

# GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS PARA UM PROBLEMA DE PERTURBAÇÃO SINGULAR COM CAMADA LIMITE

Carlos Augusto de Souza<sup>1</sup>

Dominique Leguillon<sup>2</sup>

Évariste Sanchez-Palencia<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica, 70910-900 Brasília, DF, Brasil. E-mail: carlos@lion.enm.unb.br

<sup>2</sup>Laboratoire de Modélisation en Mécanique, Université Paris VI, 8, rue de Capitaine Scott, 75015, Paris, France.

## Resumo

Este trabalho apresenta um problema elíptico bidimensional de perturbação singular, resolvido através do método de elementos finitos (MEF). A solução deste problemas apresenta as mesmas dificuldades encontradas no cálculo de problemas de equilíbrio de cascas elásticas delgadas. O objetivo é desenvolver ferramentas apropriadas para contornar as dificuldades associadas a camadas limite e interna que aparecem quando a espessura da casca tende a zero. O problema em estudo é uma função de um parâmetro  $\varepsilon \geq 0$  que, quando lhe são atribuídos pequenos valores, provoca também o aparecimento destas camadas. Para que se consigam resultados satisfatórios para a solução do problema nas camadas, via MEF, necessita-se de uma malha refinada anisotrópica, que é obtida, neste trabalho, através de um processo adaptativo.

**Palavras-chave:** malha anisotrópica, perturbação singular, adaptatividade.

## 1. INTRODUÇÃO

Uma casca é simplesmente um corpo elástico cuja forma no seu estado natural não deformado é de pequena espessura  $2e$  em relação à sua superfície  $S$ . Pode-se mesmo dizer que uma casca é uma superfície material de espessura  $2e$ . Exemplos familiares de aplicações de cascas são: painéis solares de satélites e outras estruturas espaciais, cascos de navios, revestimentos de aviões, torres de centrais nucleares, reservatórios, etc.

A estática e a dinâmica das cascas elásticas delgadas são atualmente relativamente mal conhecidas e apresentam problemas inesperados a um usuário desinformado. Existem algumas teorias (Goldenveizer (1962) e Niordson (1985)) que fornecem resultados relativamente satisfatórios para cascas de uma certa espessura, mas se tornam pouco confiáveis no caso de espessuras muito pequenas. Algumas catástrofes aconteceram nos últimos anos na construção de torres de resfriamento de centrais nucleares, como o caso de Ferry-Bridge no Reino Unido (Sanchez-Palencia (1995)), o que leva a crer que os métodos de cálculo ainda não são adequados.

Os problemas do cálculo de cascas elásticas delgadas foram expostos por Sanchez-Palencia (1995), que afirma que, para certos tipos de cascas com certas solicitações específicas, as teorias apontadas acima apresentam bons resultados. Mas, segundo o mesmo autor, na maioria dos casos aparecem fenômenos surpreendentes e inesperados no cálculo de estruturas feitas a partir de cascas delgadas.

De fato, as equações da teoria clássica de cascas contém dois termos correspondentes à energia de deformação: de membrana e de flexão. Os coeficientes correspondentes a estes

dois termos têm uma razão entre si de  $e^{-2}$ . Conseqüentemente, pode-se estudar o comportamento assintótico de uma casca delgada quando a espessura tende a zero (Sanchez-Palencia (1989)). Esta característica do problema tem se acentuado devido à tendência de otimização de todo tipo de estruturas, implicando na construção de estruturas cada vez mais delgadas, cujo cálculo necessita de códigos confiáveis mesmo em condições limites quando a relação entre a espessura e as outras dimensões da casca tende a zero.

Dois problemas são frequentemente encontrados ao se fazer o cálculo numérico de soluções de cascas elásticas delgadas. O primeiro é o travamento (*locking*) de membrana causado por uma certa incompatibilidade entre o subespaço dos deslocamentos inextensionais e o subespaço dos elementos finitos utilizados. Segundo Choi(1999), o travamento de membrana é uma deterioração da aproximação por elementos finitos quando a espessura tende a zero.

