

# MODELO ANALÍTICO UNIDIMENSIONAL PARA A ANÁLISE DA SOLIDIFICAÇÃO BIDIMENSIONAL EM UM ARMAZENADOR CILÍNDRICO VERTICAL

**Carlos Alberto de Melo**

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, 38400-089,  
Uberlândia, MG, Brasil. E-mail: [carlosam@mecanica.ufu.br](mailto:carlosam@mecanica.ufu.br)

## Resumo

Foi feito, inicialmente, um modelo analítico unidimensional radial, para a solidificação de um material de mudança de fase (MMF), em torno de um cilindro vertical, onde escoava internamente um fluido de resfriamento. A partir da variação da temperatura do fluido de resfriamento, ao longo da altura do armazenador, encontrou-se um modelo analítico bidimensional radial axial para a solidificação. O campo de temperatura, nas fases sólida e líquida, a energia armazenada, a taxa de calor e a efetividade, a cada instante, foram determinadas, bem como seus valores médios.

**Palavras-chave:** Modelo analítico, Armazenador, Solidificação, Efetividade.

## 1. INTRODUÇÃO

Matematicamente o problema de mudança de fase pertence a classe dos problemas de fronteira móvel, porque a interface sólido-líquido é função do tempo. O problema de mudança de fase aparece na natureza, em muitos processos industriais, como na fusão e na solidificação dos materiais dos armazenadores térmicos, tipo calor latente e dos metais e vidros. A dificuldade na solução do problema é da não linearidade da equação da interface líquido-sólido e de sua forma ser variável com o tempo. Desta maneira, soluções exatas têm sido encontradas, por Ozisik(1980), para casos simples de problemas unidimensionais, onde são considerados somente os efeitos da condução de calor (problema de Stefan). Na literatura é indicada a solução exata, por Cho e Sunderland(1969) , da fusão ou da solidificação de uma placa plana finita, submetida à temperatura constante numa de suas faces, enquanto que a outra é isolada. Problema semelhante foi resolvido por Goodman e Shea(1960), aplicando o método da perturbação para as equações integrais. Solução analítica da fusão de uma placa plana, sujeita à condição de contorno de segunda espécie, foi obtida por Zhang et al.(1990). Macedo e Orlande(1995) estimaram o calor latente para a solidificação numa placa plana, isolada numa de suas extremidades, pelo método de Levensberg-Marquardt

Rego(1991) analisou numericamente, por diferenças finitas à volume de controle, associado ao método da entalpia de Bonacina e Comini(1973) , a fusão e a solidificação de um material de mudança de fase, em torno de um cilindro vertical e concluiu que, durante a

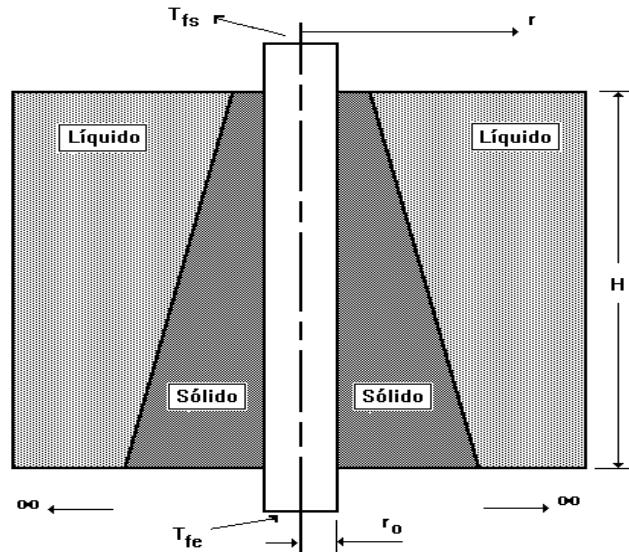
solidificação, o processo é predominantemente controlado pela condução de calor e a convecção começa a ter efeito quando a temperatura inicial é bem superior à temperatura de mudança de fase.

