

# EFEITO DO FENÔMENO DE ENCOLHIMENTO NA DIFUSÃO DE UMIDADE EM SÓLIDOS ESFEROIDAIS PROLATOS

**Antonio Gilson Barbosa de Lima<sup>1</sup>**

**Silvia Azucena Nebra<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Departamento de Engenharia Mecânica, CCT, Universidade Federal da Paraíba (UFPB), 58109-970, Campina Grande, PB, Brasil. E-mail: gilson@dem.ufpb.br

<sup>2</sup> Departamento de Energia, FEM, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 13083-970, Campinas, SP, Brasil. E-mail: sanebra@fem.unicamp.br

## Resumo

O efeito do encolhimento na difusão de umidade durante o processo de secagem é considerado. O método de volumes finitos é explorado para resolver o problema de encolhimento e transporte de umidade simultâneos, em corpos esferoidais prolatos. Equações adimensionais para difusão e encolhimento volumar e superficial são dadas, e soluções numéricas, para o caso bidimensional, com vários coeficiente de encolhimento são mostradas. A análise dos resultados evidencia que a taxa de secagem é maior, quando ocorre encolhimento, em comparação à obtida quando não se considera este efeito, e que esta mesma taxa cresce proporcionalmente ao aumento do coeficiente de encolhimento.

**Palavras-chave:** Modelagem, Difusão, Massa, Encolhimento, Numérico

## 1. INTRODUÇÃO

A dinâmica do movimento de umidade em um material biológico é de muito interesse prático, particularmente os processos de secagem e umidificação. Para descrever a transferência de umidade dentro do material e explicar os efeitos de certos parâmetros na sua cinética de secagem, é necessário que o transporte de umidade dentro de uma partícula individual do material, seja muito bem representada por um modelo matemático. Vários parâmetros afetam a cinética de secagem de produtos biológicos, tais como: mecanismo de transporte de calor e umidade dentro do sólido; coeficiente de difusão variável, transferência de calor e massa simultâneas; condições ambientais externas na vizinhança da partícula, encolhimento, entre outros. Assim, inserindo-se ao máximo estes efeito dentro dos modelos matemáticos, torna-se possível descrever com grande realismo o fenômeno físico, e aumentar consideravelmente a confiabilidade dos resultados obtidos. Encolhimento de materiais sólidos durante a secagem é um fenômeno físico observável, que ocorre simultaneamente com a difusão de umidade, principalmente em produtos biológicos alto teor de umidade inicial como é o caso de frutas e vegetais. Assim sendo, o encolhimento pode ter um significativo efeito na difusividade de massa, e conseqüentemente na taxa de remoção de umidade. Considerar-se o volume do corpo, fixo durante a secagem, tem gerado erros maiores entre os dados experimentais e teóricos, em comparação com os observados ao considerar-se este efeito na cinética de secagem. Vale salientar que materiais deformáveis, por exemplo madeira, o encolhimento é pequeno, geralmente menor que 15%, (Puiggali & Quintard, 1992).

Considerar os feitos de encolhimento nos modelos de secagem é bastante complicado em virtude da falta de informações na literatura sobre os coeficientes de encolhimento, assim como de relações matemáticas entre a difusividade de massa, encolhimento e densidade da matéria seca. Apesar deste inconveniente, vários trabalhos incluem o efeito de encolhimento volumar no estudo do processo de secagem, fornecendo interpretações teóricas sobre o mesmo, (Misra & Young, 1980 e Sokhansanj & Patil, 1996). Contudo, ao conhecimento dos autores, relativamente pequena pesquisa tem sido dada na literatura sobre estudos do fenômeno de encolhimento em problemas bidimensionais (Fusco et al., 1991; Jomaa & Puiggali, 1991), e tridimensional (Rovedo et al., 1995).

O estudo do fenômeno de encolhimento é de fundamental importância para melhor elucidar o fenômeno de secagem, fornecer subsídios para realizar-se secagem ótima sob o ponto de vista energético, e prevenir trincas no interior do sólido, durante o processo. O objetivo deste trabalho é examinar o efeito do encolhimento no fenômeno de difusão de sólidos esferoidais prolatos. O modelo matemático utilizando o método de volumes finitos apresentado por Lima et al. (1997), Lima & Nebra (1997), Lima & Nebra (1999), Lima (1999) e Lima & Nebra (2000) será aplicado para estudo dos sólidos com diferentes formas, que variam desde esfera até cilindro, inclusive elipsóides de revolução. Estes autores obtiveram soluções numéricas para estas geometrias, considerando coeficiente de difusão constante e negligenciando o encolhimento do material. Aqui é apresentada relações matemáticas de encolhimento que foi incorporada ao modelo original, considerando que o volume do corpo varia linearmente com a diferença entre o teor de umidade médio inicial do sólido e o seu teor de umidade médio em qualquer instante do processo.

