

# FUSÃO DE METAL PURO DE UMA PAREDE ISOTÉRMICA VERTICAL NA PRESENÇA DE CONVECÇÃO NATURAL

**Luiz Joaquim Cardoso Rocha**

**Angela Ourivio Nieckele**

Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica - RJ

R. Marquês de São Vicente 225- Gávea, 22453-900 Rio de Janeiro RJ

e-mail:nieckele@mec.puc-rio.

## **Resumo**

Estudo numérico da fusão de metal puro partindo de uma parede isotérmica vertical, pelo método de volumes finitos. Um sistema de coordenadas não ortogonal é empregado para se adaptar a geometria irregular, com uma malha móvel para levar em consideração a variação do tamanho do domínio. Um tratamento especial é dado a interface para obter o balanço de calor e seu movimento. As equações de quantidade de movimento linear são resolvidas para os componentes contravariantes da velocidade. O acoplamento velocidade pressão é resolvido por um algoritmo baseado no SIMPLEC. Comparação com dados experimentais disponível na literatura é realizada, validando o método numérico. O processo de mudança de fase é governado pela convecção natural na fase líquida. Para cavidades muito pequenas, somente condução é presente, mas a medida que a cavidade cresce durante o processo de fusão, a convecção natural passa a apresentar influência significativa. O objetivo do presente trabalho consiste em avaliar a influência do parâmetro de subresfriamento na cinética do processo de fusão, investigando os campos de velocidade e temperatura. Os resultados obtidos mostraram que o parâmetro de subresfriamento afeta substancialmente a transferência de calor e a taxa de fusão, influenciando de forma significativa a determinação da solução estacionária e o tamanho da região de fusão.

**Palavras-chave:** Fusão, Metal Puro, Subresfriamento, Volumes Finitos não ortogonal

## **1. INTRODUÇÃO**

Solidificação e fusão fazem parte de uma classe de problemas transientes de transferência de calor conhecidos como problemas de mudança de fase ou de fronteira móvel. Esses problemas são importantes em muitas aplicações da engenharia, tais como solidificação de metais, congelamento de alimentos, fabricação de gelo, controle de inclusões, entre outros. A solução desta classe de problemas envolve uma dificuldade inerente ao processo que é o movimento da interface entre as fases sólida e líquida, daqui por diante denominada interface sólido-líquido. Este movimento se deve à absorção ou remoção do calor latente na interface. Como consequência a localização da interface sólido-líquido não é conhecida a priori tornando-se parte da solução. Quando o material a ser solidificado ou fundido é uma substância pura, a interface entre as fases sólida e líquida se comporta como um contorno bem definido com temperatura igual à temperatura de mudança de fase do material. Isto é, a mudança de fase ocorre apenas quando o material atinge a temperatura de mudança de fase. Por outro lado, na solidificação ou fusão de ligas, misturas ou materiais contendo impurezas, a interface entre as fases sólida e líquida não é mais um contorno bem definido e sim uma região onde o material sofre a mudança de fase. Neste caso, existe uma faixa de temperatura

na qual a mudança de fase se dá. Para problemas de mudança de fase envolvendo substâncias puras, as condições na interface sólido-líquido, devem satisfazer as seguintes considerações: (i) as temperaturas das fases adjacentes à interface devem ser constantes e iguais à temperatura de mudança de fase do material; (ii) um balanço de energia e massa deve ser satisfeito na interface. Viskanta discutiu o fenômeno físico da fusão e solidificação de metais e ligas. É dado ênfase no processo macroscópico de transporte, o qual afeta a forma e o movimento da interface (Viskanta, 1988).

Em geral, as densidades nos sólidos e nos líquidos não são as mesmas, por isso, na mudança de fase, algum movimento no líquido é esperado devido à mudança na densidade. Como a densidade dos sólidos, na temperatura de mudança de fase, é maior do que a densidade dos líquidos (exceto para a água, antimônio e bismuto) há um movimento do líquido em direção à interface durante a fusão.

Devido a não-linearidade destes problemas, causada pelo movimento da interface, o princípio da superposição não pode ser aplicado e cada caso deve ser tratado individualmente. Soluções exatas foram desenvolvidas, entretanto estas são limitadas a um número de situações idealizadas envolvendo regiões semi-infinitas ou infinitas com condições de contorno e inicial simplificadas.

