

FENÔMENOS DE DIFUSÃO TRANSIENTE EM PARALELEPÍPEDOS SÓLIDOS

José Jefferson da Silva Nascimento¹

Francisco Antônio Belo²

Antonio Gilson Barbosa de Lima³

Luiz Renato de Araújo Pontes⁴

^{1,2,4}Universidade Federal da Paraíba, Centro de Tecnologia, Departamento de Tecnologia Mecânica, Cep 58059900, João Pessoa, PB, Brasil. E-mail: belo@les.ufpb.br

^{1,3}Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica, 58109-970, Campina Grande, PB, Brasil. E-mail: gilson@dem.ufpb.br.

Resumo

A solução da equação de difusão transiente é muito importante tecnologicamente, especialmente na secagem de materiais cerâmicos, onde torna-se necessário conhecer a distribuição de temperatura e umidade no interior dos mesmos. A solução analítica da equação de difusão aplicada a geometria paralelepípeda, considerando propriedades de transporte constante e condição de contorno convectiva é apresentada. Como aplicação, o modelo foi usado para descrever a transferência de calor em um tijolo cerâmico e resultados da temperatura adimensional no interior do sólido ao longo do processo são apresentadas. Discussões do ponto de vista da secagem deste sólido também são dadas.

Palavras- chave: Difusão, Massa, Calor, Cerâmica, Analítico.

1. INTRODUÇÃO

A secagem é um processo de transferência de calor e massa e variações dimensionais simultâneas. Os materiais cerâmicos são classificados de acordo com a temperatura de queima, como: cerâmica tradicional (telhas, tijolos, objetos decorativos, etc.), técnica (pisos e revestimentos, louça de mesa, porcelana, etc.) e avançada (caixa de motores, revestimentos de naves espaciais, próteses dentárias, etc.), Norton (1975). Durante o processo de secagem de um produto mineral argiloso como é o caso dos tijolos de cerâmica vermelha usada na construção civil, ocorrem significativas variações de temperatura e umidade dentro do sólido, que podem gerar fortes tensões termo-mecânicas, podendo ocasionar trincas, fraturas e deformações, comprometendo a qualidade final do produto. Soluções analíticas da equação de difusão para esfera, cilindros, placas e paralelepípedos são reportadas por Gebhart (1993), Özisik (1985), Luikov (1968), Kakaç & Yener (1993). Para sólidos esféricos prolatos, pode ser citado os trabalhos de Lima *et al.* (1999) e Lima (1999). O objetivo desta pesquisa é desenvolver uma solução analítica tridimensional transiente para descrever a transferência de calor e massa no interior de paralelepípedos sólidos considerando propriedades constantes e condição de contorno convectiva,

direcionando o estudo para materiais cerâmicos. Procurando situar o avanço atual desta pesquisa, constatou-se que vários trabalhos sobre difusão de calor e massa em materiais cerâmicos para o caso unidimensional podem ser encontrados na literatura, (Nishikawa *et al.* 1994; Santos & Baldo, 1995; Nishikawa *et al.* 1995; Pereira *et al.* 1995), no entanto a conhecimento dos autores nenhum trabalho com abordagem tridimensional foi encontrado. Neste sentido, esta pesquisa é incipiente na forma como está abordada neste trabalho.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Visando simplificar o modelo matemático proposto as seguintes considerações são adotadas:

- Propriedades termofísicas constantes;
- Sem geração interna de energia;
- Corpo homogêneo e isotrópico;
- Distribuição da propriedade uniforme no início do processo;
- Simetria em torno do centro do sólido;
- Condição de contorno convectiva na superfície do sólido.
- Não-existência de variação de volume;