O segundo problema consiste no surgimento de fenômenos de falta de regularidade das soluções, que se manifestam através de camadas limites, camadas internas, propagação de singularidades e outras instabilidades, sendo conhecido por *sensibilidade*. A razão principal do surgimento destes fenômenos é que as equações de cascas têm como limite, quando a espessura tende a zero, equações que não são necessariamente elípticas, de modo que as soluções não apresentam propriedades de regularidade habituais aos problemas de elasticidade, que são do tipo elíptico. Uma descrição correta deste tipo de singularidade pode ser feita através de refinamentos da malha nas zonas onde elas aparecem. Desta forma, para se conseguir cálculos numéricos com precisão satisfatória torna-se necessário refinar a malha uniformemente, o que conduz, quando a espessura é muito pequena, a um número de graus de liberdade extremamente grande; ou a ter-se um conhecimento preciso do tipo de singularidade e de seu posicionamento em cada caso particular, o que é inviável nas aplicações práticas de cascas delgadas.

Segundo Sanchez-Palencia (1995) e Choi *et al.*(1998) é extremamente complicado o desenvolvimento e a implementação de um elemento finito para cascas que contorne estes dois problemas. Dentro deste contexto, numa primeira etapa é conveniente considerar-se o estudo de um problema similar com um grau de dificuldade reconhecidamente menor para que se possam desenvolver ferramentas que serão utilizadas posteriormente na implementação de um elemento finito para cascas delgadas dentro de um código clássico que possa gerar malhas adaptativas anisotrópicas.

Desta forma, o objeto de estudo deste trabalho é um problema elíptico bidimensional de perturbação singular que depende de um pequeno parâmetro  $\varepsilon \geq 0$ . São utilizadas forças (segundo membro) singulares (que não pertencem ao espaço dual de energia) colocando-se em evidência fenômenos de camada limite e camada interna de grande intensidade. Este problema é similar ao de soluções de cascas, cuja equação possui também um pequeno parâmetro que é a espessura da casca. Quando esta tende a zero surgem problemas análogos àqueles encontrados para o problema em estudo.

Um cálculo numérico confiável para valores pequenos de  $\varepsilon$  só é possível através de uma malha bastante fina nas camadas. Para se construir estas malhas é necessário utilizar-se um gerador de malhas adaptativas bidimensional. Devido à complexidade de construção de um código deste tipo, optou-se por utilizar o programa *BL2D* desenvolvido por Borouchaki e Laug (1995) que permite a construção de malhas bidimensionais isotrópicas ou anisotrópicas, com ou sem adaptação.

## 2. APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Sejam  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  um domínio bidimensional,  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  um campo escalar de interesse,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  um campo de forças e  $\mathbf{x} := (x, y)$  um ponto representativo qualquer

em  $\Omega$ . O problema de perturbação singular em estudo é da forma:

$$\varepsilon^2 \Delta^2 u - c \Delta u = f, \quad \text{com } \varepsilon \geq 0, \quad (1)$$

$$f = -\delta'_{(x=1)} F(y), \quad (2)$$

onde  $\Delta u$  é o laplaciano de  $u$ ,  $\delta'_{(x=1)}$  é a derivada da distribuição de Dirac  $\delta$  no ponto  $x = 1$  e  $F(y)$  é uma função qualquer que depende unicamente de  $y$ .

As condições de contorno são:

$$u = 0 \text{ em } x = 0, \quad u = 0 \text{ em } x = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ em } x = 0 \quad e \quad x = 1. \quad (3)$$

Levando-se em conta as condições de contorno utilizadas, a formulação variacional do problema é da forma:

$$a^\varepsilon(u, v) = b(v), \quad u \in V \quad e \quad \forall v \in V, \quad (4)$$

com:

$$a^\varepsilon(u, v) := \varepsilon^2 \int_{\Omega} \Delta u \Delta v d\mathbf{x} + c \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} \quad e \quad b(v) := \int_{\Omega} f v d\mathbf{x}. \quad (5)$$

Esta forma de escrever é mais adequada à realidade física do problema: a forma bilinear  $a^\varepsilon(u, v)$  representa o trabalho virtual das forças internas (associado à variação da energia de deformação do sistema) e a forma linear  $b(v)$  representa o trabalho das forças exteriores para o deslocamento virtual  $v$  aplicado ao meio.