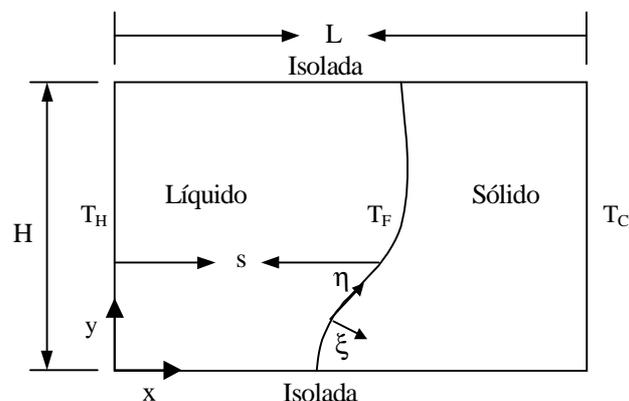
Existem algumas formas de se resolver este tipo de problemas. Pode-se resolver apenas o domínio líquido ou os domínios líquido e sólido (Beckermann e Viskanta, 1989; Ramachandran et. Al, 1982; Benard et al., 1985). Para cada um destes casos pode-se utilizar coordenadas curvilíneas ou coordenadas cartesianas. No caso de se resolver apenas o domínio líquido, considera-se que a temperatura da região sólida é igual à temperatura de mudança de fase do material, tornando-se desnecessária a resolução do domínio sólido. Quando coordenadas curvilíneas são utilizadas, a malha acompanha a forma da interface sólido-líquido, tornando simples o cálculo do balanço de energia e massa na interface. Já, para coordenadas ortogonais, termos de fonte são utilizados para produzir o efeito de curvatura na interface. Comparações entre estes métodos estão em (Lacroix e Voller, 1990).

O problema de mudança de fase na presença de convecção tem sido muito estudado. Podemos citar desde o trabalho de Sparrow et al. (1977) até Sasaguchi et al. (1997) e Vieira et al. (1999). No entanto, ainda existem muitas restrições para serem eliminadas no modelamento matemático para que o fenômeno seja bem compreendido. A utilização de algoritmos mais versáteis e precisos também colaboram na compreensão do fenômeno. O presente trabalho tem por objetivo preencher uma das lacunas encontradas na literatura. Pretende-se avaliar a influência do parâmetro de subresfriamento na cinética do processo de fusão, através da análise dos campos de velocidade e temperatura.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

Considera-se a fusão de metal puro em uma cavidade fechada bidimensional, Figura 1. O fluido é Newtoniano com regime de escoamento transiente. As propriedades em cada fase são constantes e uniformes. A massa específica é modelada através da aproximação de Boussinesq.

As equações de conservação são resolvidas em um sistema de coordenadas que se adapta ao contorno da geometria e, contemplam, quando



**Figura 1.** Geometria

existe movimento de fronteira, sua velocidade de deslocamento. O sistema de coordenadas adotado é relacionado com o sistema cartesiano pelas seguintes relações:  $\xi = \xi(x, y, t)$  e  $\eta = \eta(x, y, t)$ . As equações de massa e quantidade de movimento linear para o líquido são

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho_l \tilde{\mathbf{U}}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho_l \mathbf{U})}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho_l \tilde{\mathbf{U}} \mathbf{U}) = -\mathbf{grad} p + \mathbf{div}(\mu_l \mathbf{grad} \mathbf{U}) + \rho_l \mathbf{g} [1 - \beta_l (T - T_F)] \quad (2)$$

onde  $\rho_l$ ;  $\mu_l$  e  $\beta_l$  são massa específica; viscosidade absoluta e o coeficiente de expansão térmica do líquido.  $p$  é a pressão termodinâmica,  $\mathbf{g}$  é o vetor aceleração da gravidade,  $T_F$  é a temperatura de mudança de fase,  $\tilde{\mathbf{U}}$  representa o vetor velocidade relativo as coordenadas  $(\xi, \eta)$  e  $\mathbf{U}$  é o vetor velocidade absolutas. Estes são relacionados por  $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} - \mathbf{U}_g$ , sendo  $\mathbf{U}_g$  a velocidade devidas ao movimento da fronteira.