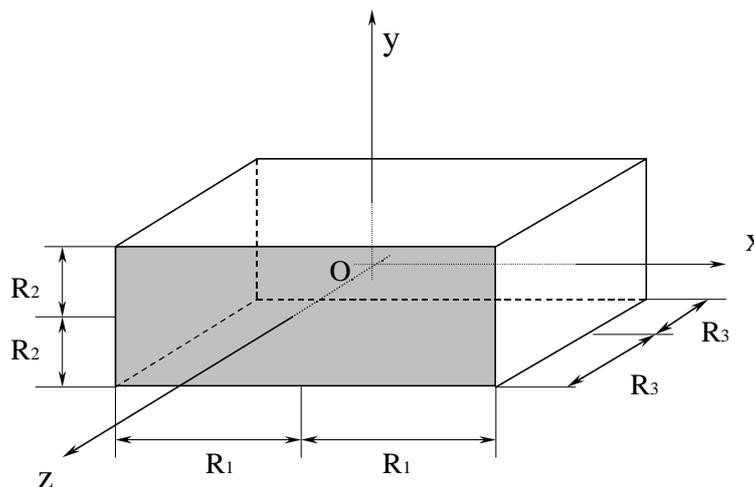


Figura 1 Configuração geométrica do problema físico

Considere a figura 1, que representa um paralelepípedo sólido de dimensões $2R_1 \times 2R_2 \times 2R_3$. A equação diferencial geral que descreve o fenômeno de difusão neste sólido é da forma:

$$\frac{\partial(\xi\Phi)}{\partial t} = \nabla \cdot (\Gamma^\Phi \nabla \Phi) + \Phi''' \quad (1)$$

Onde $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$ é o operador diferencial ou nabla.

Na equação (1), têm-se para massa $\xi = \rho$; $\Phi = M$; $\Gamma^\Phi = \rho D$; onde ρ , M e D são a densidade, teor de umidade e coeficiente de difusão do sólido respectivamente, enquanto que para

a temperatura $\xi = \rho c_p$; $\Phi = T$; $\Gamma^\Phi = k$, onde c_p , T e k são o calor específico, temperatura e condutividade térmica do sólido, respectivamente. Φ'' é ageração interna de massa ou energia.

Devido a simetria que existe, considera-se apenas 1/8 do volume do sólido. Sendo assim as condições inicial, de simetria e de contorno para o problema são as seguintes:

□ Condição inicial:

$$\Phi(x, y, z, t = 0) = \Phi_0 \quad (2)$$

□ Condição de simetria:

$$-\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial x} = -\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial y} = -\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial z} = 0 \quad \text{em } x=0, y=0, z=0 \text{ e } t>0 \quad (3)$$

□ Condições de contorno na superfície :

$$-\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial x} = h[\Phi(x, y, z, t) - \Phi_\infty] \quad \text{em } t>0 \text{ e } x= R_1 \quad (4)$$

$$-\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial y} = h[\Phi(x, y, z, t) - \Phi_\infty] \quad \text{em } t>0 \text{ e } y= R_2 \quad (5)$$

$$-\Gamma^\Phi \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial z} = h[\Phi(x, y, z, t) - \Phi_\infty] \quad \text{em } t>0 \text{ e } z= R_3 \quad (6)$$

onde Φ_∞ representa a temperatura do fluido externo ao sólido ou o seu teor de umidade de equilíbrio.

A resolução da equação diferencial de difusão tridimensional transiente com as condições de contorno especificadas nas equações (4), (5), (6) é obtida pela superposição de problemas unidimensionais em coordenadas cartesianas e no tempo de placas infinitas, cuja interseção forma o paralelepípedo, Gebhart (1993). Assim realizando uma seqüência de procedimentos matemáticos obtêm-se a equação (7), solução geral do problema proposto:

$$\Phi^*(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{n1} A_{m2} A_{k3} \text{Cos}(\beta_{n1}x) \text{Cos}(\beta_{m2}y) \text{Cos}(\beta_{k3}z) e^{-[\beta_{n1}^2 + \beta_{m2}^2 + \beta_{k3}^2] \frac{\Gamma^\Phi}{\xi} t} \quad (7)$$

onde:

$$\Phi^* = \frac{\Phi - \Phi_\infty}{\Phi_0 - \Phi_\infty} \quad (8)$$

As constantes A_{ij} são determinadas usando condição inicial e a propriedade de ortogonalidade das funções trigonométricas. Assim sendo, têm-se que:

$$A_{n1} = \frac{2\text{Sen}(\beta_{n1}R_1)}{\beta_{n1}R_1 + \text{Sen}(\beta_{n1}R_1)\text{Cos}(\beta_{n1}R_1)}$$

$$A_{m2} = \frac{2\text{Sen}(\beta_{m2}R_2)}{\beta_{m2}R_2 + \text{Sen}(\beta_{m2}R_2)\text{Cos}(\beta_{m2}R_2)}$$

$$A_{k3} = \frac{2\text{Sen}(\beta_{k3}R_3)}{\beta_{k3}R_3 + \text{Sen}(\beta_{k3}R_3)\text{Cos}(\beta_{k3}R_3)}$$