## 2. MODELAGEM MATEMÁTICA

Tendo por base informações prévias de trabalhos experimentais e teóricos sobre encolhimento de produtos biológicos, assim como do modelo utilizado, as seguintes considerações foram assumidas:

- Dilatação devido a elevação de temperatura do sólido durante a secagem é desprezível;
- o encolhimento elástico devido a contrações no encolhimento livre exercida pelas células adjacentes é negligenciada. Assim, as ações de forças puramente mecânicas intercelulares são desprezíveis;
- o encolhimento plástico é desprezível;
- o encolhimento durante a secagem, devido a perda de umidade varia linearmente com o teor de umidade médio do sólido;
- O produto é assumido ser homogêneo;
- O processo de difusão na partícula individual ocorre sob taxa decrescente, e portanto o encolhimento ocorre abaixo do ponto de saturação;
- O teor de umidade é considerado axi-simétrico em torno do eixo z e constante e uniforme no início do processo;
- As propriedades termofísicas foram assumidas serem independente da posição no interior do produto e do seu teor de umidade;
- o fenômeno ocorre sob condição convectiva na superfície,
- o material é composto unicamente de água na fase líquida e matéria sólida.

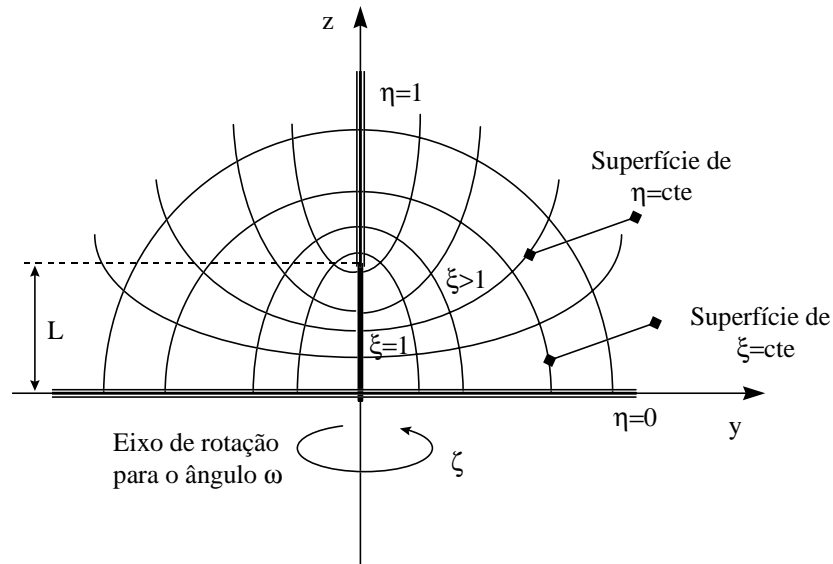
Com as hipóteses dadas acima, a equação de difusão de massa em coordenadas esferoidais prolato ( $\eta$  e  $\xi$ ) (Figura 1), assumindo simetria com respeito ao eixo x, tem a forma:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \left[ \frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( (\xi^2 - 1) D \frac{\partial M}{\partial \xi} \right) \right] + \left[ \frac{1}{L^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( (1 - \eta^2) D \frac{\partial M}{\partial \eta} \right) \right] \quad (1)$$

Como esta equação diferencial parcial é de segunda ordem, na posição e de primeira ordem no tempo, a sua solução requer no mínimo duas condições de contorno. As condições de contorno são:

$$-\frac{D}{L} \sqrt{\frac{(\xi^2 - 1)}{(\xi^2 - \eta^2)}} \frac{\partial M}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_f} = h_m [M(\xi = \xi_f, \eta, t) - M_e] \quad M(\xi, \eta, t=0) = M_0 = \text{cte} \quad (2)$$

Nas equações (1) e (2),  $M$ ,  $D$ ,  $h_m$  indicam o teor de umidade, o coeficiente de difusão e o coeficiente de transferência de massa, respectivamente. O parâmetro  $L = (L_2^2 - L_1^2)^{1/2}$  indica o comprimento focal do elipsóide, sendo  $L_2$  e  $L_1$  mostrados na Figura 2. As grandezas  $\eta$  e  $\xi$  são as coordenadas esferoidais angulares e radiais, respectivamente.