A equação da energia para as regiões líquida e sólida, respectivamente, são:

$$\frac{\partial(\rho_l T_l)}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho_l \tilde{\mathbf{U}} T_l) = \mathbf{div}(k_l / c_{p_l} \mathbf{grad} T_l) \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho_s T_s)}{\partial t} = \mathbf{div}(k_s / c_{p_s} \mathbf{grad} T_s) \quad (4)$$

onde  $T$  é a temperatura, sendo  $k$  e  $c_p$  a condutividade térmica e calor específico a pressão constante. Os subscritos  $l$  e  $s$  correspondem as fases líquida e sólida, respectivamente.

Estas equações foram resolvidas considerando-se que inicialmente o fluido está em repouso, com temperatura baixa e constante, igual a  $T_C$ . Para  $t > 0$ , a parede do lado esquerdo ( $x = 0$ ) é aquecida para  $T_H$ , sendo mantida neste temperatura, enquanto que a parede do lado direito continua na temperatura  $T_C$ . As superfícies superior e inferior são adiabáticas.

Na interface sólido-líquido,  $\xi = s(\eta, t)$ , tem-se que a velocidade absoluta é nula e, a temperatura do sólido e líquido são iguais a  $T_F$ , temperatura de mudança de fase. Na interface, o seguinte balanço de energia e massa deve ser respeitado:

$$k_s \mathbf{grad} T_s - k_l \mathbf{grad} T_l = \rho_s \Delta h_F \mathbf{U}_g \quad (5)$$

onde  $\Delta h_F$  é o calor latente associado à mudança de fase.

Analisando as equações de conservação, juntamente com as condições de contorno e iniciais e o balanço de energia e massa realizado na interface, observa-se que a solução adimensional da temperatura do sólido e líquido em função do tempo:

$$\theta_s = \frac{T_s - T_F}{T_F - T_C} ; \quad \theta_l = \frac{T_l - T_F}{T_H - T_F} ; \quad Fo = \alpha_l t / L^2 \quad (6)$$

depende dos seguintes parâmetros adimensionais

$$Ste_l = \frac{c_{p_l} (T_H - T_F)}{\Delta h_F} ; \quad Pr_l = \frac{\nu_l}{\alpha_l} ; \quad Ra_l = \frac{g \beta (T_H - T_F) L^3}{\nu_l \alpha_l} ; \quad RA = H/L \quad (7)$$

$$\alpha^* = \alpha_l / \alpha_s ; \quad k^* = k_l / k_s ; \quad \rho^* = \rho_l / \rho_s ; \quad S_T = (T_F - T_C) / (T_H - T_F) \quad (8)$$

onde  $RA$  é a razão de aspecto e  $Ste_l$ ;  $Pr_l$  e  $Ra_l$  são número de Stefan, Prandtl e Rayleigh

associado ao líquido, sendo que  $\alpha = k/(\rho c_p)$  e  $\nu = \mu/\rho$  são a difusividade térmica e a viscosidade cinemática.

### 3. MÉTODO NUMÉRICO

O método numérico selecionado é o de volumes finitos, isto é, diferenças finitas com formulação em volumes de controle (Patankar, 1980). Utilizou-se o esquema *power-law* para avaliar os fluxos nas faces dos volumes de controle. A variável dependente na equação de conservação de quantidade linear são os componentes contravariantes da velocidade de acordo com Pires e Nieckele (1994), os quais são armazenados deslocados das outras variáveis para evitar solução com oscilações. O acoplamento entre velocidade-pressão foi resolvido com o algoritmo baseado no SIMPLEX (van Doormaal and Raithby, 1984). O sistema algébrico resultante foi resolvido com o algoritmo TDMA linha por linha (Patankar, 1980) com o algoritmo de correção por blocos para acelerar a convergência.

#### 3.1 Geração da Malha

Devido ao movimento da interface, a malha computacional deve ser gerada cada vez que esta muda sua posição. Porém, considerando que o avanço da interface se faz somente na direção horizontal, não é necessário recalcular a malha na direção vertical.

