ANÁLISE TEÓRICA DA LUBRIFICAÇÃO NÃO-NEWTONIANA DE MANCAIS HIDRODINÂMICOS DE SAPATAS RETANGULARES – MODELO *POWER LAW*

Paulo Fernandes Silva
(Bolsista Recém-Doutor FAPEMIG)
Hélio Henrique Rabelo
(Bolsista Iniciação Científica FAPEMIG)
Vilmar Arthur Schwarz
José Célio Dias
Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Departamento de Mecânica
Cx. P. 50 – 37500-000 – Itajubá, MG, Brasil. E-mail: psilva@iem.efei.br

Resumo

O desenvolvimento de um modelo teórico para a lubrificação não-newtoniana é apresentado e aplicado à análise do comportamento operacional de mancais hidrodinâmicos de sapatas retangulares. Entre os modelos reológicos usados na lubrificação hidrodinâmica não-Newtoniana, o modelo *power law* tem sido bastante utilizado, pois apresenta uma boa aproximação para a relação tensão cisalhante versus taxa de deformação e, portanto, será utilizado no presente trabalho. A equação unidimensional de Reynolds generalizada para um fluido *power law* é deduzida usando-se o método de perturbação de primeira ordem, o que resulta em uma equação aproximada. A seguir é feita uma análise de erro, com a finalidade de se determinar as condições de trabalho em que a solução aproximada pode ser aplicada. Finalmente, uma análise do comportamento operacional de um mancal hidrodinâmico infinitamente largo é apresentada.

Palavras-chave: Lubrificação não-Newtoniana, Modelo *Power Law*, Método de Perturbação.

1. INTRODUÇÃO

Na indústria moderna, a utilização de fluidos lubrificantes que apresentam um comportamento não-Newtoniano vem crescendo a cada dia. Como exemplo pode-se citar a aplicação de óleos minerais com adição de polímeros aumentadores do índice de viscosidade, graxas, lubrificantes sintéticos e naturais, que apresentam características reológicas necessárias em determinadas aplicações.

A teoria clássica de Reynolds da lubrificação hidrodinâmica é incapaz de predizer com precisão o comportamento de mancais operando com fluidos não-Newtonianos. Atentos a este fato, vários pesquisadores têm se dedicado ao estudo da lubrificação não- Newtoniana, entre os quais destacam-se os trabalhos de Dien & Elrod (1983), Buckholz (1986), Jianming & Gaobing (1989),Johnson & Mangkoesoebroto (1993) e Rodkiewicz & Huang (1998).

Atualmente, a maioria dos trabalhos teóricos sobre lubrificação não-Newtoniana são desenvolvidos com base na equação de Reynolds generalizada para fluidos *power law*, proposta por Dien & Elrod (1983). Este modelo teórico admite que a taxa de deformação interna do fluido é gerada principalmente pelas velocidades relativas das superfícies. Assim, a análise se aplica tanto para fluidos não-Newtonianos com alta dominância de Couette como para fluidos Newtonianos com componentes arbitrárias de Couette-Poiseuille.

2. MODELO FÍSICO

A figura 1 apresenta esquematicamente o mancal de sapatas retangulares a ser analisado, onde U é a velocidade da peça móvel, enquanto que h_0, h_1, L e B são respectivamente as espessuras mínima e máxima do filme de lubrificante, o comprimento e a largura da sapata.

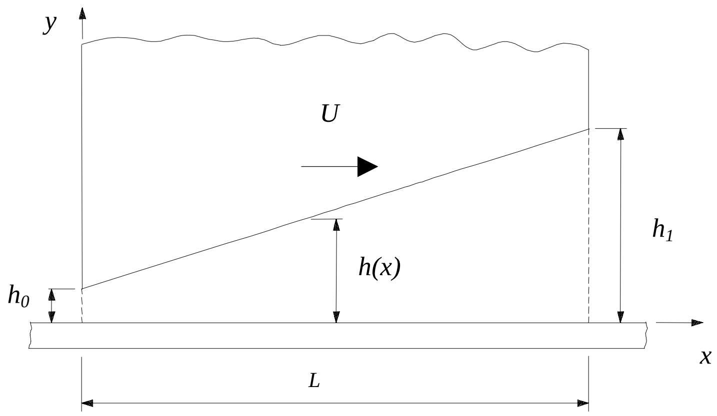


Figura 1. Mancal hidrodinâmico de sapatas retangulares

A espessura adimensional H do filme de lubrificante e a inclinação específica k da sapata do mancal mostrado na figura 1 são dadas respectivamente por:

$$H = \frac{h(x)}{h_0} = \left[1 + k\left(\frac{x}{L}\right)\right] \qquad \text{e} \qquad k = \left(\frac{h_1}{h_0}\right) - 1 \tag{1}$$

Conforme pode-se observar na figura 1, as condições de contorno de velocidade são:

$$y = 0 \quad : \quad u = 0 \tag{2a}$$

$$y = h \quad : \quad u = U \tag{2b}$$

3. MODELO TEÓRICO

Fazendo-se as hipóteses usuais da lubrificação hidrodinâmica e considerando que o mancal é infinitamente largo, as equações de movimento no filme fluido resultam em;

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \tag{3}$$

As relações constitutivas da tensão de cisalhamento τ e da viscosidade aparente μ para um fluido *power law* são dadas respectivamente por;

$$\tau = m\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^n \qquad \text{e} \qquad \mu = m\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{n-1} = m\,I^{\,n-1} \tag{4}$$

onde o parâmetro n é o índice de característica reológica do fluido e m é a viscosidade plástica do fluido, a qual não depende da taxa de deformação.

O índice n caracteriza os fluidos da seguinte forma: $n > 1$ fluido dilatante, $n < 1$ fluido pseudoplástico e $n = 1$ fluido Newtoniano.

Das identidades na equação (4), obtém-se;

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \tag{5}$$

Para se obter uma solução aproximada da equação (3) faz-se a hipótese de dominância de Couette no escoamento. Esta hipótese inicial é razoável, pois, quando a velocidade relativa entre as duas superfícies é grande, pode-se aplicar a condição de deslizamento puro. Conforme proposto por Dien & Elrod (1983), a solução aproximada da equação (3) pode ser obtida utilizando-se o método de pequenas perturbações, admitindo-se que as variáveis dependentes do problema possam ser expandidas em termos de uma pequena perturbação, ε.

No caso da componente de velocidade, u, obtém-se;

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + ... \tag{6}$$

onde u_0 é a componente arbitrária de Couette, de acordo com a hipótese mencionada acima, e u_1 é a componente de Pouiseuille.

Portanto, as condições de contorno de velocidade resultam em:

$$y = 0 \quad : \quad u_0 = 0 \quad u_1 = 0 \tag{7a}$$

$$y = h \quad : \quad u_0 = U \quad u_1 = 0 \tag{7b}$$

Diferenciando a equação (6) e considerando a primeira ordem de perturbação, obtém-se;

$$I = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial y} = I_0 + \varepsilon I_1 \tag{8}$$

A equação (8) indica que I é igual a I_0 na sua vizinhança. Portanto, a expansão em série de Taylor de primeira ordem no ponto I_0 pode ser aplicada à viscosidade μ, isto é;

$$\mu(I) = \mu(I_0) + \varepsilon I_1 \left(\frac{\partial \mu}{\partial I} \right)_{I0} = \mu_0 + \varepsilon \mu_1 = m \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^{n-1} + \varepsilon I_1 \left(\frac{\partial \mu}{\partial I} \right)_{I0} \tag{9}$$

O gradiente de pressão também pode ser expandido da mesma maneira;

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \pi_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \pi_1}{\partial x} \tag{10}$$

onde π_0 e π_1 são as pressões de referencia.

Observe que a derivada $\frac{\partial \pi_0}{\partial x}$ é igual a zero, já que a solução para u_0 é o escoamento arbitrário de Couette, o qual depende somente da velocidade relativa entre as superfícies.