Os espaços apropriados  $V$  e  $V_a$  são definidos como:

$$V = \{v \in H^2(\Omega)\}, \quad \text{para } \varepsilon > 0 \quad e \quad V_a = \{v \in H^1(\Omega)\}, \quad \text{para } \varepsilon = 0. \quad (6)$$

Como forma linear  $b(v)$  são aplicadas *forças* que estão no espaço dual de  $V$ , mas que não estão no espaço dual de  $V_a$ , isto é,  $f \in V'$ , mas  $f \notin V'_a$ .

Desta forma, observa-se que no problema limite, no qual  $\varepsilon = 0$ , há uma inconsistência devida à  $f$ . A consequência é que, para  $\varepsilon$  pequeno, aparecem fenômenos de camada limite e camada interna de grande intensidade. Problemas deste tipo foram considerados em dimensão 1 por Leguillon *et al.*(1999). Neste trabalho faz-se o estudo do mesmo problema considerando-se o caso bidimensional.

No cálculo das integrais utiliza-se o método da quadratura de Gauss. O elemento finito implementado é triangular com 3 graus de liberdade por nó ( $u$  e as derivadas parciais  $u_x$  e  $u_y$ ). Este elemento é chamado de *triângulo de Hermite do tipo 3* (Kardestuncer (1987)).

Deseja-se fazer uma expansão cúbica de  $u$ . Disto surge uma dificuldade, pois para se fazer a expansão desejada utiliza-se um polinômio completo de terceiro grau contendo dez termos e tem-se apenas nove graus de liberdade. Para se resolver este problema foram utilizadas as funções de base encontradas em Zienkiewicz (1991), propostas por Specht (1988) que permitem escrever:

$$\begin{aligned} u = \mathbf{N}\boldsymbol{\alpha} = & [L_1, L_2, L_3, L_1L_2, L_2L_3, L_3L_1, \\ & L_1^2L_2 + 1/2L_1L_2L_3 \{3(1 - \mu_3)L_1 - (1 + 3\mu_3)L_2 + (1 + 3\mu_3)L_3\}, \\ & L_2^2L_3 + 1/2L_1L_2L_3 \{3(1 - \mu_1)L_2 - (1 + 3\mu_1)L_3 + (1 + 3\mu_1)L_1\}, \\ & L_3^2L_1 + 1/2L_1L_2L_3 \{3(1 - \mu_2)L_3 - (1 + 3\mu_2)L_1 + (1 + 3\mu_2)L_2\}] \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (7)$$

onde:

$$\mu_1 = \frac{l_3^2 - l_2^2}{l_1^2} \quad \mu_2 = \frac{l_1^2 - l_3^2}{l_2^2} \quad \mu_3 = \frac{l_2^2 - l_1^2}{l_3^2}, \quad (8)$$

e  $l_1, l_2, l_3$  são os comprimentos das arestas do triângulo.

A forma linear  $b(v)$  é da forma:

$$b(v) := \int_{\Omega} f v d\mathbf{x}. \quad (9)$$

A função  $f$  utilizada é da forma:

$$f = -\delta'_{(x=1)} F(y), \quad (10)$$

onde  $\delta'_{(x=1)}$  é a derivada da distribuição de Dirac  $\delta$  no ponto  $x = 1$  e  $F(y)$  é uma função qualquer que depende unicamente de  $y$ .

