

ESTUDO DA CONVECÇÃO MISTA NUM DUTO RETANGULAR HORIZONTAL COM UM CILINDRO INTERNO AQUECIDO

João Batista Dias

Genésio José Menon

Dênio Lemos Panissi

EFEI – Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Departamento de Engenharia Mecânica, Av. BPS, 1303, Bairro Pinheirinho, 37500-000, Itajubá, MG, Brasil. E-mail: genesio@iem.efei.br

Resumo

No presente trabalho analisa-se a convecção mista laminar no interior de um duto retangular horizontal com um cilindro interno aquecido. Considera-se que o duto retangular é isolado termicamente e que o cilindro interno tem fluxo de calor axial uniforme com temperatura circunferencial uniforme. O método de elementos finitos, com o elemento triangular linear, é utilizado na solução das equações de conservação na forma adimensional para a função corrente (ψ), vorticidade (ω), temperatura (θ) e velocidade axial (W). O número de Nusselt médio (Nu) e o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe) são calculados em função da geometria e do número de Rayleigh (Ra). São mostradas as distribuições de temperatura e de função corrente em função do número de Rayleigh. É mostrada uma comparação entre a transferência de calor por convecção mista ($Ra \neq 0$) e por convecção forçada ($Ra = 0$).

Palavras-chave: Convecção mista, Método de elementos finitos, Transferência de calor, Métodos numéricos.

1. INTRODUÇÃO

Vários trabalhos têm sido feitos com o objetivo de estudar a transferência de calor em tubos horizontais. Nieckele & Patankar (1985) e Kaviani (1986), estudaram a convecção mista entre tubos concêntricos com aquecimento uniforme no tubo interno e isolamento no tubo externo. O método de elementos finitos foi utilizado por Ribeiro (1992) para estudar a convecção mista laminar entre tubos concêntricos e excêntricos com duas condições de contorno, na primeira o tubo externo foi isolado e o tubo interno aquecido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme, e na segunda as condições foram invertidas. A convecção mista, tridimensional, laminar, não desenvolvida, em um tubo com uma placa longitudinal concêntrica, foi estudada por Hsieh & Wen (1996). Um estudo numérico da transferência de calor em um tubo com uma placa longitudinal excêntrica, sendo o tubo aquecido e a placa isolada, foi feito por Hung et al. (1997). A convecção mista de ar entre tubos concêntricos, causada pela rotação do tubo externo e pela diferença de temperatura existente entre eles foi estudada por Yoo (1998a). Mais recentemente, Yoo (1998b) estudou a convecção natural entre tubos concêntricos para uma pequena razão de raios com número de Prandtl menor ou igual a 0,3.

O presente trabalho utiliza o método de elementos finitos para estudar a convecção mista em um duto retangular, com um cilindro colocado longitudinalmente em seu centro. O cilindro tem aquecimento axial uniforme com temperatura circunferencial uniforme e o duto

retangular é mantido isolado. O cálculo da vorticidade nas paredes é feita de uma forma matricial utilizando os valores de função corrente de todo o domínio e como condição de contorno os valores da vorticidade nos demais pontos do domínio. Esta forma de cálculo da vorticidade nas paredes permite uma maior flexibilidade na geração da malha.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Neste trabalho estuda-se a transferência de calor por convecção mista no interior de um duto retangular com um cilindro interno. O duto é termicamente isolado enquanto que o cilindro tem fluxo de calor axial uniforme com temperatura circunferencial uniforme. São admitidas as seguintes hipóteses simplificadoras: o escoamento é laminar, bidimensional, incompressível, desenvolvido térmica e hidrodinamicamente; as propriedades do fluido são constantes com a temperatura, exceto a densidade nos termos de empuxo; a pressão axial é desacoplada da pressão transversal. A geometria para o problema é mostrada na figura 1.