Substituindo-se as equações (5) e (10) na equação (3), obtém-se;

$$\varepsilon \frac{\partial \pi_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \tag{11}$$

Utilizando-se as equações (8) e (9), e considerando $\varepsilon^2 \cong 0$, a equação (11) resulta em;

$$\varepsilon\frac{\partial\pi_1}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_0\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_0\frac{\partial u_1}{\partial y}+\mu_1\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) \tag{12}$$

Lembrando que o parâmetro ε é muito pequeno, pode-se escrever:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_0\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)=0 \tag{13a}$$

$$\frac{\partial\pi_1}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_0\frac{\partial u_1}{\partial y}+\mu_1\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) \tag{13b}$$

A equação (13a) pode ser integrada duas vezes em y, pois μ_0 é função somente de I_0, ou seja, função de $\frac{\partial u_0}{\partial y}$, que possui um valor constante. Portanto, integrando-se duas vezes a equação (13a) e aplicando-se as condições de contorno definidas em (7a) e (7b), obtém-se;

$$u_0=\frac{U}{h}y \tag{14}$$

Utilizando-se a equação (9), a equação (13b) toma a seguinte forma;

$$\frac{\partial\pi_1}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left[m\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^{n-1}\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\left(\frac{\partial\mu}{\partial I}\right)_{I0}\frac{\partial u_0}{\partial y}\right] \tag{15}$$

Da equação (4), na vizinhança de I_0, obtém-se a seguinte relação;

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial I}\right)_{I0}=m(n-1)\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^{n-2} \tag{16}$$

Substituindo-se a equação (16) na equação (15) e utilizando-se a equação (14), obtém-se;

$$\frac{\partial\pi_1}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial u_1}{\partial y}\left[m\,n\left(\frac{U}{h}\right)^{n-1}\right]\right\} \tag{17}$$

Integrando-se a equação (17) duas vezes em y, aplicando-se as condições de contorno definidas em (7a) e (7b) e utilizando-se as equações (9) e (14), obtém-se;

$$u_1=\frac{1}{2n\mu_0}\frac{\partial\pi_1}{\partial x}\left(y^2-h\,y\right) \tag{18}$$

Substituindo-se as equações (14) e (18) em (6) e lembrando que $\varepsilon\frac{\partial\pi_1}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial x}$, obtém-se;

$$u=\frac{U}{h}y+\frac{1}{2n\mu_0}\left(y^2-hy\right)\varepsilon\frac{\partial\pi_1}{\partial x}=\frac{U}{h}y+\frac{1}{2n\mu_0}\left(y^2-hy\right)\frac{\partial p}{\partial x} \tag{19}$$

A vazão por unidade de comprimento é obtida pela seguinte relação;

$$q_x = \frac{Q_x}{L} = \int_0^h u\,dy = \frac{Uh}{2} - \frac{h^{n+2}}{12nmU^{n-1}}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{20}$$

Sendo o escoamento unidirecional, a vazão será a mesma em qualquer secção transversal do mancal, implicando em $\frac{\partial q_x}{\partial x} = 0$. Levando-se esta consideração na equação (20) obtém-se;

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^{n+2}}{m}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\right] = 6nU^n \frac{\partial h}{\partial x} \tag{21}$$

que é a equação de Reynolds da lubrificação hidrodinâmica para mancais infinitamente largos, operando com fluidos não Newtonianos, proposta por Dien e Elrod (1983).

4. ANÁLISE DE ERRO

A equação (21) foi obtida através de um método aproximado e, portanto, envolve algum erro, de modo que para aplicá-la é necessário que se faça uma análise de erro.

A equação exata da vazão é obtida integrando-se a equação (3) em y, isto é;

$$m\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^n = \frac{\partial p}{\partial x} y + \tau_1 \tag{22}$$

Definindo-se os seguintes parâmetros adimensionais;

$$\bar{u} = \frac{u}{U} \qquad \bar{x} = \frac{x}{L} \qquad \bar{y} = \frac{y}{h} \qquad \bar{\tau} = \frac{\tau}{m\left(\frac{U}{h_0}\right)^n} \qquad \bar{\tau}_1 = \frac{\tau_1}{m\left(\frac{U}{h}\right)^n} \qquad \beta = \frac{\frac{\partial p}{\partial x}h}{\tau_1} \tag{23}$$

e introduzindo-os na equação (22), obtém-se;