Os autovalores β_{ij} da equação (7) são as raízes das seguintes equações:

$$\text{Cotg}(\beta_{n1}R_1) = \frac{\beta_{n1}R_1}{B_{i1}} \quad (9)$$

$$\text{Cotg}(\beta_{m2}R_2) = \frac{\beta_{m2}R_2}{B_{i2}} \quad (10)$$

$$\text{Cotg}(\beta_{k3}R_3) = \frac{\beta_{k3}R_3}{B_{i3}} \quad (11)$$

onde $B_{ij} = h_j k / R_j$ é chamado número de Biot de transferência para a face j do sólido.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

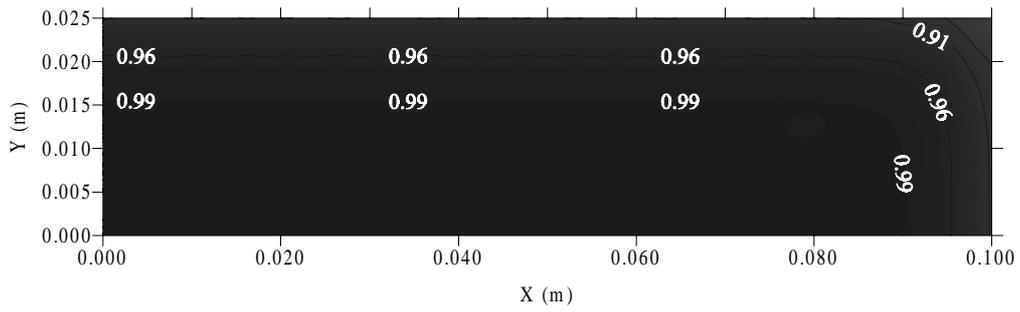
Como aplicação, o método foi usado para descrever a transferência de calor num tijolo refratário com dimensões ($R_1 \times R_3 \times R_2$) $0.100 \times 0.045 \times 0.025 \text{m}^3$. A Norma Técnica EB-19 estabelece dois tamanhos $2R_1 \times 2R_2 \times 2R_3$ para tijolo cheio ou maciço: $(0.240 \pm 5) \times (0.115 \pm 2) \times (0.052 \pm 2) \text{m}^3$ e $(0.200 \pm 5) \times (0.045 \pm 2) \times (0.053 \pm 2) \text{m}^3$, mas nem sempre é obedecida pelas olarias (Bauer, 1992). As propriedades do material estudado são mostradas na tabela 1 (Pereira *et al.* 1995).

Tabela 1. Propriedades do tijolo refratário

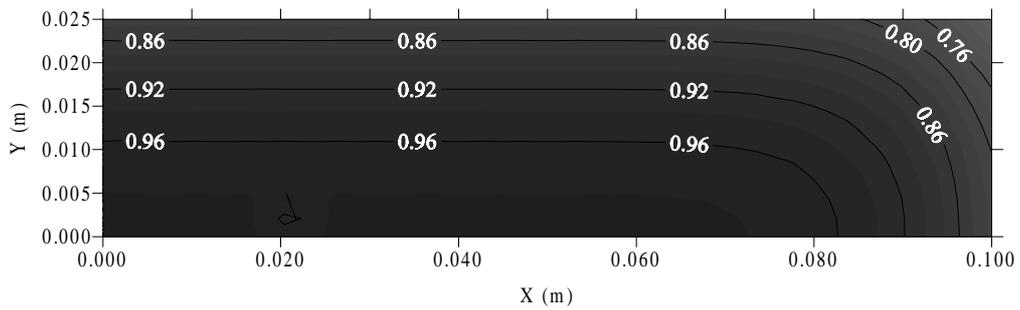
ρ (kg/m^3)	2100
k (W/mK)	1.13 a 100°C
c_p (J/kgK)	1064