**Figura 1.** Sistema de coordenadas esferoidal prolato

Considerando por definição as seguintes variáveis adimensionais:

$$M^* = \frac{M - M_e}{M_0 - M_e} ; \eta^* = \eta ; \xi^* = \xi ; V^* = \frac{V}{L^3} ; Fo = \frac{Dt}{L^2} ; S^* = \frac{S}{L^2} ; Bi = \frac{h_m L}{D} \quad (3)$$

substituindo na equação (1), e discretizando o resultado obtido, considerando uma formulação implícita e a prática B (Patankar, 1980 e Maliska, 1995) obtém-se a seguinte equação:

$$A_p M_p^* = A_E M_E^* + A_W M_W^* + A_N M_N^* + A_S M_S^* + A_p^0 M_p^{*0} \quad (4)$$

Maiores detalhes do sistema de coordenadas esferoidal prolato, da formulação numérica, dos métodos de solução do conjunto de equações gerado e o critério de convergência são encontrados nas referências Lima et al. (1997), Lima & Nebra (1997), Lima & Nebra (1999), Lima (1999) e Lima & Nebra (2000). Na equação (3),  $S$ ,  $V$ ,  $Fo$  e  $Bi$ , representam a área, o volume do sólido e os números de Fourier e Biot de transferência, respectivamente.

Neste modelo, o encolhimento volumar existe, e então o volume do corpo é mudado a cada intervalo de tempo. Normalmente é assumido que o material se contrai linearmente com o teor de umidade. No caso de materiais biológicos, o encolhimento pode ser anisotrópico, modificando a estrutura. Baseando-se nos trabalhos de Keey (1992), Queiroz (1994), Queiroz

& Nebra (1996) e Sokhansanj & Patil (1996), os autores propõem uma equação para a determinação do volume do corpo em qualquer tempo. A seguinte relação para encolhimento volumétrico abaixo do ponto de saturação, foi assumida:

$$(V)_t = V_o(\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 \bar{M}) \quad (5)$$

Para a determinação do volume em um certo intervalo de tempo, considere a Figura 1. Como assumido, considerou-se que a taxa de variação de  $L_1$  relaciona-se à taxa de variação de  $L_2$ , de tal forma que a relação  $L_2/L_1$ , permanece constante durante todo o processo. Assim, o coeficiente angular da reta  $rr$  na Figura 2 é constante em cada instante de tempo. Isto é  $Tg\theta=(L_2/L_1)_t=cte$ .

Desde que, em  $t=0$ ,  $\bar{M} = \bar{M}_o$  e  $(V)_t = V_o$ , tem-se por substituição direta na equação 5:

$$\frac{(V)_t}{V_o} = 1 - \bar{\beta}_2(\bar{M}_o - \bar{M}) \quad (6)$$

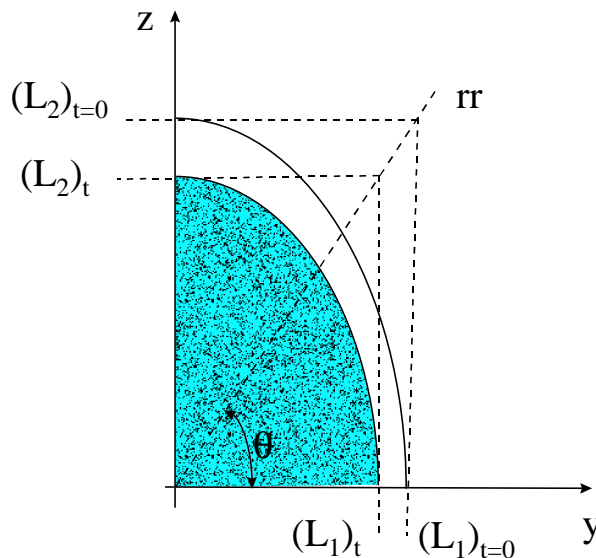
ou ainda, na forma adimensional:

$$\frac{(V)_t^*}{V_o^*} = 1 - \bar{\beta}(\bar{M}_o^* - \bar{M}^*) \quad (7)$$

com  $\bar{\beta} = (\bar{M}_o - \bar{M}_e)\bar{\beta}_2$ . Assim, conhecendo-se o valor do parâmetro  $\bar{\beta}$ , determina-se o novo volume do corpo em qualquer instante do processo. Contudo, devido ao realismo físico, o seu valor deve ser positivo e finito. Assim, pode-se mostrar que o intervalo de validade dos coeficientes de encolhimento  $\bar{\beta}_2$  e  $\bar{\beta}$  serão:

$$0 \leq \bar{\beta}_2 < \left[ \frac{1}{(\bar{M}_o - \bar{M}_e)} \right] \quad \text{e} \quad 0 \leq \bar{\beta} < 1 \quad (8)$$

onde a igualdade é válida para a condição de não-existência de encolhimento.



**Figura 2.** Encolhimento de um sólido esférico prolatado durante o processo de difusão

Por outro lado, conhecendo-se o volume de um elipsóide, (Provenza, 1989):

$$(V)_t = \frac{4}{3}\pi(L_2)_t(L_1)_t^2 \quad (9)$$

e da relação:

$$\left(\frac{L_2}{L_1}\right)_t = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)_{t=0} = \text{Tg } \theta \quad (10)$$

pode-se determinar as dimensões do corpo em qualquer instante.

O encolhimento de uma partícula quando esta sendo secada, também causa uma contração da área superficial do corpo, e portanto da área exposta à energia que está produzindo o fenômeno. No caso de esferóide prolato  $L_2 > L_1$ , sua área superficial é dada por, (Pólya & Szegö, 1945):

$$(S)_t = 2\pi(L_1)_t(L_2)_t \left\{ \frac{(L_1)_t}{(L_2)_t} + \frac{\arcsen \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{(L_1)_t}{(L_2)_t}\right)^2} \right]}{\sqrt{1 - \left(\frac{(L_1)_t}{(L_2)_t}\right)^2}} \right\} \quad (11)$$

Desta forma a área superficial pode ser obtida em qualquer instante do processo, e a redução da área é determinada.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Um programa computacional foi implementado para simular a transferência de umidade e encolhimento simultâneas, durante a secagem de sólidos esferoidais prolatos. Como aplicação foi selecionado três sólidos com razões de aspecto  $L_2/L_1=1.1, 1.5$  e  $5.0$ ,  $Bi$  infinito e com o coeficiente de encolhimento variando de  $0.0$  até  $0.6$ .

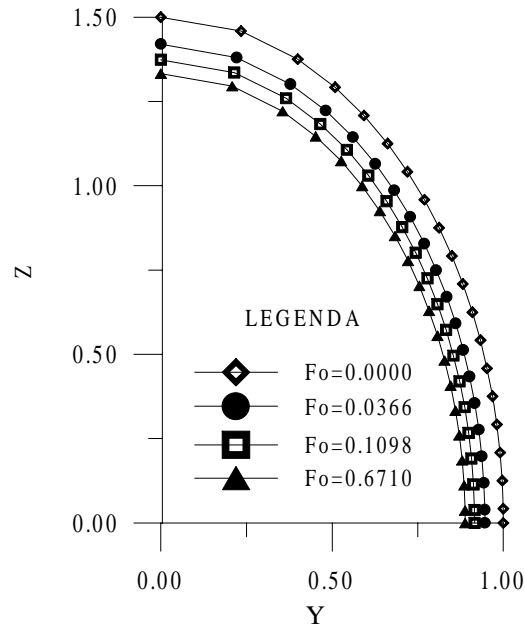
De acordo com a Figura 2, o encolhimento esta direcionado sobre a reta  $rr$ , proporcionando um encolhimento unidimensional. Contudo, diferentes deformações são geradas nas direções  $y$  e  $z$ , dando ao fenômeno um caráter bidimensional. A Figura 3 apresenta a forma do material durante a secagem, em vários números de Fourier, considerando-se o coeficiente de encolhimento fixo e igual a  $0.3$ . como pode ser observado, o encolhimento no eixo  $z$  é maior que no eixo  $y$ . Este comportamento esta em concordância com os resultados numéricos apresentados por Lima & Nebra (1997), onde afirmam que na região próxima de  $L_2$ , o material seca com maior velocidade, a medida que a razão de aspecto  $L_2/L_1$  cresce. Assim, tal como foi assumido, a contração do material contrabalança exatamente a perda de umidade.