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \bar{\tau}_1 \left(\beta \bar{y} + 1\right)^{\frac{1}{n}} \tag{24}$$

Assim, as condições de contorno definidas pelas equações (7a) e (7b) resultam em:

$$\bar{y} = 0 \qquad : \qquad \bar{u} = 0 \tag{25a}$$

$$\bar{y} = 1 \qquad : \qquad \bar{u} = 1 \tag{25b}$$

Integrando-se a equação (24) em $\bar{y}$ e aplicando-se as condições de contorno definidas pelas equações (25a) e (25b), obtém-se a velocidade adimensional $\bar{u}$;

$$\bar{u} = \left(\bar{\tau}_1\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\left[\left(\beta \bar{y} + 1\right)^{1+\frac{1}{n}} - 1\right]}{\beta\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\left[\left(\beta \bar{y} + 1\right)^{1+\frac{1}{n}} - 1\right]}{\left[\left(\beta + 1\right)^{1+\frac{1}{n}} - 1\right]} \tag{26}$$

Integrando-se a equação (26) em $\bar{y}$, obtém-se a vazão adimensional $\bar{q}_x$;

$$\bar{q}_x = \frac{q_x}{U\,h} = \frac{(1+\beta)^{2+\frac{1}{n}} - \beta\left(2+\frac{1}{n}\right) - 1}{\beta\left(2+\frac{1}{n}\right)\left\{(1+\beta)^{1+\frac{1}{n}} - 1\right\}} \tag{27}$$

Multiplicando-se os parâmetros adimensionais $\bar{\tau}_1$ e β, determina-se o gradiente adimensional de pressão $\Delta\bar{p}$, o qual é dado por;

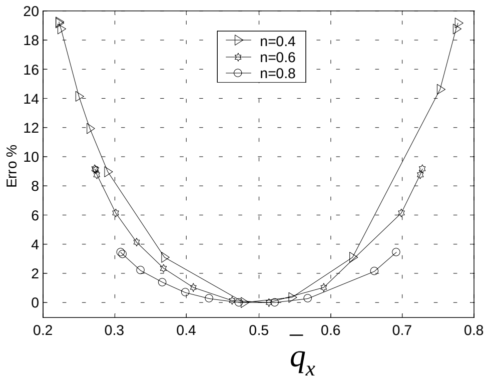
$$\Delta\bar{p} = \frac{h\dfrac{\partial p}{\partial x}}{m\left(\dfrac{U}{h}\right)^n} = \left\{\frac{\beta\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\beta+1)^{1+\frac{1}{n}} - 1}\right\}^n \beta \tag{28}$$

Pode-se observar das equações (27) e (28) que o gradiente adimensional de pressão $\Delta\bar{p}$ é função da vazão adimensional $\bar{q}_x$, ou seja, $\Delta\bar{p} = f(\bar{q}_x)$. Da mesma forma esta relação de dependência para a solução aproximada pode ser obtida através da equação (20);

$$\Delta\bar{p} = 6n(1 - 2\bar{q}_x) \tag{29}$$

De posse das relações de dependência $\Delta\bar{p}$ versus $\bar{q}_x$, tanto para a solução exata como para a solução aproximada, pode-se determinar a faixa de $\bar{q}_x$ na qual a solução aproximada pode ser aplicada, com um erro relativamente pequeno.

A figura 2 apresenta a variação do erro resultante da aplicação da solução aproximada em função da vazão $\bar{q}_x$, para vários valores do índice de característica reológica n. Pode-se observar que, para uma mesma faixa de vazão, os índices de característica reológica mais próximos da unidade resultam em um menor erro. A figura mostra também que a solução aproximada apresenta melhores resultados para os fluidos dilatantes ($n > 1$). Outra observação importante é que, para qualquer valor de n, o erro da solução aproximada diminui quando o efeito de Poiseuille é minimizado, como pode ser observado na equação (29). Isso ocorre quando a vazão adimensional $\bar{q}_x$ tende para 0,5.