Com este tipo de força  $F(y)$ , utiliza-se a antisimetria do problema em torno de  $x = 1$  e acrescenta-se a independência da solução em relação a  $y$  para comparar-se a solução deste problema com a solução unidimensional apresentada por Leguillon *et al.* (1999).

Com este segundo membro a camada limite encontra-se próxima da reta  $x = 1$  para valores pequenos de  $\varepsilon$ . Para ser utilizado nos códigos clássicos de elementos finitos este tipo de segundo membro *não padrão* necessita de uma reprogramação.

O elemento finito implementado foi acrescentado ao *Module f*, uma biblioteca de programas destinada à resolução de problemas quaisquer através do método dos elementos finitos, desenvolvida na França pela equipe do *INRIA - Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique*.

### 3. RESULTADOS PRELIMINARES

O problema teste é definido em um domínio bidimensional com  $x \in [0; 1]$  e  $y \in [0; 1]$ , segundo a Figura 1.

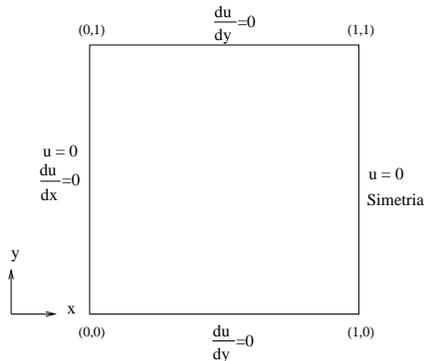


Figura 1. Problema teste com condições de contorno

O segundo membro é uma função do tipo  $f = -\delta'_{(x=1)} F(y)$  com  $F(y) = -0.5$ . Com a escolha desta função, a solução do problema é independente de  $y$  e pode ser comparada com a solução do problema unidimensional. Afim de comparar os resultados, utiliza-se o código *delta2* (que foi desenvolvido por Dominique Leguillon), o qual resolve o mesmo problema na sua forma 1D. A malha unidimensional usada nos teste é sempre regular, ou seja, todos os elementos possuem o mesmo tamanho.

Todos os cálculos da validação foram feitos em um computador pessoal com sistema operacional Linux Red Hat 6.0, equipado com processador Pentium II de 300 Mhz e 64Mb

de memória RAM. Para os dois testes preliminares o valor da constante  $c$  é igual a 1, e varia-se o valor de  $\varepsilon$ . No primeiro teste tem-se  $\varepsilon = 0.1$  e no segundo teste  $\varepsilon = 0.01$ .

Para a construção das malhas utiliza-se a rotina **apnoxx** do *Modulef*. Para cada tipo de malha são feitos vários refinamentos, através de divisões sucessivas das arestas do domínio. A variável  $M$  é o número de nós sobre cada aresta do domínio. Para fazer-se a comparação entre os casos unidimensional e bidimensional o domínio  $\Omega$  é cortado por uma reta de equação  $y = 0.5$  e é mostrada, a curva de  $u$  em função de  $x$  para esta reta.

Para o primeiro teste, com  $\varepsilon = 0.1$ , a Figura 2 apresenta a malha mais refinada (com  $M = 45$ ) e o gráfico de convergência para o valor máximo da função  $u$  ( $u_{max}$ ), normalizado em relação ao valor máximo obtido para o problema unidimensional, sobre a reta  $y = 0.5$ .

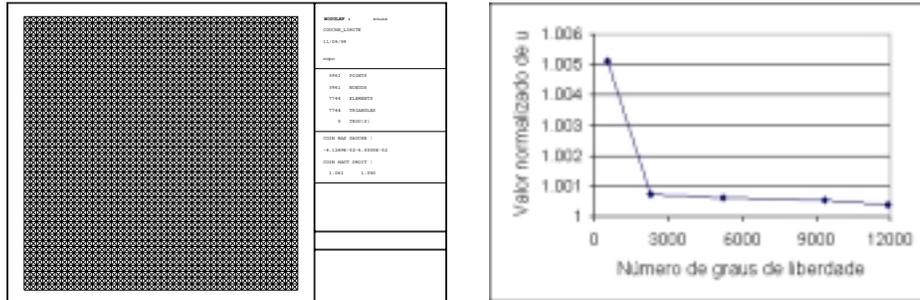


Figura 2. a) Malha regular com  $M = 45$  b) Convergência de  $u_{max}$  em  $y = 0.5$