Para obtenção dos resultados, foi implementado um programa computacional utilizando-se o software Mathematica[®], considerando um coeficiente de transferência de calor $h=20\text{W/m}^2\text{K}$, em todas as faces do sólido. As Figuras 2, 3 e 4, apresentam a distribuição de temperatura adimensional (T^*) no interior do sólido, nos planos $Z=0.000\text{m}$, 0.0225m e 0.045m , para os instantes $t=50, 200, 500$ e 2000s , respectivamente, obtidas para uma temperatura de aquecimento de 100°C , de acordo com a Tabela 1.

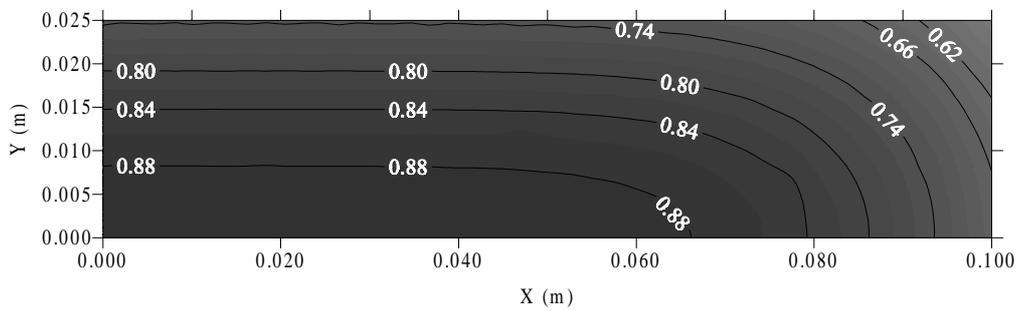
A análise das figuras evidencia as linhas isotérmicas e a existência de altos gradientes de temperatura na região próxima ao vértice do sólido, com a temperatura adimensional apresentando os maiores resultados no centro do mesmo em qualquer tempo de secagem. Além disso, percebe-se o decréscimo da temperatura adimensional ao longo do tempo, em qualquer posição (x, y), conseqüentemente a temperatura do sólido aproxima-se da temperatura do meio externo. Verifica-se em $t=500\text{s}$ que existe uma maior diferença da temperatura adimensional entre o centro e o vértice, exceto para $Z=0.0000\text{m}$, onde neste caso ocorre em $t=200\text{s}$.



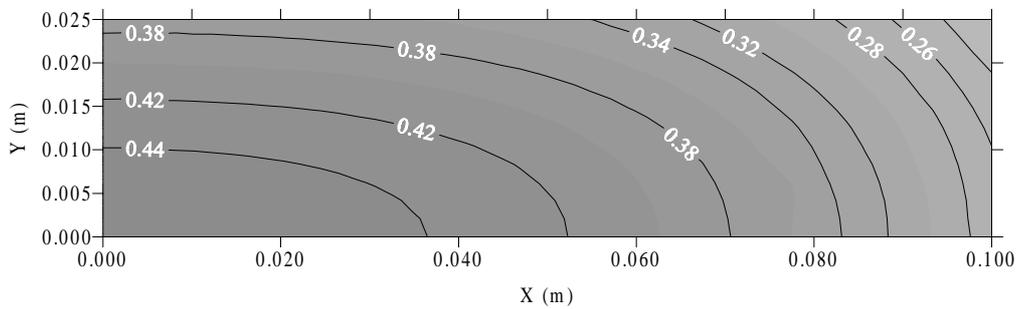
(a)



(b)

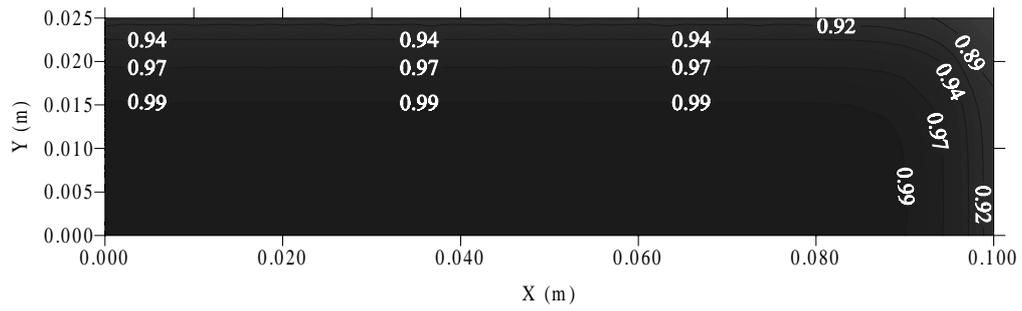


(c)