A Figura 4 apresenta o teor de umidade com função do número de Fourier,  $\bar{\beta}=0.0; 0.3$  e  $0.6$ . É evidente a significativa influência do encolhimento na taxa de remoção de umidade. Observa-se que o crescimento do coeficiente de encolhimento reduz o número de Fourier. Este mesmo efeito é ilustrado nas Figuras 5a e 5b, onde apresenta-se a distribuição do teor de umidade no interior do sólido, para  $Fo=0.1098$ , com  $\bar{\beta}=0.0$  (sem encolhimento) e  $\bar{\beta}=0.3$ .

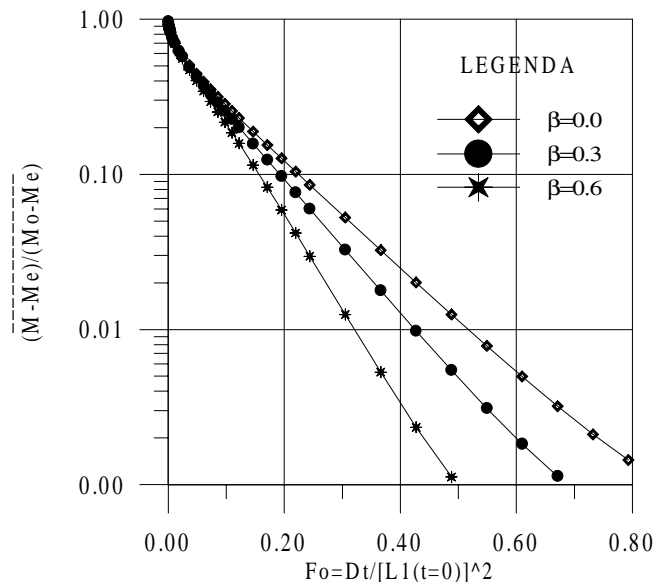
Do ponto de vista prático, o aumento no coeficiente de encolhimento adimensional  $\bar{\beta}$  pode ser obtido: aumentando o teor de umidade inicial do material; decrescendo o teor de umidade de equilíbrio do material, que geralmente, para a maioria deles, ocorre devido a uma

elevação da temperatura e/ou um decréscimo da umidade relativa do ar de secagem, e finalmente, aumentando o coeficiente de encolhimento real do produto  $\bar{\beta}_2$ . Geralmente produtos biológicos com teores de umidade elevados (>70%), tais como frutas e vegetais, apresentam coeficientes de encolhimento maiores.

Convém ressaltar que a dependência entre a umidade relativa e a temperatura do ar com o teor de umidade de equilíbrio de um particular produto, se dá através da isoterma de sorção deste produto.



**Figura 3.** Variações dimensionais de um sólido esferoidal prolato com razão de aspecto  $L_2/L_1=1.5$ ,  $\bar{\beta}=0.3$  e Bi infinito, durante a secagem.