A Figura 3 mostra a curva de  $u(x)$  em  $y = 0.5$  para o modelo unidimensional e para o modelo bidimensional. Destas duas figuras observa-se que a convergência é muito boa. Para este valor de  $\varepsilon$  não há uma camada limite definida, e a curva de  $u$  é suave.

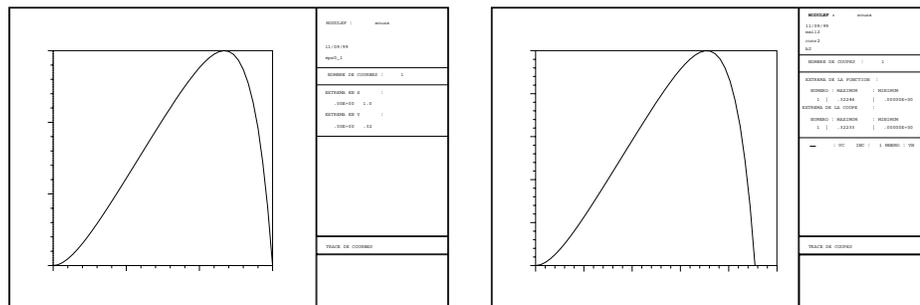


Figura 3. Teste 1 - a) Resultado unidimensional b) Resultado bidimensional

Apresentam-se agora os resultados do teste com  $\varepsilon = 0.01$ . A Figura 4 mostra o gráfico de convergência para o valor máximo de  $u(x)$  e os isovalores de  $u$ .

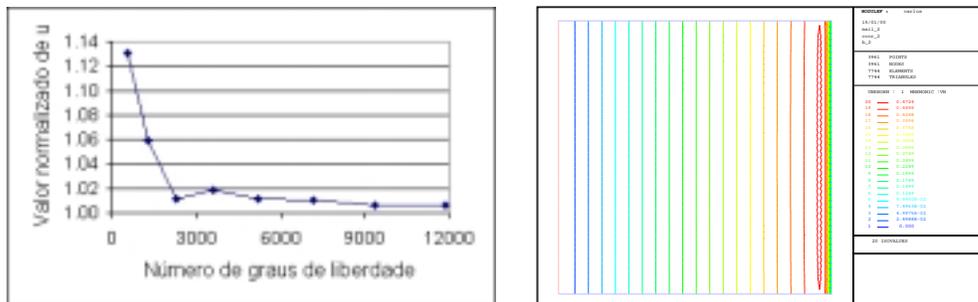


Figura 4. a) Convergência de  $u_{max}$  em  $y = 0.5$  b) Isovalores de  $u$  com  $\varepsilon = 0.01$

Observa-se que, apesar de ter-se uma boa convergência para  $u_{max}$ , o gráfico de isovalores apresenta oscilações na extremidade direita. Esta é a região de camada limite, que esperava-se aparecer para pequenos valores de  $\varepsilon$ . A Figura 5 mostra a curva de  $u(x)$  em  $y = 0.5$  e comprova a grande variação do gradiente de  $u$  nesta região.