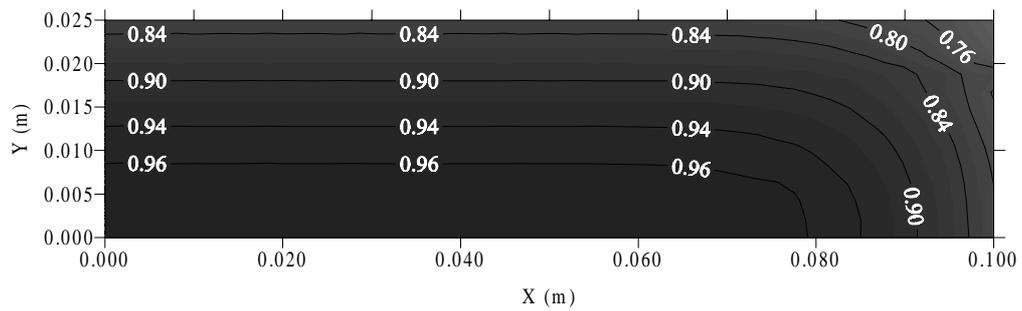


(d)

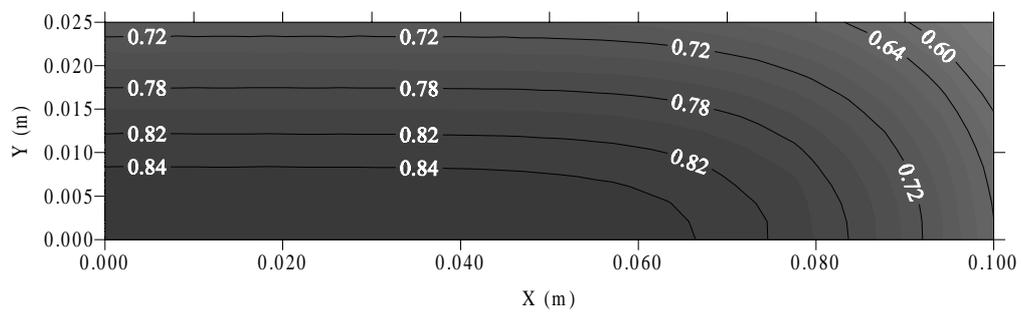
Figura 2 Perfis bidimensionais, mostrando os gradientes de temperatura no plano $Z=0.000\text{m}$, nos tempos: a) $t=50\text{s}$, b) $t=200\text{s}$, c) $t=500\text{s}$ e d) $t=2000\text{s}$



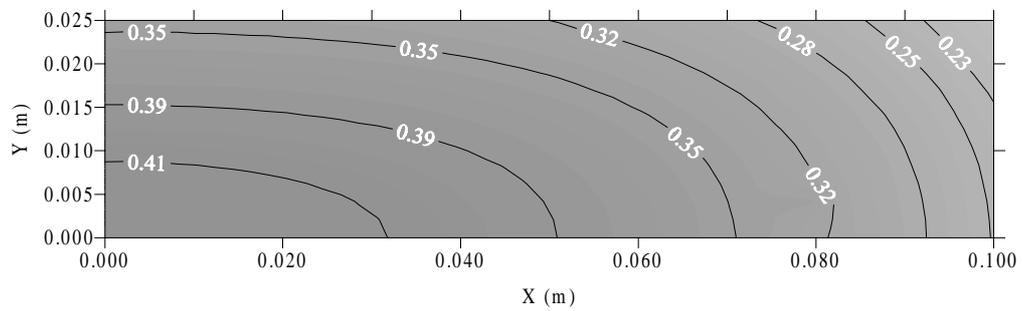
(a)