Melo e Ismail(1992) usaram o modelo de Shamsundar(1975) para localizar iterativamente as interfaces líquidas e sólidas e as equações de conservação, em termos da função corrente e da vorticidade, para resolver o problema bidimensional (  $r$  ,  $z$  ) de solidificação e fusão e analisaram o comportamento do armazenador com relação à sua efetividade. No presente trabalho usa-se um modelo analítico unidimensional, para a solução bidimensional da solidificação de um material de mudança de fase, em torno de um cilindro vertical, onde escoia internamente o fluido de resfriamento.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Conforme observado na Figura 1, o armazenador cilíndrico com material de mudança de fase constitui de dois cilindros concêntricos. O raio do cilindro interno é  $r_o$  e o do cilindro externo se estende infinitamente. O espaço anular entre os dois cilindros é ocupado pelo material de mudança de fase.

Na presente análise será assumido que as densidades  $\rho$  e as difusividades térmicas  $\alpha$  das fases sólida e líquida serão as mesmas. Serão desprezados os efeitos convectivos na fase líquida e o modelo será baseado somente na condução de calor radial transiente (Problema de Stefan) .



**Figura 1.** Esquema do Armazenador

No presente método será inicialmente desenvolvido um modelo de solidificação unidimensional. A solução da solidificação bidimensional ( $r,z$ ) será feita com base na formulação unidimensional.

No modelo unidimensional, o material de mudança de fase envolve o cilindro interno, enquanto o fluido de trabalho escoia no interior deste, conforme a Figura 1.

O problema unidimensional de solidificação é definido como segue:

O material de mudança de fase está todo fundido com temperatura inicial  $T_i$  maior do que a temperatura de mudança de fase  $T_{mf}$ , bruscamente a superfície do cilindro interno é submetida à temperatura  $T_o < T_{mf}$  .

Tomando como base a solução de um problema de condução de calor radial transiente, para corpos semi-infinitos, os campos de temperatura adimensional nas fases sólida e líquida são encontrados como segue:

$$\frac{T_s(r, t) - T_o}{T_{mf} - T_o} = \frac{E1\left[\left(\frac{r}{r_o}\right)^2 \frac{1}{4Fo}\right] - E1\left(\frac{1}{4Fo}\right)}{E1(\lambda^2) - E1\left(\frac{1}{4Fo}\right)} \quad (1)$$

$$\frac{T_1(r, t) - T_o}{T_{mf} - T_o} = \frac{Ste_2 + \frac{c_1}{c_s} Ste_1}{\frac{c_1}{c_s} Ste_1} - \frac{\frac{c_s}{c_1} Ste_2 E1\left[\left(\frac{r}{r_o}\right)^2 \frac{1}{4Fo} \frac{\alpha_s}{\alpha_1}\right]}{Ste_1 E1\left(\lambda^2 \frac{\alpha_s}{\alpha_1}\right)} \quad (2)$$

E1 é a função exponencial integral que é definida matematicamente como:

$$E1(x) = \int_1^{\infty} \frac{\exp(-tx)}{t} dt \quad (3)$$

$$Ste_2 = \frac{c_s}{L} (T_i - T_{mf}) \quad (4)$$

Ste<sub>2</sub> é o número de Stefan relativo à temperatura inicial Ti.

$$Ste_1 = \frac{c_s}{L} (T_{mf} - T_o) \quad (5)$$

Ste<sub>1</sub> é o número de Stefan relativo à temperatura de parede.

L - calor latente de mudança de fase;

λ - posição adimensional da interface sólido-líquido;

Fo - número de Fourier.