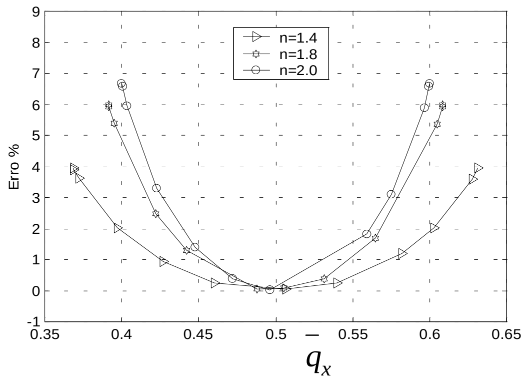


Figura 2. Erro versus vazão adimensional $\bar{q}_x$

5. PARÂMETROS RESULTANTES

A distribuição de pressão adimensional $\overline{p}$ e a vazão adimensional $\overline{q_x}$ em um mancal infinitamente largo são obtidas a partir da solução analítica da equação (21), o que resulta em:

$$\overline{p} = \frac{p h_0^{\,n+1}}{6 m U^n L} = \frac{1}{k}\left\{(1+k)\frac{\left[(1+k)^n - 1\right]}{\left[(1+k)^{n+1} - 1\right]}\left[\frac{1}{H^{\,n+1}} - 1\right] - \frac{1}{H^{\,n}} + 1\right\} \tag{30}$$

e

$$\overline{q}_x = \frac{q_x}{U h_0} = \frac{(n+1)}{2n}(1+k)\frac{\left[(1+k)^n - 1\right]}{\left[(1+k)^{n+1} - 1\right]} \tag{31}$$

Integrando-se a equação (30), obtém-se a capacidade de carga adimensional, $\overline{W}$:

$$\overline{W} = \frac{W h_0^{\,n+1}}{6 m U^n L^2 B} = \frac{1}{k}\left\{(1+k)\frac{\left[(1+k)^n - 1\right]}{\left[(1+k)^{n+1} - 1\right]}\left[\frac{1}{nk} - \frac{1}{nk(1+k)^n} - 1\right] + \frac{1}{(n-1)k}\left[\frac{1}{(1+k)^{n-1}} - 1\right] + 1\right\} \tag{32}$$

A força de atrito adimensional $\overline{F_a}$ é obtida através da seguinte integração;

$$\overline{F}_a = \frac{F_a}{m\left(\frac{U}{h_0}\right)^n BL} = \int_0^1\int_0^1 \overline{\tau}\, d\overline{x}\, d\overline{z} = \int_0^1\int_0^1 \left[\left(\frac{1}{H}\right)^n + \frac{3H}{n}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}}\right] d\overline{x}\, d\overline{z} \tag{33}$$

o que resulta em:

$$\overline{F}_a = -\frac{\left[1 - (1+k)^{n-1}\right]}{(n-1)k(1+k)^{n-1}} - \frac{3k}{n}\overline{W} \tag{34}$$

6. RESULTADOS E COMENTÁRIOS

A figura 3 apresenta a variação da distribuição de pressão adimensional $\overline{p}$ ao longo do comprimento adimensional $\overline{x}$ do mancal, para vários índices de característica reológica n. Pode-se observar que o índice n tem grande influência sobre a distribuição de pressão e que esta é mais acentuada para os fluidos dilatantes.

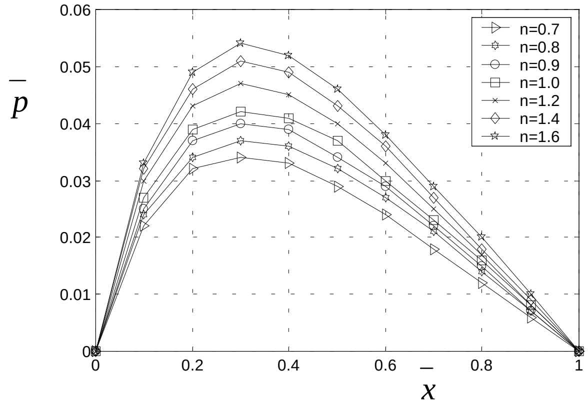


Figura 3. Distribuição de pressão $\overline{p}$ para vários índices de característica reológica n

