpos com maior relação área/volume apresentam taxas de secagem mais elevadas; os parâmetros V^* e Q^* afetam diretamente a taxa de aquecimento do sólido, sendo que o Q^* tem menos efeito e finalmente, os parâmetros S^* e P^* também afetam a temperatura do sólido, sendo que o aumento do S^* decresce a taxa de aquecimento. Em contraste ocorre com o P^* , onde neste caso, a taxa de aquecimento do sólido decresce e a temperatura máxima atingida pelo sólido é menor.

5. REFERÊNCIAS

- Alvarenga, L. C., Fortes, M., Pinheiro Filho, J. B. Hara, T., 1980, “Transporte de Umidade no Interior de Grãos de Feijão Preto sob Condições de Secagem”, Revista Brasileira de Armazenamento, Vol. 5, n.1, Viçosa, Brasil, p. 5-18.
- Fortes, M., 1982, “Um Estudo Fundamental das Equações de Transporte de Massa e Energia em Meios Capilares Porosos”, Tese (Livre Docência), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, M.G., Brasil, 100 p.
- Fortes, M., Okos, M. R., 1980, “Advances in Drying”, Hemisphere Publishing Corporation, 1980, Washington, USA, Vol.1, p. 119-154.
- Ibrahim, M. H., Daud, W. R. W., Talib, M. Z. M., 1997, “Drying Characteristics of Oil Palm Kernels”, Drying Technology, Vol 15, n. 3-4, p. 1103-1117.
- Jayas, D. S., Cenkowski, S., Pabis, S., Muir, W. E., 1991, “Review of Thin-layer Drying and Rewetting Equations”, Drying Technology, Vol. 9, n. 3, p. 551-588.
- Keey, R.B., 1992, “Drying of Loose and Particulate Materials”, Hemisphere Publishing Corporation, New York, USA, 502 p.
- Lima, A. G. B., 1995, “Estudo da Secagem e Dimensionamento de Secador de Casulos do Bicho-da-seda”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande, P.B., Brasil, 190 p.
- Lima, A. G. B., 1999, “Fenômeno de Difusão em Sólidos Esferoidais Prolatos. Estudo de Caso: Secagem de Banana”, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, S.P., 265 p.
- Parry, J. L., 1985, “Mathematical Modelling and Computer Simulation of Heat and Mass Transfer in Agricultural Grain Drying. A Review”, Journal of Agricultural Engineering Research, Vol. 32, p. 1-29.
- Parti, M., 1993, “Selection of Mathematical Models for Drying Grain in Thin-layers”, Journal of Agricultural Engineering Research, Vol. 54, p. 339-352.
- Schneider, P. J., 1985, “Handbook of Heat Transfer: Fundamentals”, McGraw-Hill Book Company, New York, USA, p. 4.1-4.187.
- Strumillo, C., Kudra, T., 1986, “Drying: Principles, Science and Design. Gordon and Breach Science Publishers, New York, USA, 448 p.