A interface sólido-líquido adimensional pode ser escrita por:

$$\lambda = \frac{s(t)}{\sqrt{2Fo}} \quad (6)$$

$$Fo = \frac{\alpha_s t}{r_o^2} \quad (7)$$

O balanço de energia na interface sólido-líquido conduz à seguinte equação:

$$K_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} - K_s \frac{\partial T_s}{\partial r} = \rho_s L \frac{ds(t)}{dt} \quad (8)$$

Substituindo-se as equações ( 2 ) e ( 3 ), com suas respectivas derivadas, na equação (8) obtêm-se a posição adimensional da interface sólido-líquido  $\lambda$  pela equação:

$$Ste_2 \frac{\exp(-\lambda^2)}{Ei(\lambda^2)} - Ste_1 \frac{\exp(-\lambda^2)}{Ei\left(\frac{1}{4Fo}\right) - Ei(\lambda^2)} + \lambda^2 = 0 \quad (9)$$

A expressão ( 9 ) representa a equação característica para determinar a posição adimensional da interface  $\lambda$  para o problema unidimensional

As equações que se seguem serão usadas para definir o modelo bidimensional de solidificação.

Igualando-se a energia cedida pelo material de mudança de fase com a energia recebida pelo fluido de trabalho, tem-se:

$$Ste_1 = \frac{Bi(2r_0)Ste_3}{Bi(2r_0) + \frac{4\exp\left(-\frac{1}{4Fo}\right)}{Ei\left(\frac{1}{4Fo}\right) - Ei(\lambda^2)}} \quad (10)$$

$$Ste_3 = \frac{c_s}{L} (T_{mf} - T_f) \quad (11)$$

$Ste_3$  é o número de Stefan relativo à temperatura do fluido  $T_f$ .

$$Bi(2r_0) = \frac{\bar{h}(2r_0)}{K} \quad (12)$$

$K$  - Condutividade térmica do material de mudança de fase.

O balanço de energia entre o material de mudança de fase e o fluido de trabalho conduz à variação da temperatura deste fluido, em termos adimensionais, ao longo do incremento da altura  $\Delta z$  do cilindro interno do armazenador, como:

$$Ste_{3s} = Ste_1 + \left( Ste_{3e} - Ste_1 \right) \exp\left( \frac{-2Nu \frac{H \Delta z}{r_o H}}{Re Pr} \right) \quad (13)$$

$Ste_{3s}$  é o número de Stefan relativo à temperatura do fluido na saída do degrau  $\Delta z$ .

$$Nu(2r_0) = Bi(2r_0) \cdot \frac{K}{K_f} \quad (14)$$

$Nu(2r_0)$  - representa o número de Nusselt.

$K_f$  - Condutividade térmica do fluido de trabalho.

$$Re(2r_0) = \frac{\bar{v}(2r_0)}{v_f} \quad (15)$$

$Re(2r_0)$  - representa o número de Reynolds.

- $\bar{v}$  - Velocidade média do fluido de trabalho.  
 $\nu_f$  - Viscosidade cinemática do fluido de trabalho.  
 $Pr$  - Número de Prandtl do fluido de trabalho.

No modelo bidimensional a interface sólido-líquido e o campo de temperatura nas fases sólida e líquida são função da altura do armazenador.

O processo de cálculo iterativo deste modelo bidimensional é feito conforme o algoritmo que se segue:

- 1 - Atribui-se à variável valor = 5 ;
- 2- Calcula-se o número de Stefan ( $Ste_{3e}$ ), relativo à temperatura do fluido na entrada do armazenador  $T_{fe}$  ;
- 3- Calcula-se o número de Stefan  $Ste_2$ , relativo à temperatura inicial do material de mudança de fase  $T_i$  ;
- 4- Atribui-se ao número de Stefan, da parede na entrada do armazenador  $Ste_{1e}$ , o valor de  $Ste_{3e}$  ;
- 5- Com base no método iterativo de Newton Raphson e atribuindo-se, como valor inicial para  $\lambda$ , o valor  $\lambda_0 = \frac{1.5}{\sqrt{2Fo}}$ , determina-se a raiz da equação ( 9 ) ;
- 6- Corrige-se o valor do número de Stefan na parede  $Ste_{1e}$ , com base na equação ( 10 ) ;
- 7- Se  $\left| \frac{Ste_{1e} - \text{valor}}{Ste_{1e}} \right| > \text{Tolerância}$ , toma-se: valor =  $Ste_{1e}$  e vá ao item 5 ;
- 8- Determina-se, pela equação ( 6 ), a posição adimensional da interface sólido-líquido;
- 9- Determina-se o campo de temperatura no sólido e no líquido, com base nas equações ( 1 ) e ( 2 ) ;
- 10- Calcula-se, pela equação ( 13 ), o número de Stefan relativo à temperatura do fluido na saída,  $Ste_{3e}$ ;
- 11- Altura = Altura +  $\Delta z/H$ ;
- 12- Atribui-se à  $Ste_{3e}$  o valor encontrado no item 10.
- 13- Se Altura  $\leq 1$ , vá ao item 5, caso contrário, Fim.