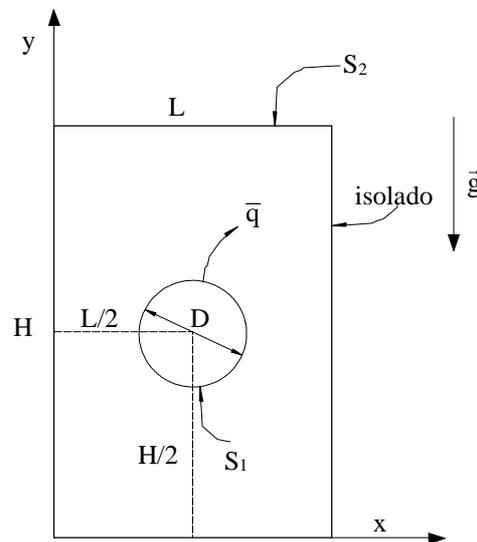


Figura 1. Geometria do problema

Levando-se em conta as hipóteses simplificadoras, as equações de conservação na forma adimensional, para este problema, são:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0, \quad (1)$$

$$\text{Pr} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial W}{\partial X} + \text{Pr} \right) = \frac{\partial W}{\partial \tau}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - C_g \frac{W}{\bar{W}} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (3)$$

$$\text{Pr} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) + \text{Ra Pr} \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial \omega}{\partial \tau}, \quad (4)$$

sendo ψ a função corrente, ω a vorticidade, \bar{W} a velocidade axial média adimensional.

Os parâmetros adimensionais utilizados para generalizar a análise teórica são dados por:

$$\tau = \frac{\alpha t}{d^2}, \quad X = \frac{x}{d}, \quad Y = \frac{y}{d}, \quad U = \frac{u d}{\alpha}, \quad V = \frac{v d}{\alpha},$$

$$W = \frac{w}{\frac{d \bar{p}}{dz} d^2}, \quad P = \frac{p^* d^2}{\rho \nu \alpha}, \quad \theta = \frac{T - T_w}{\frac{\bar{q} d}{k}}, \quad d = 4 \frac{A_m}{P_m}, \quad (5)$$

sendo: z a coordenada na direção axial; u , v e w as velocidades nas direções x , y e z ; t o tempo; ρ a massa específica; p a pressão; g a aceleração da gravidade; β o coeficiente de expansão térmica; T a temperatura; T_w a temperatura na parede do cilindro; ν a viscosidade cinemática; α a difusividade térmica do fluido; τ o tempo adimensional; X e Y as coordenadas adimensionais; d o diâmetro hidráulico; U , V e W as velocidades adimensionais nas direções x , y e z ; P a pressão adimensional; θ a temperatura adimensional; \bar{q} o fluxo de calor através do cilindro e k a condutividade térmica do fluido. O número de Prandtl (Pr), o número de Rayleigh (Ra) e a constante geométrica (C_g) são dados por:

$$\text{Pr} = \frac{\rho \nu c_p}{k}, \quad \text{Ra} = \frac{\rho c_p g \beta \bar{q} d^4}{\nu k^2}, \quad C_g = 4 \frac{P_q}{P_m}. \quad (6)$$

sendo: P_m o perímetro molhado da seção (perímetro do duto mais perímetro do cilindro); P_q o perímetro aquecido (cilindro); c_p o calor específico a pressão constante e A_m a área molhada da seção (área livre da seção). Para o problema em estudo A_m , P_q e P_m são dados por:

$$A_m = H L - \frac{\pi D^2}{4}, \quad P_q = \pi D, \quad P_m = \pi D + 2(H + L), \quad (7)$$

sendo: H e L as dimensões do duto nas direções y e x , e D o diâmetro do cilindro.

As condições iniciais e de contorno para o problema, na forma adimensional, são:

Para $\tau = 0$:

$$\psi = \theta = \omega = W = 0. \quad (8)$$

Para $\tau > 0$:

$$\theta = 0 \quad (\text{cilindro}), \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad (\text{duto}), \quad (9)$$

$$\psi_w = 0 \quad (\text{cilindro e duto}), \quad W_w = 0 \quad (\text{cilindro e duto}), \quad (10)$$

sendo n a direção normal à superfície.