(b)

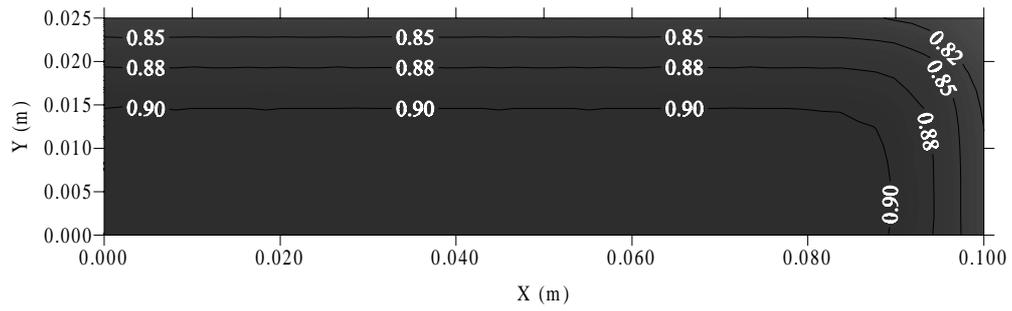


(c)

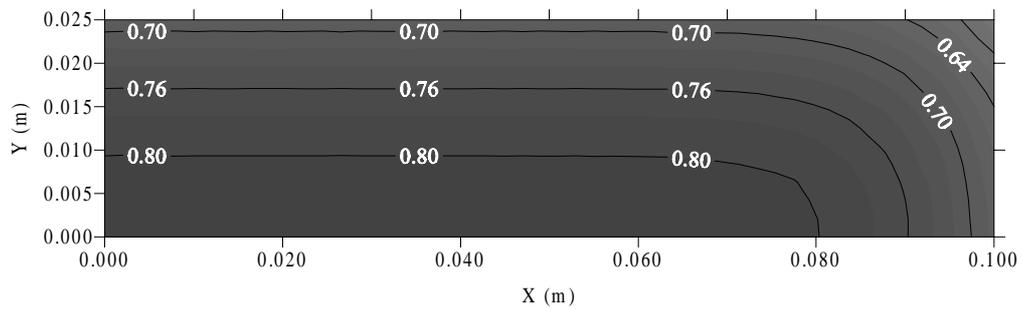


(d)

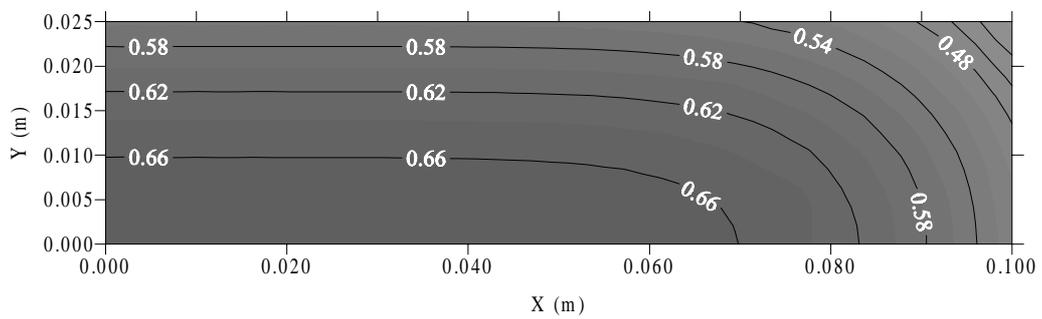
Figura 3 Perfis bidimensionais, mostrando os gradientes de temperatura no plano $Z=0.0225\text{m}$, nos tempos: a) $t=50\text{s}$, b) $t=200\text{s}$, c) $t=500\text{s}$ e d) $t=2000\text{s}$