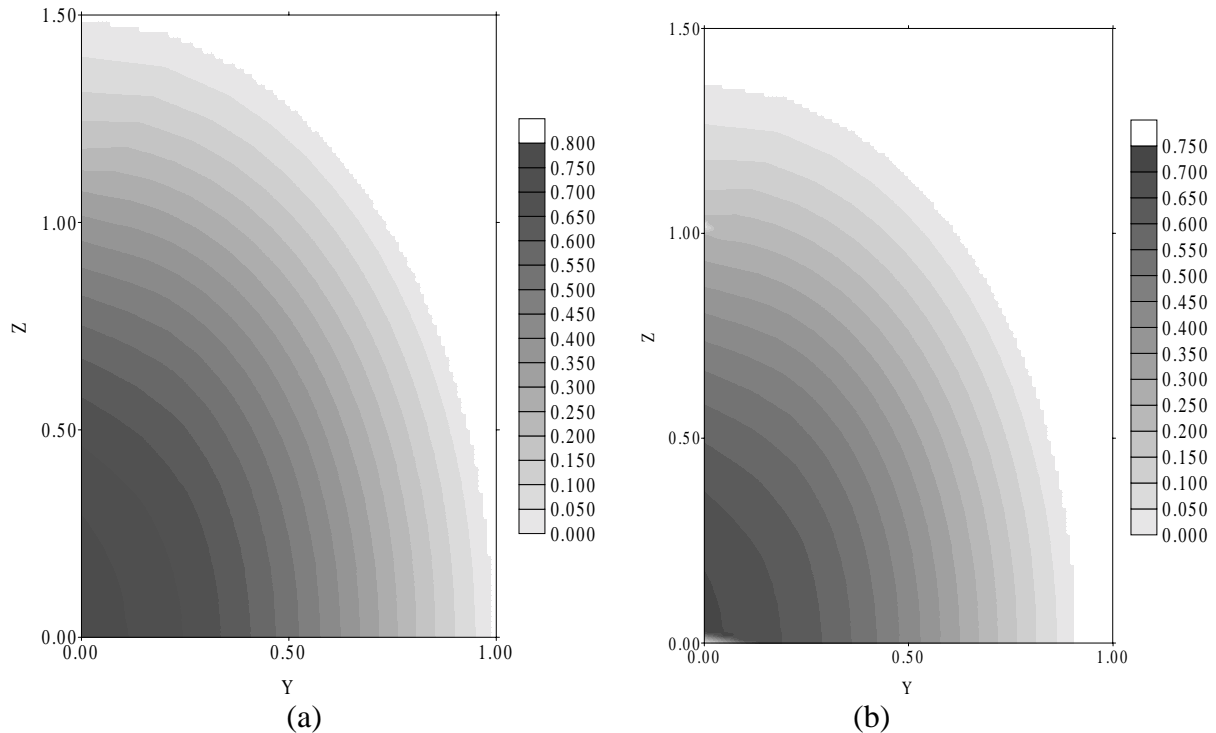


**Figura 4.** Efeito do coeficiente de encolhimento na cinética de secagem de um esferóide com razão de aspecto  $L_2/L_1=1.5$  e Bi infinito

A Figura 6 ilustra o efeito das dimensões do corpo na cinética de secagem de elipsóides de revolução com razões de aspecto  $L_2/L_1=1.1, 1.5$  e  $5.0$ . Observa-se que corpos com razão de

aspecto menor secam mais rápido, tendo em vista que estes possuem um volume menor e uma relação área/volume maior.

O fato da relação área/volume afetar as taxas de transferência, tanto de massa quanto de calor, tem levado pesquisadores a definir o número de Biot, tendo como comprimento característico o inverso desta relação (Sokhansanj, 1987). Desta forma, se a relação área/volume do corpo se modifica (devido, por exemplos, a encolhimento ou dilatação), conseqüentemente haverá uma modificação no número de Biot, que por sua vez originará uma mudança nas taxas de transferência, modificando as cinéticas de difusão de calor e/ou massa do material.

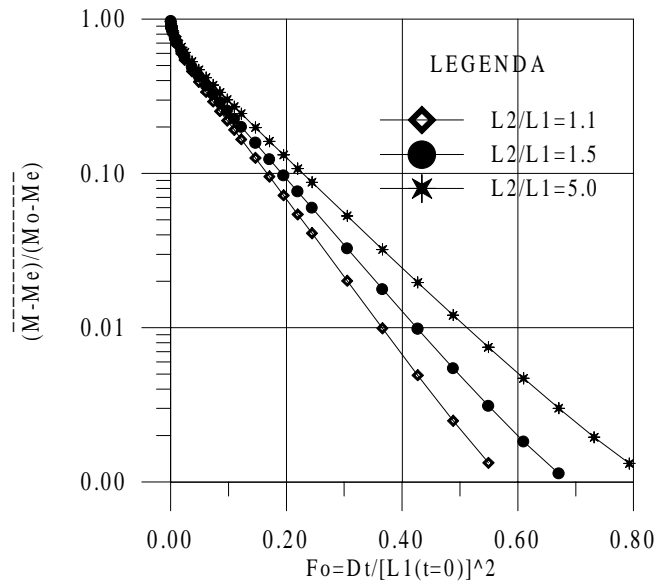


**Figura 5.** Distribuição do teor de umidade no interior de um esferóide prolato com razão de aspecto  $L_2/L_1=1.5$  e Bi infinito para  $\bar{\beta}=0.0$  (4a) e  $\bar{\beta}=0.3$  (4b), em  $Fo=0.1098$