No eixo de simetria, a vorticidade tem o valor zero, para qualquer tempo. Nas paredes do duto e do cilindro a vorticidade tem o valor zero para o tempo inicial e é recalculada para cada passo de tempo, como será visto no método de solução.

3. MÉTODO DE SOLUÇÃO

As equações (1), (2), (3) e (4) são resolvidas através do método de elementos finitos com o elemento triangular linear.

Para cada passo de tempo são calculadas as distribuições de função corrente, de velocidade axial, de temperatura e de vorticidade. São calculados ainda o número de Nusselt médio (Nu) e o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe). Todos estes cálculos são feitos na seqüência descrita abaixo.

- Calcula-se a distribuição da função corrente utilizando os valores de ω do tempo anterior.
- Calcula-se a distribuição de velocidade axial e a velocidade axial média utilizando os valores da velocidade axial do tempo anterior e os valores calculados da função corrente.
- A distribuição de temperatura é calculada utilizando os valores de θ do tempo anterior e os valores calculados da função corrente, da velocidade axial e da velocidade axial média.
- Calcula-se a média do produto da velocidade axial pela temperatura ($\overline{W\theta}$).
- O cálculo da vorticidade utiliza os valores da vorticidade do tempo anterior e os valores calculados da função corrente e da temperatura
- A vorticidade nas paredes é calculada utilizando os valores calculados da função corrente e, como condição de contorno, os valores da vorticidade nos demais pontos nodais. Este cálculo é feito na seguinte forma matricial para o elemento:

$$[C^e] \{\omega^e\} = [K_\psi^e] \{\psi^e\}, \quad (11)$$

sendo que:

$$[C^e] = \frac{A_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \{\omega^e\} = \begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix}, \quad \{\psi^e\} = \begin{Bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

$$[K_\psi^e] = \frac{1}{4 A_e} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$b_i = Y_j - Y_k, \quad b_j = Y_k - Y_i, \quad b_k = Y_i - Y_j, \quad (14)$$

$$c_i = X_k - X_j, \quad c_j = X_i - X_k, \quad c_k = X_j - X_i, \quad (15)$$

A_e é a área do elemento, o índice e representa o elemento e os índices i, j, k representam os pontos nodais do elemento.

- Calcula-se o número de Nusselt médio (Nu) e o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe), na seguinte forma:

$$Nu = -\frac{\bar{W}}{W\theta} \quad , \quad fRe = \frac{2}{W} \quad . \quad (16)$$

4. RESULTADOS E CONCLUSÕES

Para a validação do código computacional desenvolvido neste trabalho, foi resolvido o problema de tubos concêntricos com o tubo interno aquecido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circunferencial uniforme e o tubo externo isolado termicamente. Este problema foi estudado por Niecele & Patankar (1985) e por Ribeiro (1992). Na tabela 1 são apresentados os resultados para razão de raios $RR = 3$ e número de Prandtl $Pr = 0,7$.

Tabela 1. Número de Nusselt para $RR = 3$ e $Pr = 0,7$

	Niecele & Patankar (1985)			Ribeiro (1992)			Presente trabalho (1999)	
Ra	Nu	Desvio %	Nu/Nu ₀	Nu	Desvio %	Nu/Nu ₀	Nu	Nu/Nu ₀
0	6,98	-0,04	1,00	7,058	-1,15	1,00	6,977	1,00
10 ⁵	8,38	-1,66	1,20	8,479	-2,81	1,20	8,241	1,18
10 ⁶	10,47	0,54	1,50	11,081	-5,00	1,53	10,527	1,51