Para melhorar a resolução da solução, a malha deve ser concentrada nas proximidades da interface, na direção horizontal. Na direção vertical utilizou-se malha uniforme. As seguintes expressões foram utilizadas na direção horizontal, na região líquida e sólida, respectivamente

$$x_{i,j} = \left( \frac{i-2}{ift-2} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} \left( 2\pi \frac{i-2}{ift-2} \right) \right) s(\eta, t) \quad 2 \leq i \leq ift \quad (9)$$

$$x_{i,j} = x_{ift,j} + \left( \frac{i-(ift+1)}{m-(ift+1)} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} \left( 2\pi \frac{i-(ift+1)}{m-(ift+1)} \right) \right) (L - s(\eta, t)) \quad ift+1 \leq i \leq m$$

onde  $m$  é o número total de pontos,  $ift$  é o número de pontos até a frente, e  $s$  é a posição da frente.

A fim de melhorar a distribuição dos pontos nodais por todo o domínio utiliza-se um artifício de migrar os pontos nodais da região sólida para a líquida. Como no início do problema a cavidade possui uma espessura muito pequena na região líquida, torna-se desinteressante a colocação de muitos pontos nodais nesta região. Entretanto, com o avanço da frente de mudança de fase, a região líquida vai crescendo, tornando-se necessário o aumento do número de pontos nodais nesta região. Por outro lado, a região sólida vai diminuindo de tamanho e, por consequência, é necessária a retirada de pontos nodais desta região. Daí, os pontos nodais migrarem da região sólida para a região líquida. A decisão para que haja a migração dos pontos nodais é feita tomando-se por base a posição da frente de mudança de fase. Quando esta atinge valores preestabelecidos ocorre a migração.

Foram utilizados 55 e 77 pontos nodais nas direções vertical e horizontal, respectivamente. A região líquida sempre inicia com 15 pontos nodais. O número final de pontos nesta região dependerá do avanço da interface.

#### 3.2 Avaliação da interface

O método desenvolvido consiste em criar um volume de controle de espessura zero na direção normal à direção de propagação da frente. Fazendo com que duas faces deste volume de controle sejam coincidentes surge um volume de controle com o ponto nodal e duas faces na mesma coordenada. Assim, o domínio fica, claramente, subdividido em duas regiões, uma líquida e outra sólida, separadas por uma interface.

As equações de conservação da quantidade de movimento linear e de conservação da massa são resolvidas apenas na região líquida, enquanto que a equação de conservação da energia é resolvida em todo o domínio, regiões líquida e sólida. Embora a equação da energia seja resolvida em todo o domínio a condição de temperatura prescrita na interface é o acoplamento entre as duas regiões.

### 3.3 Procedimento de resolução

Na resolução de problemas de mudança de fase a posição da fronteira é parte integrante da solução, fazendo com que a resolução do problema se torne mais complicada. Entretanto, de acordo com (Benard et. Al, 1985 e 1986) o movimento do fluido dentro da cavidade não é fortemente influenciado pelo movimento da interface. Portanto, para cada intervalo de tempo, os campos de temperaturas e velocidades podem ser resolvidos mantendo-se a interface sólido-líquido imóvel.

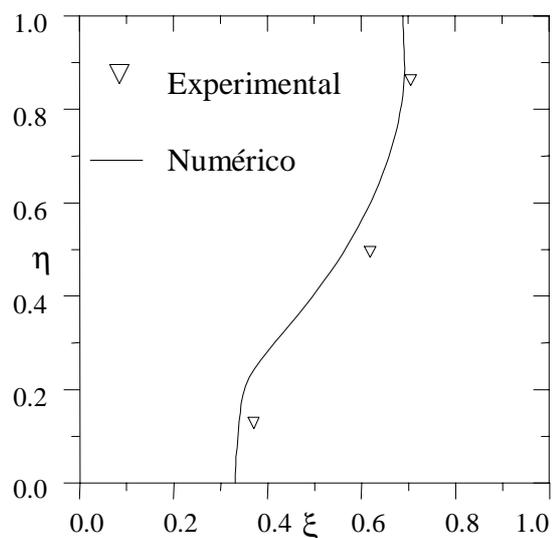
O cálculo da posição da interface sólido-líquido é realizado em duas etapas. Primeiramente, para um determinado valor de intervalo de tempo, uma aproximação explícita é utilizada para calcular a posição da interface sólido-líquido:  $s^n = s^{n-1} + \mathbf{U}_g^{n-1} dt / h_\eta \partial y / \partial \eta$ , onde o índice  $n$  é relativo ao intervalo de tempo utilizado,  $\mathbf{U}_g$  é o componente contravariante da velocidade da interface na direção  $\xi$  e  $h_\eta = [(\partial x / \partial \eta)^2 + (\partial y / \partial \eta)^2]^{1/2}$  é a métrica associada a direção  $\eta$ .