A taxa de calor absorvida pelo fluido de trabalho e cedida pelo material de mudança de fase (MMF) é determinada por :

$$Q = \pi r_o^2 \bar{v} \rho_f \frac{c_f}{c} L (Ste_{3e} - Ste_{3s}) \quad (16)$$

A taxa de calor adimensional é:

$$Q_{ad} = \frac{Ste_{3e} - Ste_{3s}}{\pi r_o^2 \bar{v} \rho_f \frac{c_f}{c} L} \quad (17)$$

A energia armazenada entre os instantes  $t_0$  e  $t$  é determinada por :

$$E = \pi r_o^4 \bar{v} \rho_f \frac{c_f}{c} \frac{L}{\alpha} \int_{Fo_0}^{Fo} (Ste_{3e} - Ste_{3s}) dFo \quad (18)$$

A energia adimensional é:

$$E_{ad} = \frac{\int_{Fo_0}^{Fo} (Ste_{3e} - Ste_{3s}) dFo}{\pi r_o^4 \bar{V} \rho_f \frac{c_f L}{c \alpha}} \quad (19)$$

$\rho_f$  - densidade do fluido de trabalho;  
 $\bar{V}$  - velocidade média do fluido de trabalho;  
 $c_f$  - calor específico do fluido de trabalho;  
 $c$  - calor específico do MMF.

A efetividade do armazenador é calculada por:

$$\varepsilon = (Ste_{3e} - Ste_{3s}) / Ste_{3e} \quad (20)$$

### 3. RESULTADOS OBITIDOS

Na Figura de 2 pode-se visualizar as posições das interfaces sólido-líquido em função da relação  $H / r_o$  quando o armazenador opera com  $Ste_{3e} = 0.3$  e  $Ste_2 = 0.0$