Na tabela 1 os resultados de Niecele & Patankar (1985) para $Ra = 0$ são obtidos de uma solução analítica exata. Pode-se notar que o presente trabalho tem um desvio muito pequeno (-0,04 % para o número de Nusselt) em relação a esta solução analítica. Os desvios do presente trabalho em relação aos outros dois são pequenos, sendo que o máximo é de -5,00 % (para o número de Nusselt) em relação a Ribeiro (1992) com $Ra = 10^6$. Os resultados para Nu/Nu_0 representam a razão entre o número de Nusselt médio da convecção mista ($Ra \neq 0$) e o número de Nusselt médio da convecção forçada ($Ra = 0$). O presente trabalho também obteve valores de Nu/Nu_0 muito próximos aos encontrados por Niecele & Patankar (1985) e por Ribeiro (1992).

Tabela 2. Produto do fator de atrito pelo número de Reynolds para $RR = 3$ e $Pr = 0,7$

	Niecele & Patankar (1985)			Ribeiro (1992)			Presente Trabalho (1999)	
Ra	fRe	Desvio %	fRe/(fRe) ₀	fRe	Desvio %	fRe/(fRe) ₀	fRe	fRe/(fRe) ₀
0	94,2	-1,78	1,00	95,687	-3,31	1,00	92,521	1,00
10 ⁵	98,1	-3,36	1,02	97,973	-3,23	1,02	94,805	1,02
10 ⁶	105,5	-0,34	1,12	108,561	-3,15	1,13	105,143	1,14

Na tabela 2 os resultados de Niecele & Patankar (1985) para $Ra = 0$ também são obtidos de uma solução analítica exata. O presente trabalho apresenta um desvio de apenas -1,78 % (para fRe) em relação a esta solução. Os desvios em relação aos trabalhos de Niecele & Patankar (1985) e Ribeiro (1992) são pequenos, sendo que o máximo é de apenas -3,36 % (para fRe) em relação a Niecele & Patankar (1985) com $Ra = 10^5$. O termo $fRe/(fRe)_0$ representa a

razão entre o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds para a convecção mista ($Ra \neq 0$) e este mesmo produto para a convecção forçada ($Ra = 0$). Os resultados para $fRe/(fRe)_0$ são quase coincidentes com os obtidos pelos outros dois trabalhos. A malha utilizada para estas duas tabelas foi de 229 pontos nodais e 400 elementos e foi analisada apenas a metade da geometria.

O código computacional, após ter sido validado pelo problema dos tubos concêntricos, é aplicado para o problema proposto. São feitas aplicações para $Pr = 0,7$ (que é o número de Prandtl do ar), H^*/L^* igual a 8/4, 5/4, 4/4, 4/5 e 4/8 e Ra igual a 0, 10^4 , 10^5 e 10^6 , sendo os parâmetros H^* e L^* definidos por:

$$H^* = \frac{H}{D} \quad , \quad L^* = \frac{L}{D} \quad . \quad (17)$$

Na figura 2 são apresentados resultados de Nu em função do número de Rayleigh, para as diversas razões H^*/L^* . Pode-se observar que Nu aumenta com o aumento de Ra para todas as geometrias e que este aumento pode ser de mais de 100% ($H^*/L^* = 4/8$). Para $Ra \geq 10^5$, Nu aumenta com a diminuição da razão H^*/L^* e este aumento é maior para valores mais altos de Ra .

Na figura 3 são mostrados resultados do produto fRe em função de Ra , para as diversas razões H^*/L^* . As geometrias 8/4 e 4/8 têm uma razão de raios de 8,94, as geometrias 5/4 e 4/5 têm uma razão de raios de 6,40 e a geometria 4/4 tem uma razão de raios de 5,66. A razão de raios é dada pela razão entre o raio da circunferência circunscrita à seção do duto retangular e o raio do cilindro. Analisando a figura 3 nota-se que fRe aumenta com o aumento de Ra e este aumento pode ser de até cerca de 17% (para $Ra = 10^6$ e $H^*/L^* = 4/8$). O produto fRe aumenta com a diminuição da razão de raios.