Com esta interface calculada, o conjunto de equações de conservação e condições de contorno, equações (1) a (4) é resolvido. Após a convergência destas equações (resíduo menor do que  $10^{-8}$ ), utiliza-se o novo campo de temperaturas para calcular a nova posição da interface sólido-líquido, utilizando-se a equação (5). Este procedimento é repetido até que haja convergência em apenas uma iteração por duas vezes consecutivas, garantindo assim, uma posição estacionária da interface naquele intervalo de tempo.

Utilizou-se um intervalo de tempo variando de  $10^{-8}$  a  $10^{-2}$  horas, de acordo com as necessidades da resolução, tais como, impressão dos resultados e necessidade de migração dos pontos nodais.

## 4. RESULTADOS

Inicialmente, visando validar o presente procedimento de cálculo, realizou-se uma comparação dos resultado numéricos obtidos com dados experimentais obtidos por (Beckermann e Viskanta, 1989) para o problema de fusão após haver atingido um equilíbrio entre o fluxo de calor do lado da fase sólida e líquida, resultando em uma frente estacionária. A Figura 2 apresenta a forma estacionária da interface utilizando os seguintes parâmetros:  $Pr_l = 0,0208$ ;  $Ra_l = 3,275 \times 10^5$ ;  $Ste_l = 5,074 \times 10^{-2}$ ;  $RA = 1,0$ ;  $k^* = 1,0$ ;  $\alpha^* = 1,105$ ;  $\rho^* = 0,969$  e  $St_T = 1,935$ . Os resultados numéricos apresentaram boa concordância com os dados experimentais.



**Figura 2.** Posição da interface estacionária para o problema teste

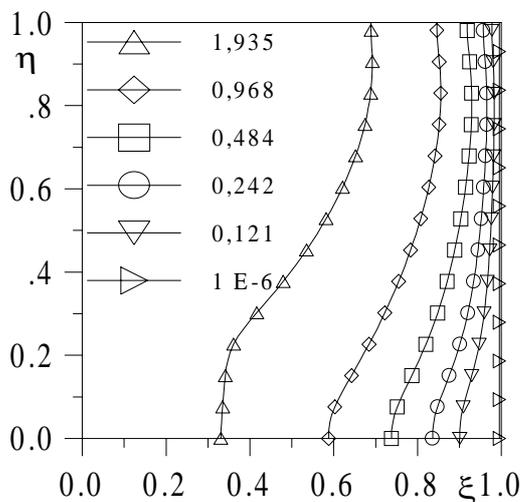
Visando investigar o efeito do parâmetro de subresfriamento, resolveu-se o problema de fusão, mantendo-se os mesmos parâmetros que o problema teste acima, com exceção do parâmetro  $S_T$ , o qual foi variado de 0,121 até 1,935.

A Figura 3, ilustra a localização da interface estacionária sólido-líquido em função do parâmetro de subresfriamento, para os cinco valores de  $S_T$  investigados.