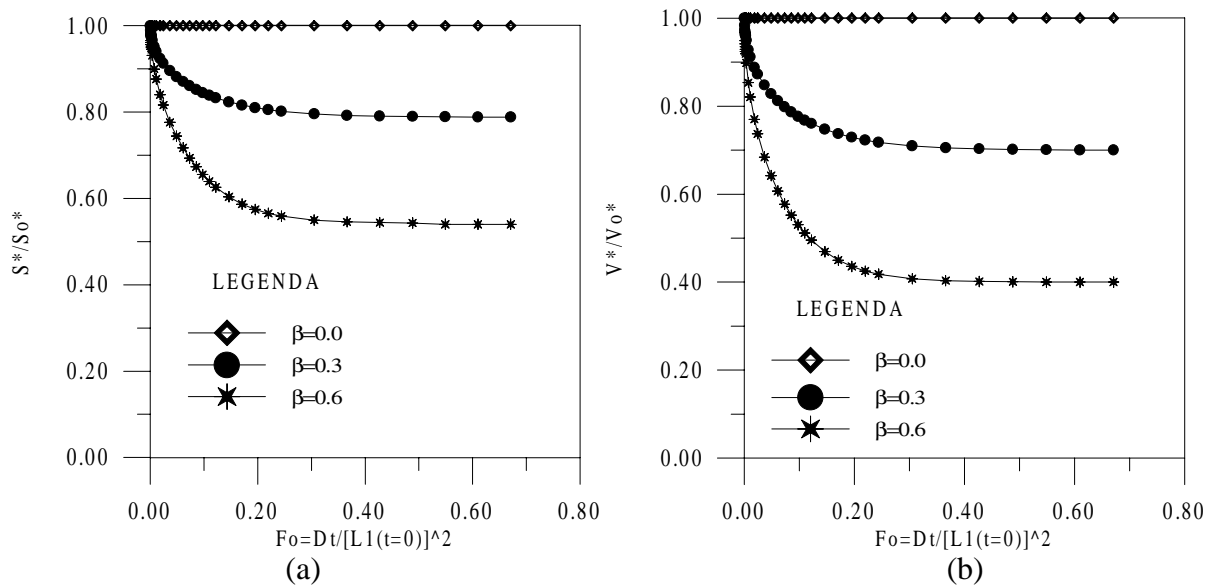
Na Figura 7a é apresentado a contração da área do corpo como função do número de Fourier, durante o fenômeno de difusão, para três valores do coeficiente de encolhimento. A Figura 7b ilustra a contração volumétrica do corpo para as mesmas condições. Nas curvas, é evidente que o comportamento do encolhimento em ambos os casos são muito similares às clássicas curvas de secagem. Enquanto o volume do sólido variou 0, 30 e 60 %, respectivamente, sua área se contraiu 0, 21 e 46 %, respectivamente.

Do exposto, convém dá maior atenção ao estudo quantitativo das variações de área superficial e volume durante o processo de desidratação, especialmente em condições mais complexas, como por exemplo, deformações multi-direcionais e condições não-isotérmicas simultâneas. Deformações multi-direcionais ocorrem por exemplo, na secagem para obtenção de uva-passa, onde no final da secagem o produto apresenta-se com uma textura totalmente enrugada, ao contrário do que o modelo aqui considerado assume.

Nesta formulação, considera-se que todo o volume de água evaporada do sólido é igual a diminuição de volume que o sólido sofre, durante o processo de secagem. Contudo, vale ressaltar que para a maioria dos produtos biológicos e, particularmente para os estágios finais de secagem, esta relação de linearidade não é verdadeira. Geralmente nestes casos, a variação de volume do sólido é menor que o volume da água removida (Suzuki et al., 1976).



**Figura 6.** Teor de umidade em função do número de Fourier para três esferóides prolatos com  $L_2/L_1=1.1, 1.5$  e  $5.0$ , para  $\bar{\beta}=0.3$  e  $Bi$  infinito.



**Figura 7.** Cinética de encolhimento superficial (6a) e volumar (6b) de um elipsóide de revolução com razão de aspecto  $L_2/L_1=1.5$ ,  $Bi$  infinito para  $\bar{\beta}=0.0, 0.3$  e  $0.6$ .

Como um comentário final, nenhum resultado analítico ou experimental foi comparado com os dados numéricos. Contudo, os resultados obtidos são gerais, independentes do tipo de material e suas propriedades física, térmica, química ou mecânica, e podem ser utilizados em qualquer corpo com geometria esférica.