A figura 4 apresenta as variações da capacidade de carga $\overline{W}$ e da força de atrito $\overline{F}_a$ para vários valores do índice de característica reológica n, em função da variação da inclinação específica k. Pode-se observar que os fluidos dilatantes $(n>1)$ proporcionam capacidades de carga mais elevadas e forças de atrito menores à medida que n aumenta. Este comportamento torna os fluidos dilatantes preferíveis nas aplicações praticas. Outra observação é que os parâmetros resultantes de um mancal operando com fluido não-Newtoniano seguem a mesma tendência de comportamento dos mancais hidrodinâmicos operando com fluidos Newtonianos ($n=1$).

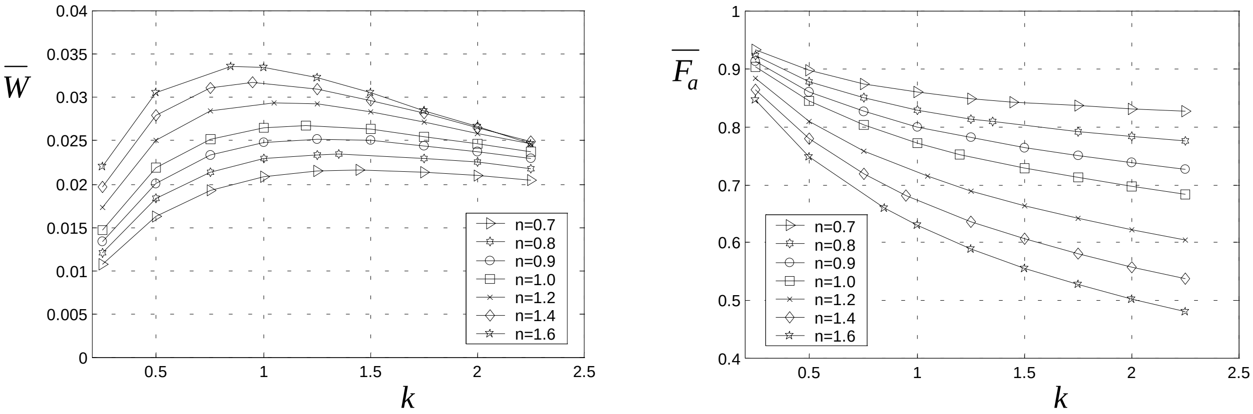


Figura 4. Comportamento dos parâmetros resultantes $\overline{W}$ e $\overline{F}_a$ em função da inclinação específica k, para vários valores de n

7. AGRADECIMENTOS

Os autores querem agradecer o apoio da **FAPEMIG** – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais – através do Projeto TEC-855/97, ao qual os autores estão envolvidos, incluindo a concessão de uma bolsa de Recém-Doutor ao primeiro autor e uma bolsa de Iniciação Científica (TEC-85039/99) ao segundo autor.

8. REFERÊNCIAS

- Buckholz, R.H., 1986, "Effects of Power-Law, Non-Newtonian Lubricants on Load Capacity and Friction for Plane Slider Bearings", Journal of Tribology, ASME Trans., Vol. 108, pp. 86-91.
- Dien, I.K.,and Elrod, H.G., 1983, "A Generalized Steady-State Reynolds Equation for Non-Newtonian Fluids, With Application to Journal Bearings", Journal of Lubrication Technology, ASME Trans, Vol. 105, pp. 385-390.
- Jianming, W. and Gaobing, J., 1989, "The Optimum Design of the Rayleigh Slider Bearing With a Power Law Fluid", Wear, Vol. 129, pp. 1-11.
- Johnson Jr., M.W. and Mangkoesoebroto, S., 1993, "Analysis of Lubrication Theory for the Power Law Fluid", Journal of Tribology, ASME Trans., Vol. 115, pp. 71-71.
- Rodkiewicz, C.M. and Huang, P., 1998, "On the Maximum Allowable Loads in the Thermo-Elastohydrodynamic Lubrication", Journal of Tribology, ASME Trans., Vol. 120, pp. 470-475.