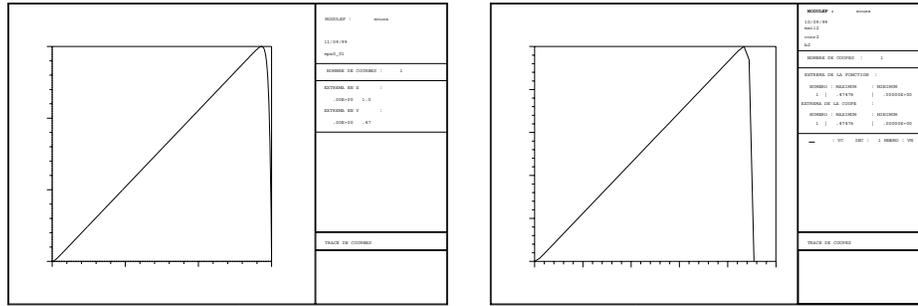


Figura 5. Teste 2 - a) Resultado unidimensional b) Resultado bidimensional

Constrói-se uma nova malha, refinada na região da camada limite. A Figura 6 apresenta esta malha e os isovalores de  $u$  obtidos com ela.

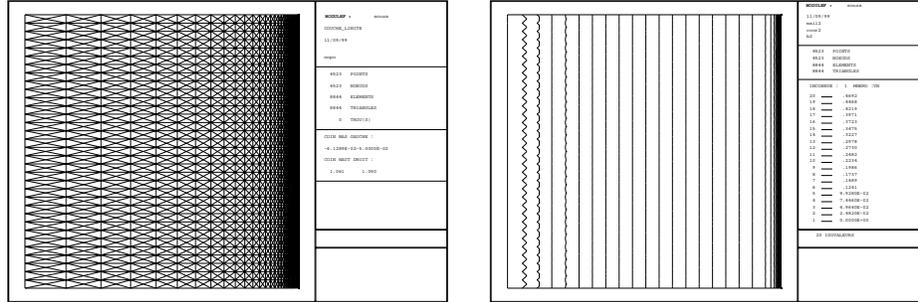


Figura 6. Teste 2 - a) Malha refinada à direita b) Isovalores de  $u$

Observa-se que, com esta malha refinada à direita, resolve-se o problema de oscilações nesta região. Entretanto, observa-se que na parte esquerda do domínio aparecem novas oscilações. A partir destas constatações, procura-se implementar um procedimento de geração automática de malhas para este problema, de modo a refinar a malha nos locais onde há grande variação no gradiente da função  $u$ .

O programa escolhido para se gerar as malhas automaticamente é o *BL2D*, um gerador de malhas adaptativas bidimensional, desenvolvido por Borouchaki e Laug (1995). O processo adaptativo consiste em:

- construir uma malha inicial com o *BL2D*
- calcular a solução correspondente com o *Module f*
- utilizar um estimador de erro
- decidir pela adequação ou não da malha atual:
  - se a malha atual é estável e fornece bons resultados, fim;
  - senão, traduzir os resultados do estimador de erro em uma *carta de especificações* ou *carta de métricas* que permitirá a construção de uma nova malha adaptada e depois iterar o processo.

#### 4. RESULTADOS COM GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS

Para que se possa comparar melhor os resultados, dois pontos  $P$  e  $Q$ , cujas coordenadas são  $P := (0.955, 0.5)$  e  $Q := (0.05, 0.5)$ , são fixados na malha. Os valores de  $u$  nestes pontos são calculados em todas as iterações e o gráfico da Figura 7 apresenta a convergência do valor de  $u$ . Os valores são normalizados em relação à solução do problema unidimensional.

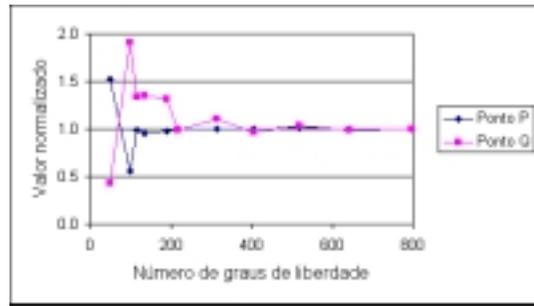


Figura 7. Convergência do processo iterativo

Da Figura 7 observa-se que a convergência é muito boa e tem-se para o ponto  $P$  bons resultados para malhas com apenas 300 graus de liberdade (100 nós), enquanto que, para as malhas regulares do teste anterior são necessários 4523 nós com a malha refinada à direita. Para o ponto  $Q$ , a convergência é um pouco mais lenta, com bons resultados apenas para malhas com mais de 400 graus de liberdade. A Figura 8 apresenta as malhas para as iterações 0, 5 e 10 e os isovalores de  $u$  de cada uma delas.