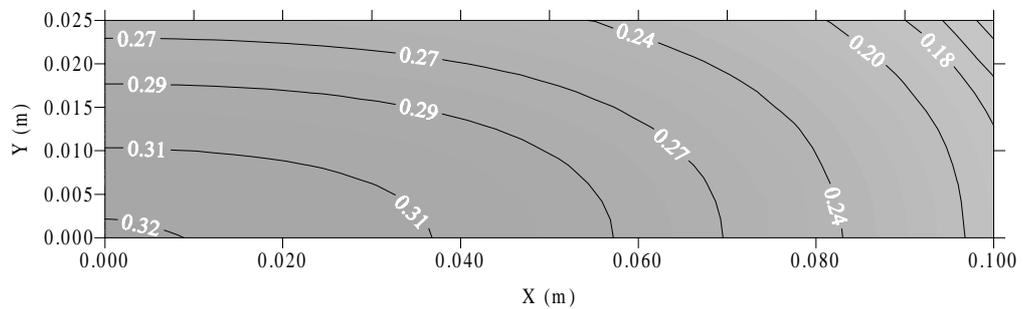
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4 Perfis bidimensionais, mostrando os gradientes de temperatura no plano $Z=0.0450\text{m}$, nos tempos: a) $t=50\text{s}$, b) $t=200\text{s}$, c) $t=500\text{s}$ e d) $t=2000\text{s}$

Uma comparação das figuras 2c, 3c e 4c, mostram que, como esperado, os gradientes de temperatura são maiores no plano $Z=0.045\text{m}$, que corresponde a superfície do tijolo que está em contato direto com o ar de secagem. Sendo assim, esta região é mais propícia a existência de choque térmico e consequentemente trincas, fraturas e deformações, que comprometem a qualidade do produto obtido.

Analisando o problema sob o ponto de vista da secagem, as regiões de maior aquecimento nas figuras apresentadas, representam regiões de maior perda de água, e portanto mais secas. Na superfície do sólido, as partículas argilosas apresentam cargas elétricas negativa, que repelem-se entre si e tendem a ficarem afastadas uma das outras, cujo espaço é preenchido por água. Pelos resultados expostos, durante o processo de secagem, a camada externa da peça (e particularmente nos vértices) se aquece mais rápido que o seu centro, essa região contrai-se primeiro (não levada em consideração pelo modelo), produzindo uma redução nas dimensões do corpo e consequentemente no seu volume. Esta redução de volume do corpo corresponde exatamente a perda de água evaporada do mesmo, o que dificulta a saída de água. Geram-se então tensões de sentidos contrários entre a camada externa e a interna e, quanto maior a perda de água (secagem mais intensa), maior também será a tensão dela resultante, fazendo o material deformar-se e inclusive com possibilidade de trincar (Fricke, 1977). As maiores tensões (de compressão) ocorrem na superfície do material, onde o material está mais frágil e quebradiço. No interior da partícula, as tensões são de tração. A trinca ocorrerá quando a tensão de cisalhamento excede a tensão de cisalhamento máxima do material (Keey, 1992).

De acordo com Bauer (1994), o tijolo comum (cerâmica vermelha estrutural), por exemplo, conserva cerca de 1 kg de água após a moldagem. Se a argila for levada ainda úmida para o forno, a umidade interior ficará retida pela crosta externa, gerando tensões internas e fendilhamento. Sendo assim, a água presente nas etapas de conformação devem então ser eliminadas antes da queima, de forma lenta e cuidadosa, impedindo rachas e trincas nas peças, que possam diminuir a sua qualidade ao final do processo (Fernandes, 1998).

Uma secagem prévia, controlada, é de grande importância. Se a secagem não for uniforme, aparecerão distorções nas peças, mas, se for muito lenta, a produção tornar-se-á antieconômica. Para se ter uma secagem uniforme (gradientes de temperatura e umidade minimizados) é importante moderar adequadamente a intensidade da secagem, pelo controle das velocidade, umidade relativa e temperatura do ar de secagem, forma do corpo, particularmente a relação área/volume e a porosidade do material. Para se ter uma idéia, barros maleáveis perdem na secagem de 5 a 8% do seu volume, enquanto que os menos maleáveis cerca de 3 a 5%, dependendo da granulometria das partículas de argila. No entanto, betonite, por exemplo, que é um material bastante maleável, de grão muito fino (baixa porosidade), chega a perder de 10 a 15% do seu volume quando posta para secar. Uma discussão detalhada dos defeitos em materiais cerâmicos oriundos do processo de secagem pode ser encontrada na literatura recente (Sanchez & Barba, 1998).