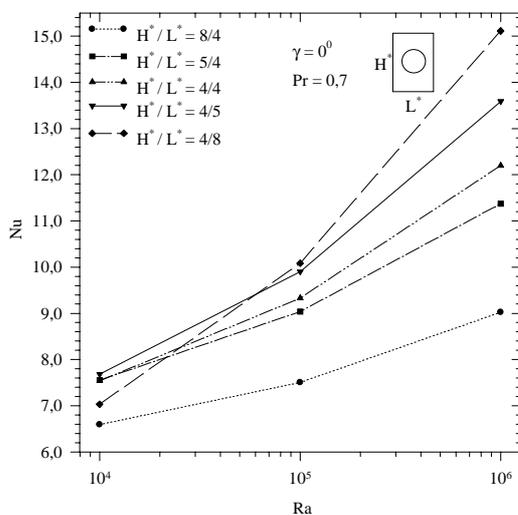


Figura 2. Número de Nusselt médio em função de Ra para as várias relações H^*/L^* .

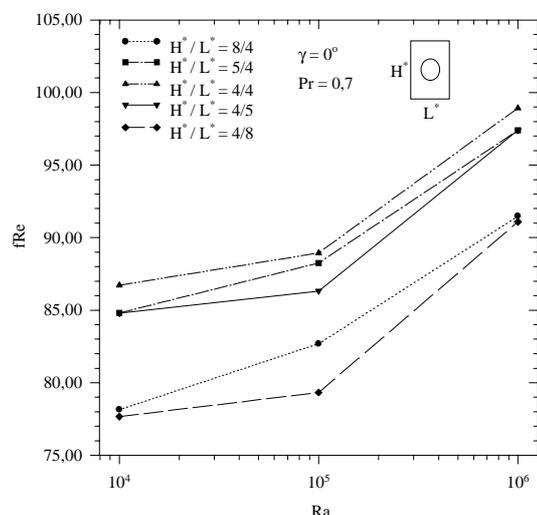


Figura 3. fRe em função de Ra para as várias relações H^*/L^* .

Na figura 4 são apresentados resultados da razão Nu/Nu_0 em função de Ra , para as diversas razões H^*/L^* . Pode-se observar que quanto menor a relação H^*/L^* maior a razão Nu/Nu_0 , ou seja, maior a transferência de calor na convecção mista em relação à convecção forçada e quanto maior o número de Rayleigh maior também a relação Nu/Nu_0 , para todas as relações H^*/L^* .

Na figura 5 são mostrados resultados da razão $fRe/(fRe)_0$ em função de Ra , para as diversas razões H^*/L^* . A razão $fRe/(fRe)_0$ aumenta com o aumento de Ra . Levando-se em conta a razão H^*/L^* , o comportamento de $fRe/(fRe)_0$ varia de acordo com Ra , da seguinte forma: para $Ra \leq$

10^5 , quanto maior a razão H^*/L^* maior a relação $fRe/(fRe)_0$; para $Ra = 10^6$ quanto maior a razão de raios maior é o valor da relação $fRe/(fRe)_0$ e para Ra entre 10^5 e 10^6 existe uma transição.

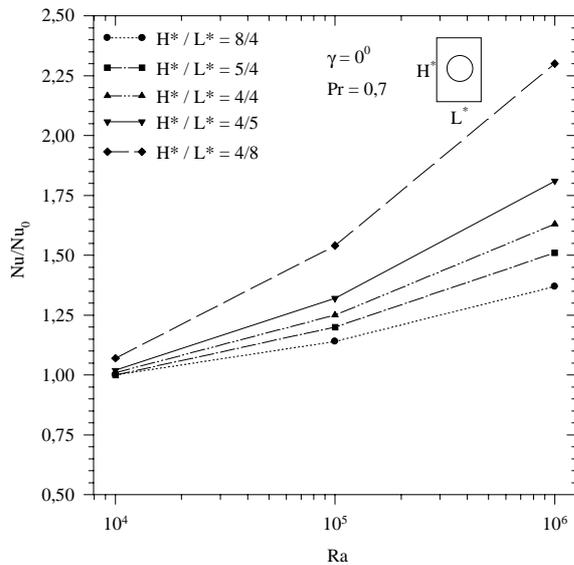


Figura 4. Relação Nu/Nu_0 versus Ra para as várias relações H^*/L^* .