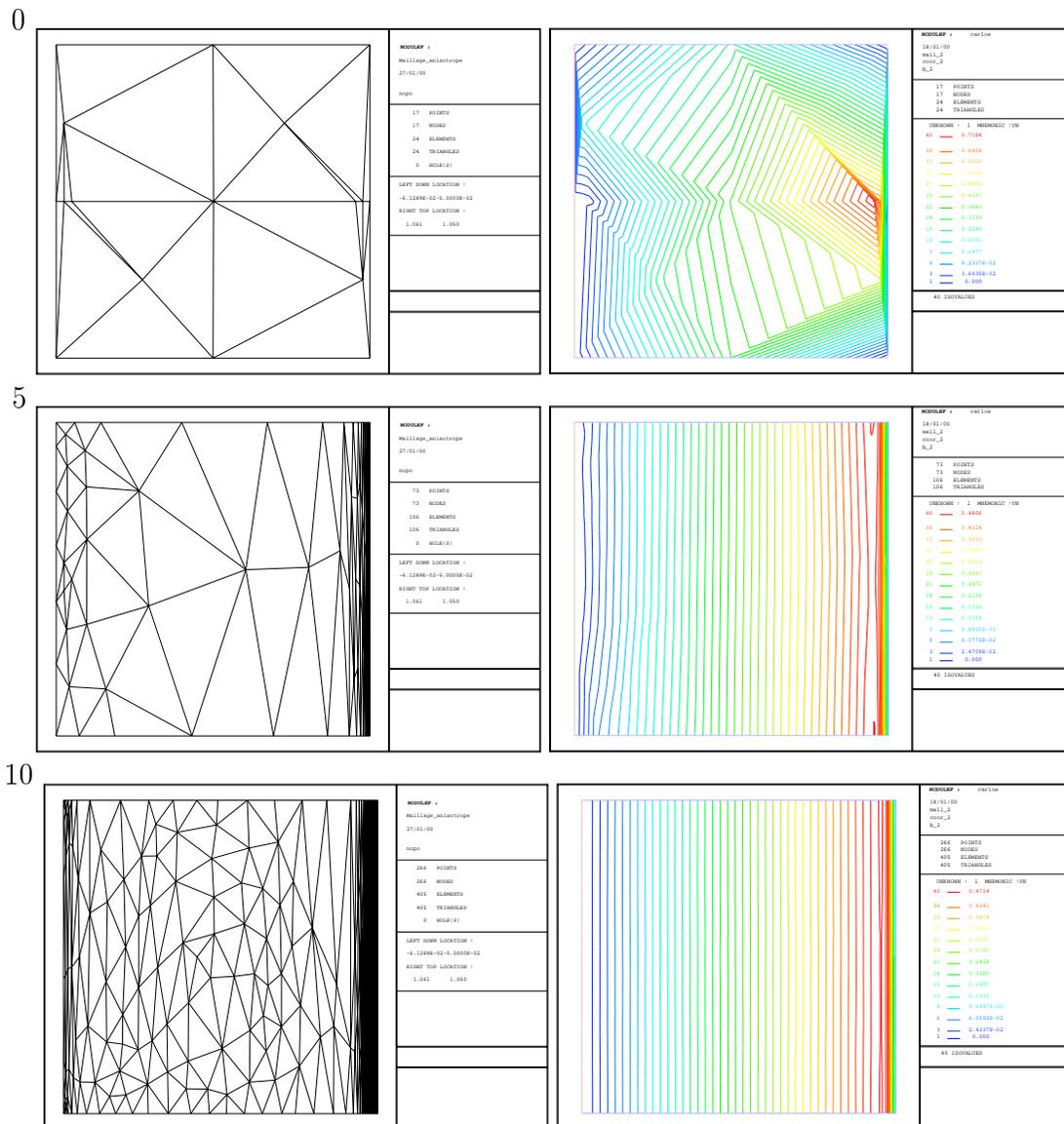


Figura 8. Malhas e isovalores para iterações 0, 5 e 10 com  $\epsilon = 0.01$

Observa-se que tem-se grande densidade de elementos na região da camada limite para a malha da iteração 10. Os elementos desta região são altamente anisotrópicos, pois a variação do gradiente de  $u$  na direção  $x$  é muito maior do que na direção  $y$ . Assim, o processo adaptativo cria elementos que são estirados na direção paralela à camada limite.

No lado esquerdo do domínio tem-se uma densidade menor de elementos, pois, nesta região a variação do gradiente de  $u$  na direção  $x$  é bem menor. Na parte central do domínio, como não há variação significativa do gradiente de  $u$  em nenhuma direção os elementos são quase isotrópicos.

## 5. CONCLUSÃO

O processo de geração de malhas adaptativas anisotrópicas implementado mostrou-se eficiente na criação de uma malha adaptada ao problema em questão. A menor quantidade de graus de liberdade possibilita o cálculo de soluções melhores com menor tempo de processamento. Isto é conseguido através do adensamento de elementos nas regiões de maior gradiente e com a utilização de elementos altamente anisotrópicos.

Os procedimentos utilizados na solução deste problema simples de perturbação singular podem ser empregados num problema de equilíbrio de cascas delgadas que envolve dificuldades semelhantes às aquelas que surgiram neste trabalho.

## Referências Bibliográficas

- BOROUCAKI, H. e LAUG, P. (1995): “Le mailleur adaptatif bidimensionnel BL2D: manuel d’utilisation et documentation”, *INRIA, Rapp. Tech.n. 0185*, Rocquencourt.