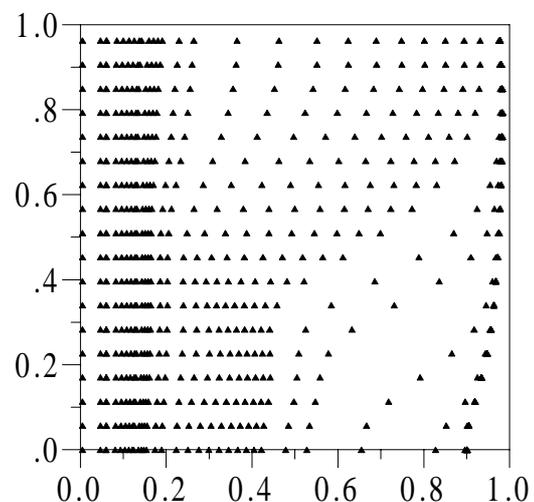
O fato de se manter a temperatura da parede fria abaixo da temperatura de mudança de fase, faz com que parte da energia disponível para alterar a fase do material seja despendida no aquecimento da região sólida. Logo, a interface sólido-líquido sempre experimentará uma posição estacionária anterior ao tamanho do domínio na direção de propagação da interface. De acordo com a figura abaixo, a medida que o valor do parâmetro de subresfriamento,  $S_T$ , diminui, a posição estacionária da interface sólido-líquido avança no sentido da parede fria. Quanto mais a interface avança, devido à diminuição de  $S_T$ , mais suave será sua curvatura. No limite, quando  $S_T$  tende a zero, o sólido possui temperatura constante e igual à temperatura de mudança de fase. Neste caso, o valor da posição estacionária da interface tende a  $s(\eta/t)/L = 1,0$ .

A Figura 4 apresenta a evolução temporal da interface sólido-líquido até chegar ao regime estacionário para  $S_T = 0,121$ . De acordo com a Figura 4, podemos notar quatro estágios diferentes do avanço da interface durante o processo de fusão. No primeiro, a interface se move paralela às paredes verticais da cavidade. Num segundo momento, a região superior da interface avança rapidamente enquanto que a região inferior avança lentamente, provocando uma forte curvatura em sua estrutura. Em seguida, o avanço da região superior decai, porém este ainda é maior do que o avanço na região inferior, fazendo com que a interface se movimente, aproximadamente, com o mesmo formato em sua curvatura. Finalmente, a região superior encontra um estado estacionário enquanto que a região inferior avança.

No primeiro estágio, a transferência de calor se dá exclusivamente por condução. Portanto, os gradientes de temperatura ao longo da interface são iguais, tanto na região líquida quanto na região sólida e, esta se move de maneira uniforme na direção da parede fria. No segundo estágio, a convecção começa a dominar o processo e, os gradientes de temperatura, na região líquida, passam a ser maiores na porção superior da interface. Do lado sólido os gradientes de temperatura ao longo da interface obedecem a mesma regra, porém com menor intensidade. Como um balanço de energia e massa ao longo da interface é responsável por seu movimento, esta avança mais rapidamente na porção superior da interface, provocando uma curvatura em sua forma. Esta curvatura é inicialmente suave e, com o passar do tempo, torna-se mais acentuada. Este aumento na curvatura da interface favorece o aparecimento de uma



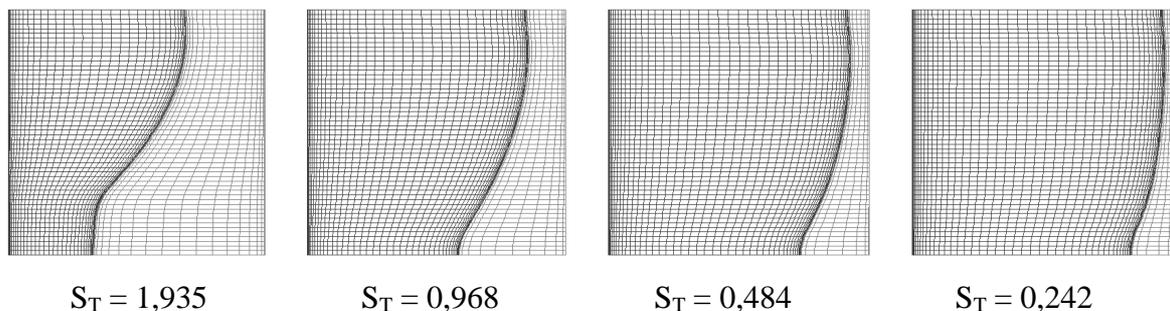
**Figura 3.** Efeito de  $S_T$  na posição da frente estacionária.