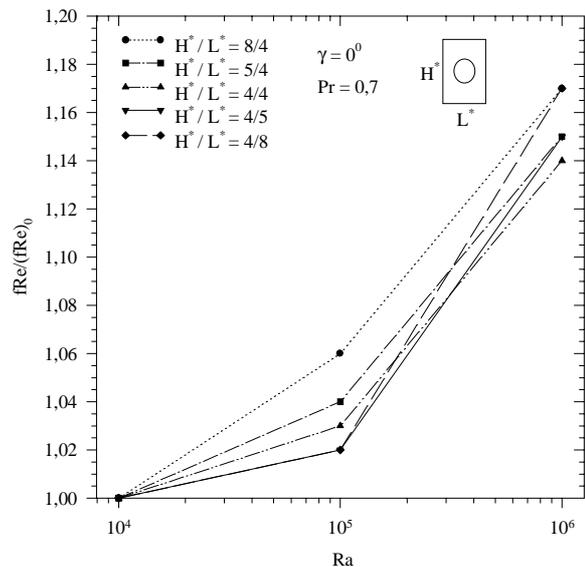


Figura 5. Relação $fRe/(fRe)_0$ versus Ra para as várias relações H^*/L^* .

Na figura 6 estão mostradas as isotermas da geometria $H^*/L^* = 5/4$, para Ra variando de 0 a 10^6 . Quando $Ra = 0$, as isotermas são simétricas em relação a um plano horizontal passando pelo centro do cilindro. Isto significa que não existe o escoamento secundário, caracterizando, assim, apenas a convecção forçada. Para $Ra = 10^4$, começa a existir uma assimetria em relação àquele plano horizontal, pois as isotermas localizadas logo abaixo do cilindro estão mais próximas umas das outras, do que as localizadas logo acima do cilindro. Isto mostra o início de um fluxo transversal (fluxo secundário) causado pela convecção natural. Com o aumento de Ra para $Ra = 10^5$ e $Ra = 10^6$, a assimetria em relação ao plano horizontal se intensifica ainda mais, indicando um escoamento secundário ainda mais forte devido ao empuxo. Este escoamento caracteriza uma forte influência da convecção natural no escoamento principal.

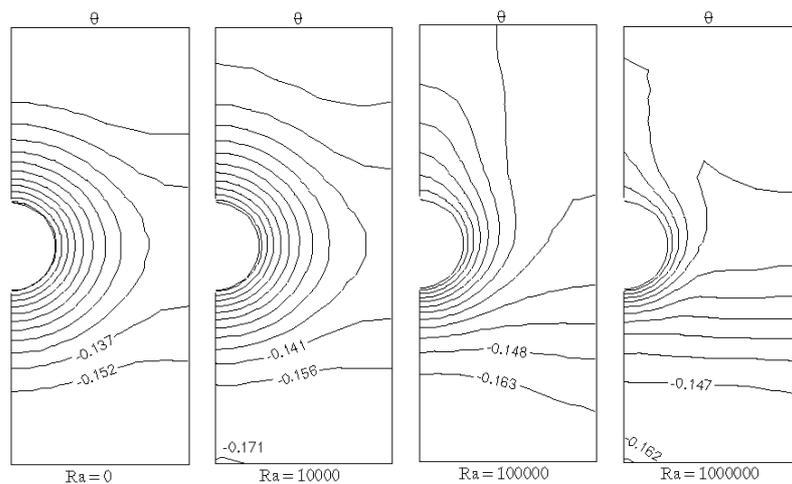


Figura 6. Isotermas ($\Delta\theta = 0,015$) para $H^*/L^* = 5/4$, com Ra variando de 0 a 10^6 .