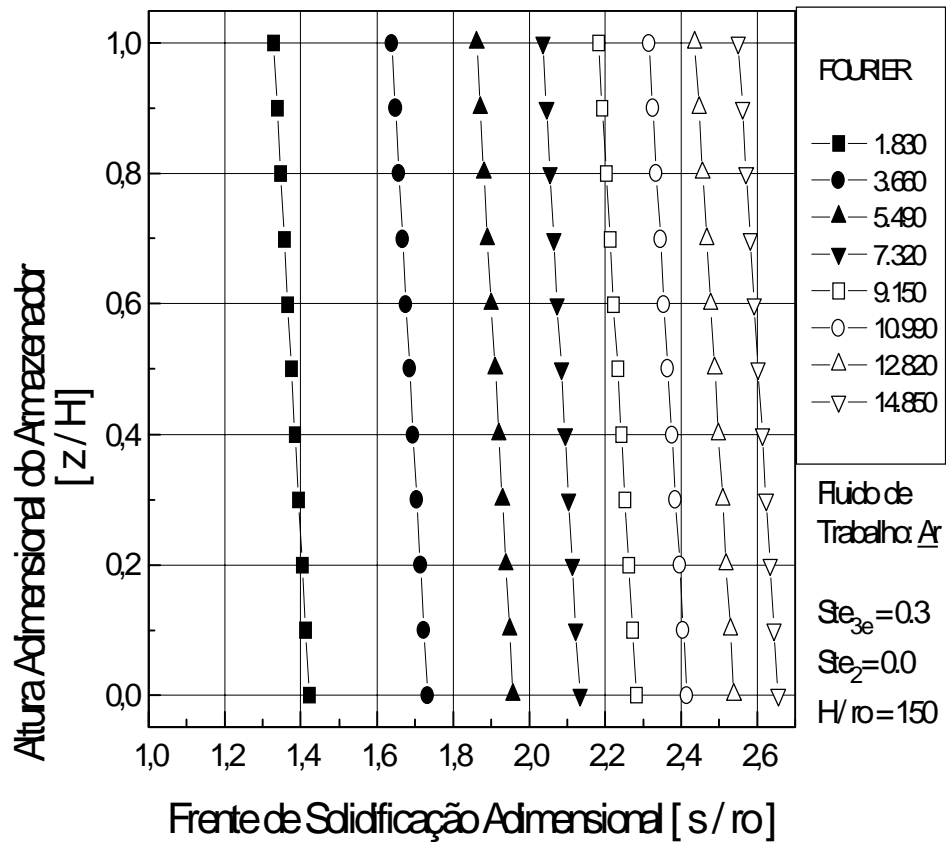
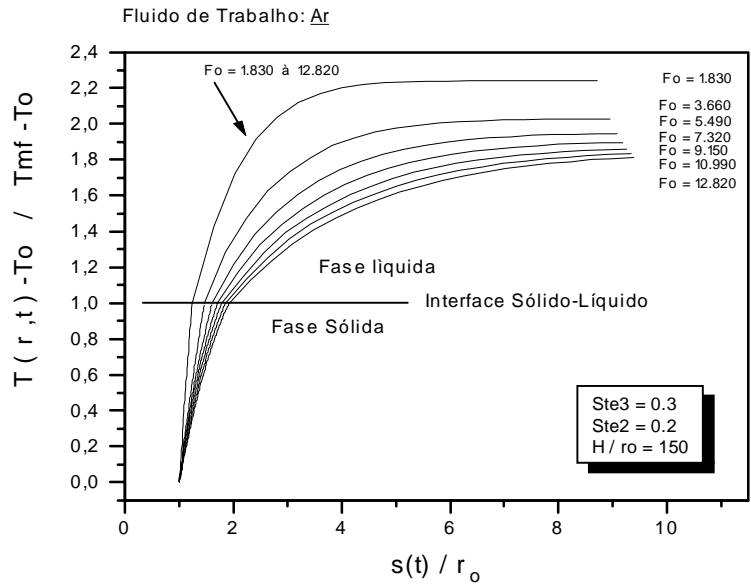


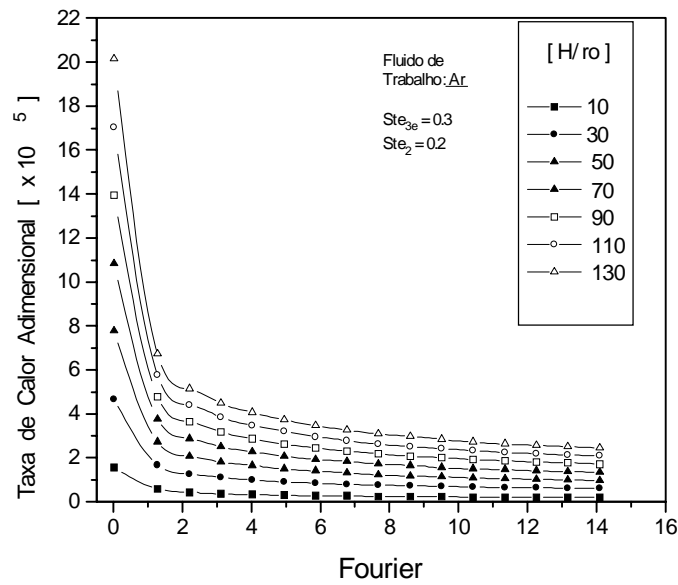
Figura 2. Interfaces Sólido-líquido

Na Figura 3 está mostrado o perfil de temperatura nas fases sólida e líquida, quando o armazenador opera com  $Ste_{3e} = 0.3$  e  $Ste_2 = 0.2$