**Figura 4.** Avanço temporal da frente de fusão.  $S_T = 0,121$ .

grande recirculação na parte superior da cavidade. Já na região inferior, o fluido gira com baixas velocidades, relativas àquelas da recirculação superior. Daí, o fato da região superior mover-se mais rapidamente do que a região inferior, pois ali o modo de transferência de calor é convectivo, isto é, o fluxo de calor é maior do que na região inferior onde a transferência de calor se dá, predominantemente, na forma de condução. Pode-se notar este fato pela forma vertical da região inferior da interface. No terceiro estágio, a parte superior da interface está muito próxima da parede, portanto a convecção começa a agir na parte de baixo, onde ainda existe material sólido para fundir. No quarto estágio, gradativamente, a interface vai ganhando posição estacionária, partindo da região superior para a inferior, fazendo com sua curvatura se torne menos acentuada. Com a suavização da interface o fluido passa a girar na sua região inferior, fazendo com que a transferência de calor ali passe a ser dominada pela convecção. Assim, a interface deixa de exibir forma vertical, característica da transferência de calor por condução. A taxa de avanço da interface cresce, até que esta atinja, na região inferior, a posição de equilíbrio.

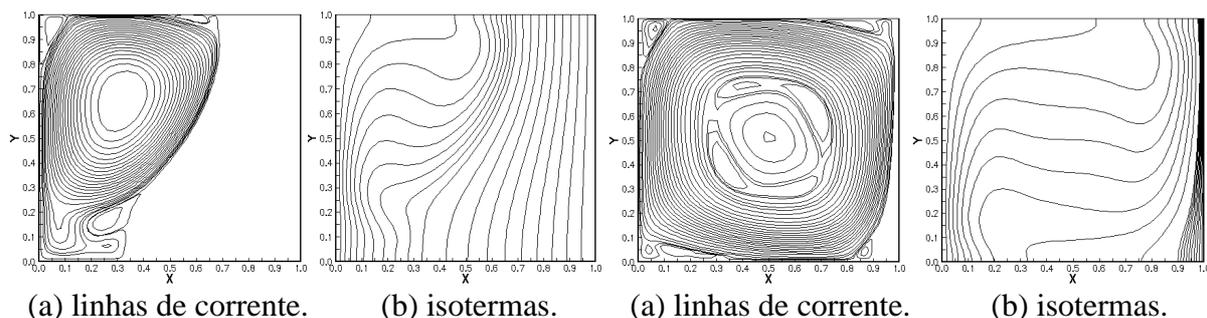
A Figura 5 apresenta a posição da interface e a malha, para  $S_T = 1,935$ ;  $0,968$ ;  $0,484$  e  $0,242$ . A distribuição da malha mostra claramente a versatilidade do artifício de se migrar os pontos nodais da região sólida para a região líquida quando do avanço da interface. Nota-se uma distribuição mais homogênea dos pontos nodais em todo o domínio, independente da posição em que a interface se encontra.



**Figura 5.** Posição da interface e malha

As Figuras 6 e 7 ilustram as linhas de corrente e isotermas correspondentes ao fator de subresfriamento  $S_T = 1,935$  e  $0,121$ , respectivamente. As linhas de corrente e isotermas estão igualmente espaçadas e divididas em vinte e um níveis diferentes. Observa-se uma recirculação principal, com pequenos vórtices nos cantos, e alta intensidade próximo às superfícies sólidas. Nota-se uma distribuição de temperatura aproximadamente linear no sólido, enquanto no centro da recirculação principal, onde a intensidade do vetor velocidade é menor, o fluido encontra-se estratificado. Percebe-se que no final do processo a convecção domina o processo de transferência de calor ao longo de toda a interface.

A influência do fator de subresfriamento  $S_T$  no Número de Nusselt, definido como,  $Nu = q L / [k_l (T_H - T_C)]$  em função de  $Fo^* = Fo Ste$ , é ilustrada na Figura 8. A medida que o fator de subresfriamento diminui, o Nusselt aumenta. No limite, quando  $S_T$  tende a zero, o Nusselt tende a unidade (convecção natural em uma cavidade quadrada em regime permanente).