A distribuição de ψ da geometria $H^*/L^* = 5/4$, para Ra variando de 0 a 10^6 , pode ser vista na figura 7. Quando $Ra = 0$, a função corrente tem valor zero para todos os pontos, o que significa dizer que não há fluxo secundário, ou seja, não há convecção natural. Para $Ra = 10^4$ existe apenas uma grande célula de escoamento secundário. Para $Ra = 10^5$, existe uma grande célula na parte superior da geometria e um espaço na parte inferior, o que indica o início da formação de um nova célula de escoamento, que não aparece devido ao pequeno número de linhas representado e aos baixos valores de ψ . A nova célula de escoamento já pode ser vista para $Ra = 10^6$. Os valores das linhas de função corrente atingem valores mais elevados com o aumento de Ra , indicando um aumento da velocidade do escoamento secundário.

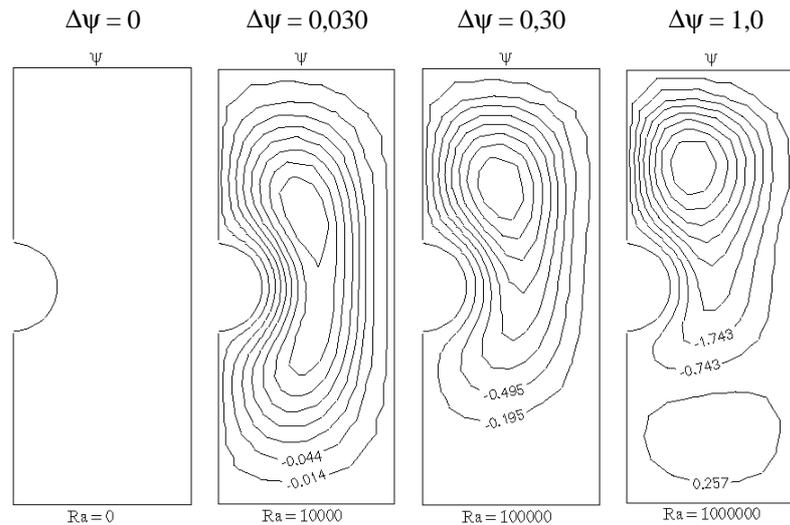


Figura 7. Distribuição de função corrente para $H^*/L^* = 5/4$

5. REFERÊNCIAS

- Hsieh, S.S. and Wen, M.Y., 1996, “Developing Three-dimensional Laminar Mixed Convection in a Circular Tube Inserted with Longitudinal Strips”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 39, n. 2, pp. 299-310.
- Hung, C.I., Lin, Y.S. and Chen, J.D., 1997, “Numerical Study of Heat Transfer Enhancement of a Horizontal Tube with an Eccentrically Inserted Plate”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 40, n. 7, pp. 1687-1692.
- Kaviany, M., 1986, “Laminar Combined Convection in a Horizontal Annulus Subject to Constant Heat Flux Inner Wall and Adiabatic Outer Wall”, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 108, pp. 392-397.
- Nieckele, A.O. and Patankar, S.V., 1985, “Laminar Mixed Convection in a Concentric Annulus with Horizontal Axis”, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 107, n. 4, pp. 902-909.
- Ribeiro, M.M., 1992, “Estudo da Transferência de Calor por Convecção Mista no Interior de Tubos Horizontais Concêntricos e Excêntricos”, *Dissertação de Mestrado*, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Itajubá, M.G., Brasil, 124p.
- Yoo, J.S., 1998a, “Mixed Convection of Air between Two Horizontal Concentric Cylinders with a Cooled Rotating Outer Cylinder”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, n. 2, pp. 293-302.
- Yoo, J.S., 1998b, “Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus: $Pr \leq 0.3$ ”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, n. 20, pp. 3055-3073.