O realismo físico dos resultados evidencia a correta metodologia usada, e a aplicabilidade da solução numérica para descrever o problema aqui considerado. Apesar de, neste estudo, como aplicação, é dada maior ênfase a corpos com razão de aspecto  $L_2/L_1=1.5$ , o modelo pode ser estendido para qualquer geometria que varie desde esfera ( $L_2/L_1=1.0$ ) até cilindro ( $L_2/L_1 \rightarrow \infty$ ), inclusive elipsóides de revolução ( $1.0 < L_2/L_1 < \infty$ ), podendo também ser usado para solucionar problemas de transferência de calor e dilatação/contração de sólidos.



#### 4. REFERÊNCIAS

- Fusco, A. J.; Aguerre, r. J.; Gabitto, J. F., 1991, "A diffusional model for drying with volume change"; *Drying Technology*, Vol. 9, n.2, p.397-417.
- Jomaa, W.; Puiggali, J.R., 1991, "Drying of shrinkage materials: modellings with shrinkage velocity"; *Drying Technology*, Vol. 9, n.5, p.1271-1293
- Keey, R. B., 1992, "Drying of loose and particulate materials", Hemisphere Publishing Corporation, New York, USA, 502 p.
- Lima, A. G. B., Nebra, S. A., 1997, "Influência de parâmetros geométricos na cinética de secagem de elipsóides sólidos"; XXV ENEMP - XXV Congresso Brasileiro de Sistemas Particulados, São Carlos. Vol.1, p. 195-202.
- Lima, A. G. B.; Nebra, S. A., "Heat conduction process modeling in prolate spheroids". In XX Iberian Latin-American Congress on Computational methods in Engineering, 1999, São Paulo. *Proceedings...*, CD-ROM
- Lima, A. G. B., 1999, "Fenômeno de Difusão em Sólidos Esferoidais Prolatos. Estudo de Caso: Secagem de Banana", Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, S.P., 265 p.
- Lima, A. G. B., Nebra, S. A., Altemani, C. A. C., 1997, "Simulation of the drying kinetics of the silkworm cocoon considering diffusive mechanism in elliptical coordinate"; *Proceedings of the Inter-American Drying Conference*, Vol. B, Itu, Brazil, p. 317-324.
- Lima, A. G. B., Nebra, S. A., 2000, "Theoretical analysis of the diffusion process inside prolate spheroidal solids", *Drying Technology*, Vol. 18, n. 1&2, p.21-48.
- Misra, R. N.; Young, J. H., 1980, "Numerical solution of simultaneous moisture diffusion and shrinkage during soybean drying"; *Transactions of the ASAE*, Vol. 23, p. 1277-1282.
- Pólya, G.; Szegö, G., 1945, "Inequalities for the capacity of a condenser"; *American Journal of Mathematics*, Vol. LXVII, p. 1-32.
- Provenza, F., 1989, "Projetista de Máquinas", Editora F. Provenza, São paulo, S.P., Brasil, pp. 2.47.
- Puiggali, J. R.; Quintard, M., 1992, "Advances in Drying", Hemisphere Publishing Corporation, Vol.5, New York, USA, p. 109-143.
- Queiroz, M. R., 1994, "Estudo Teórico-Experimental da Cinética de Secagem de Bananas". Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, campinas, S.P., Brasil, 176p.
- Queiroz, M. R.; Nebra, S. A., 1996, "Theoretical and Experimental Analysis of the Drying Kinetics of Bananas"; *Proceedings of the International Drying Symposium*, Part. B, Krakow, Poland, p. 1045-1052.
- Rovedo, C. O.; Suarez, C.; Viollaz, P. E., 1995, "Drying Simulation of a Solid with Three Dimensional Shrinkage"; *Drying Technology*, Vol. 13, n.1 e 2, p.371-393.
- Sokhansanj, S.; Patil, R. T., 1996, "Kinetics of Derydration of Green Alfafa"; *Drying Technology*, Vol. 14, n.5, p.1197-1234.
- Sokhansanj, S., 1987, "Improved heat and mass transfer models to predict grain quality"; *Drying Technology*, Vol. 5, n.4, p.511-525.
- Suzuki, K.; Kubota, K.; Hasegawa, T.; Hosaka, H., 1976, "Shrinkage in dehydration of root, vegetables"; *Journal Food Science*, Vol. 41, p.1189-1194.