- BOROUCAKI, H.; GEORGE, P. L.; HECHT, F.; LAUG, P. e SALTEL E. (1995): “Mailleur bidimensionnel de Delaunay gouverné par une carte de métriques. Partie I: Algorithmes”, *INRIA, Rapp. Tech. n. 2741*, Rocquencourt.
- CHOÏ, D., PALMA, F. J., SANCHEZ-PALENCIA, É. e VILARINO, M. A. (1998): “Membrane locking in the finite element computation of very thin elastic shells”, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **32**, pp. 131–152.
- CHOÏ, D. (1999): “Computations of thin non-inhibited hyperbolic elastic shells. Benchmarks for membrane locking”, *Math. Meth.in the Applied Sciences*, **22**, pp. 1293–1321.
- GOLDENVEIZER, A. L. (1962): *Theory of elastic thin shells*, Pergamon, New York.
- KARDESTUNCER, H. e NORRIE, D. H. (1987): *Finite element handbook*, McGraw-Hill.
- LEGUILLON, D.; SANCHEZ-HUBERT, J. e SANCHEZ-PALENCIA, É. (1999): “Model problem of singular perturbation without limit in the space of finite energy and its computation”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **327**, série II b, pp. 485-492.
- NIORDSON, F. (1985): *Shell Theory*, North-Holland, Amsterdam.
- SANCHEZ-PALENCIA, É. (1989): “Statique et dynamique des coques minces. I: Cas de flexion pure non inhibée”, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, série I, **309**, pp. 411–417.
- SANCHEZ-PALENCIA, É. (1995): Surfaces et coques élastiques minces: problèmes et défis, *La Vie des Sciences*, **12**, num. 3, pp. 239–258.
- SPECHT, B. (1988): “Modified shape functions for the three node plate bending element passing the patch test”, *Int. Jour. for Num. Meth. in Engin.*, **26**, pp. 705–715.
- ZIENKIEWICZ, O. C. (1991): *The finite element method. Volume 2 - Solid and fluid mechanics. Dynamics and non-linearity*, McGraw-Hill, Londres.