Portanto, apesar de se utilizar um único coeficiente de transferência de calor para todas as faces do sólido, pode-se afirmar que o controle das propriedades termodinâmicas e velocidade do ar de secagem, conduz a um produto industrial de qualidade aceitável comercialmente.

O controle dos parâmetros de secagem, gera como consequência o controle dos coeficientes de transferência convectiva de calor e massa na superfície do sólido. De acordo com Nishikawa *et al.* (1994), poucos trabalhos tem investigado o coeficiente de transferência de calor durante o choque térmico de materiais cerâmicos, neste sentido, este trabalho ajudará pesquisadores na estimativa deste parâmetro associado ao processo de secagem e choque térmico destes materiais.

Como um comentário final, pelo exposto, apesar desta formulação ter sido usada para descrever fenômenos de transferência de calor (aquecimento ou resfriamento), podendo ser estendida facilmente para transferência de massa (secagem ou umidificação), considera propriedades constantes e não-existência de retração do material, neste sentido recomenda-se que novos estudos sejam conduzidos neste sentido.

4. REFERÊNCIAS

- Bauer, L. A. F., 1994, “Materiais de Construção 2”, LTC Editora, Rio de Janeiro. 935p.
- Fricke, J., 1977, “A Cerâmica”, Editora Presença Ltda., Lisboa. 152p.
- Gebhart, B., 1993, “Heat Conduction and Mass Diffusion”, Ed. McGraw-Hill, Inc., New York.
- Kakaç, S. & Yener Y., 1993, “Heat Conduction”, Ed. Taylor & Francis Inc., Washington.
- Keey, R. B., 1992, “Drying of Loose and Particulate Material”, Hemisphere Publishing corporation, New York. 504p.
- Lima, A.G. B., Nebra, S. A., Sakauaka, P. H., 1999, “Analytical Solution of Mass Diffusion Equation Applied to Ellipsoid of Revolution”, Proceedings of the Brazilian Congress of Mechanical Engineering, CD-ROM, Águas de Lindóia, Brazil.
- Lima, A. G. B., 1999, “Fenômenos de Difusão em Sólidos Esferóidais Prolatos. Estudo de Caso: Secagem de Banana”, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, SP., Brasil, 263p.
- Luikov, A. V., 1968, “Analytical Heat Diffusion Theory”, Academic Press, Inc. Ltd., London., 684p.
- Nishikawa, T., Mizui, T. and Takatsu, M. and Misutani Y., 1995, “Effect of the Temperature of Thermal Properties on the Thermal Shock Tests of Ceramics”, Journal of Materials Science 30, pp5013-5019.
- Nishikawa, T., Gao T, Hibi M., Takatsu, M., and Ogawa, M., 1994, “Heat Transmission During Thermal Shock Testing of Ceramics”, Journal of Materials Science 29, pp 213-219.
- Norton, F. H., 1975, “Elements of Ceramics”, Ed. Addison Wesley, Massachusetts.
- Özisik, M. N., 1985, “Heat Transfer”, Ed. Mc. Graw Hill, Inc.
- Fernandes, D. M. P., 1998, “Design e Tecnologia Aplicados a Produtos Domésticos em Grês Cerâmico”. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, SC., Brasil, 212p.
- Pereira, R., Noronha, R.T.T., Mattos, U., Pandofelli, V.C ., Scudeller, L. A.M., 1995, “Avaliação do Comportamento Termomecânico de Refratários para Lingotamento Indireto de Aços Através de Simulação por Análise Não-linear de Elementos Finitos”, 39º Congresso Brasileiro de Cerâmica, Vol 1, Águas de Lindóia-SP, pp. 466-471.
- Sanchez, E.; Barba, A., 1998, “Defeitos em Revestimento Cerâmicos: Suas Causas e Soluções”, Notas de aula. Associação Brasileira de Cerâmica. LaRC-Laboratório de Revestimentos Cerâmicos, DEMa, UFSCar, São Carlos.
- Santos, N. W., Baldo, J. B., 1995, “Comportamento da difusividade térmica de uma argila plástica refratária em função da temperatura de sinterização”, 39º Congresso Brasileiro de Cerâmica, Vol 1, Águas de Lindóia-SP, pp. 484-488.