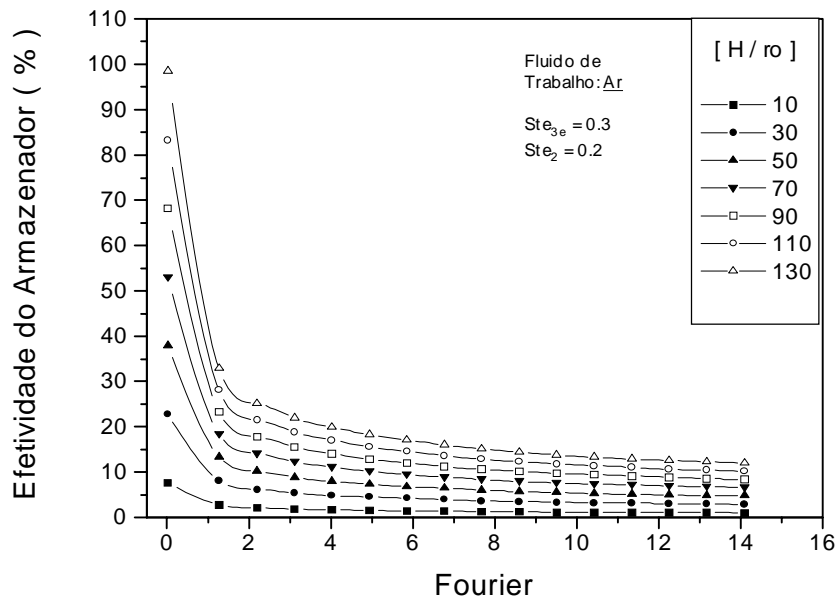
**Figura 3.** Perfis de Temperatura nas Fases Sólida e Líquida

A Figura 4 representa a taxa de calor cedida ao fluido de trabalho para várias relações  $H / ro$ , em função de  $Ste_{3e}$  e  $Ste_2$ .



**Figura 4.** Taxa de Calor

A Figura 5 representa a Efetividade do armazenador para várias relações de  $H / ro$ , em função de  $Ste_{3e}$  e  $Ste_2$ .



**Figura 5.** Efetividade do Armazenador.

#### 4. CONCLUSÕES

Conforme observado nas Figuras 2 à 5, o modelo analítico bidimensional proposto serve para analisar o comportamento do armazenador durante a fase de solidificação e os resultados para  $Ste_2 = 0$ , ou seja efeitos convectivos nulos durante a fase de solidificação, estão de acordo com os modelos **completos** obtidos por Rego(1991) e por Melo e Ismail(1992).

#### 5. REFERÊNCIAS

- Bonacina, C. and Comini, G., 1973, “Numerical Solution of Phase Change Problems”, I. J. Heat Mass Transfer.
- Cho, S. H. and Sunderland, J. E., 1969, Heat Conduction Problem With Melting or Freezing”, ASME Journal of Heat Transfer.
- Goodman, T. R. and Shea, J. J., 1960, “The Melting of Finite Slabs”, ASME Journal of Applied Mechanics.
- Macêdo, E. N. and Orland, R. B., 1995, “Inverse Problem For Estimating the Latent Heat of Solidification”, COBEM-CIDIM.
- Melo, C. A. e Ismail, K. A. R., 1992, “Fusão Dominada Por Convecção de um Material de Mudança de Fase numa Cavidade Vertical Anular”, Tese de doutorado, UNICAMP.
- Ozisik, M. N., 1980, “Heat Conduction, John Wiley & Sons, New York.
- Rego, A. A., 1991, “Análise do Desempenho de Armazenadores Térmicos por Calor Latente de Eixo Vertical”, Tese de doutorado, ITA.
- Shamsundar, N. and Sparrow, E. M., 1975, “Analysis of Multidimensional Conduction Phase Change Via the Enthalpy Model, ASME Journal of Heat Transfer.
- Zhang, Y. W. et al, 1990, “Analytical Solution of Melting in a Subcooled Semi-infinite Solid With a Boundary Condition of the Second Kind”, Int. Symp. On Manufacturing and Materials Processing, Dubrovnik, Yugoslavia.