**Figura 6.**  $S_T = 1,935$

**Figura 7.**  $S_T = 0,121$

## 5. CONCLUSÃO

A fusão de metais puros em cavidades fechadas na presença de subresfriamento na região sólida é apresentada. O método numérico é validado através de dados experimentais. Apresenta-se uma nova metodologia para avaliação da interface e um artifício para se redistribuir os pontos nodais através do domínio com o seu avanço. No problema analisado, o fator de subresfriamento faz com que a interface sólido-líquido sempre apresente posição estacionária antes do final do domínio. Seu aumento provoca uma diminuição no avanço da interface com conseqüente aumento na curvatura de seu perfil. Quatro estágios distintos no avanço da interface aparecem no decorrer do processo de fusão. Análises adicionais e experimentos são necessários na investigação de elevados números de Rayleigh, diferentes razões de aspectos e números de Prandtl.

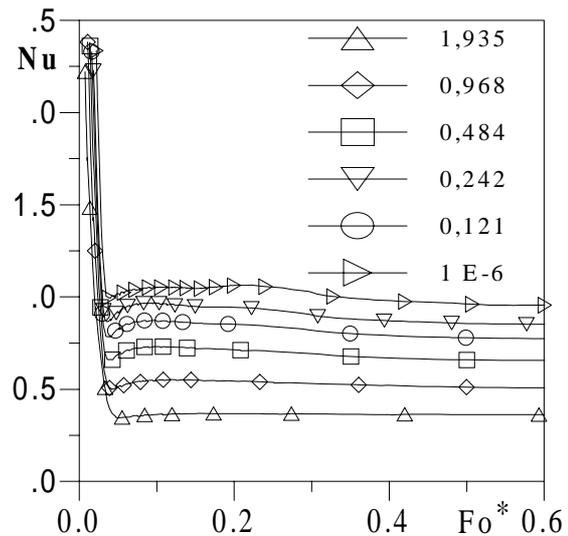


Figura 8. Variação temporal de Nusselt

## 6. REFERÊNCIA

- Beckermann, C., Viskanta, R., 1989, "Effect of Solid Subcooling on Natural Convection Melting of a Pure Metal", ASME Journal of Heat Transfer, vol.11, pp.416-424, 1989.
- Benard, C., Gobin, D. e Martinez, F., 1985, "Melting in a Rectangular Enclosure: Experiments and Numerical Simulations", ASME J. of Heat Transfer, vol.107, pp.794-802.
- Benard, C., Gobin, D., e Zanolli, A., 1986, "Moving Boundary Problem: Heat Conduction in the Solid Phase of a Phase-Change Material During Melting Driven by Natural Convection in the Liquid", International Journal of Heat and Mass Transfer, vol.29, pp.1669-1684.
- Lacroix, M. E Voller, V.R., 1990, "Finite Difference Solutions of Solidification Phase Change Problems: Transformed versus Fixed Grids", Numerical Heat Transfer, Part B, vol.17, pp.25-41.
- Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer e Fluid Flow", Mcgraw-Hill;
- Pires, L. F. G. e Nieckele, A. O., 1994, "Numerical Method For The Solution Of Flows Using Contravariant Components In Non-Orthogonal Coordinates", Proc. V Brazilian Meeting on Thermal Sciences, SP, pp. 343-346 (in Portuguese).
- Ramachandran, N., Gupta, J.P. e Jalúria, Y., 1982, "Thermal and Fluid Flow Effects During Solidification in a Rectangular Enclosure", International Journal of Heat and Mass Transfer, vol.25, no. 2, pp.187-194.
- Sasaguchi, K., Kusano, K., Viskanta, R., 1997, "A Numerical Analysis of Solid Liquid Phase Change Heat Transfer Around a Single and Two Horizontal, Vertically Spaced Cylinders in a Rectangular Cavity", Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 40., No. 6, pp. 1343-1354
- Sparrow, E.M., Patankar, S.V., Ramadhyani, S., 1977, "Analysis of Melting in the Presence of Natural Convection in the Melt Region", J. Heat Transfer, Vol. 99, pp. 520-526.
- Van Doormaal, J. P. e Raithby, G. D., 1984, Enhancements of the Simple Methods for Prediction Incompressible Fluid Flow, Num. Heat Transfer, vol. 7, pp147-163.
- Vieira, G.M.R., Braga, S.L., Gobin, D. 1999, "Analysis of the Melting Process in Presece of Natural Convection and Density Maximum", XV COBEM, CD-ROM.
- Viskanta, R., 1988, "Heat Transfer During Melting and Solidification of Metals", ASME Journal of Heat Transfer, vol.110, pp. 1205-1219.