

# ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL DE EIXOS DE BOMBAS DE PISTÕES AXIAIS TIPO SWASHPLATE – COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DE SIMULAÇÃO NUMÉRICA

**Mauro Hugo Mathias**

**Fernando de Azevedo Silva**

Universidade Estadual Paulista – UNESP, Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Departamento de Mecânica, CP 205, 12.500-000, Guaratinguetá, SP. E-mail: [mathias@feg.unesp.br](mailto:mathias@feg.unesp.br) e [fazevedo@feg.unesp.br](mailto:fazevedo@feg.unesp.br).

## Resumo

Neste trabalho a análise modal de um eixo rotativo, desenvolvida com um modelo paramétrico de identificação baseado em dados experimentais, é comparada com os resultados de simulação numérica obtidos através do método dos elementos finitos. A análise por elementos finitos foi implementada utilizando o *software* comercial ANSYS, de modo a validar o procedimento de identificação dos parâmetros modais.

**Palavras-chave:** Análise modal experimental, identificação, parâmetros modais, elementos finitos.

## 1. INTRODUÇÃO

Afim de prever precisamente o desempenho dinâmico de estruturas e máquinas flexíveis torna-se necessário obterem-se modelos analíticos com um alto grau de precisão. Devido à própria complexidade destas estruturas, uma técnica comum de modelagem é obtida usando o método dos elementos finitos. Contudo, é fato conhecido que essa metodologia é passível de erros (Cook, 1974).

Por outro lado, a utilização efetiva de métodos numéricos para análise de problemas físicos reais sem solução analítica conhecida, implica na validação dos resultados computacionais através, por exemplo, da comparação com resultados de medições experimentais. A utilização de análise experimental permite também obter informações complementares do sistema estudado, de modo a melhorar o modelo teórico, como por exemplo, inferir sobre valores de amortecimento estrutural.

Desta forma, a proposta deste trabalho é comparar os resultados da análise modal de um eixo rotativo, que faz parte de uma bomba de pistões axiais tipo *swasplate* para fluido óleo-hidráulico. A análise foi desenvolvida através de duas diferentes metodologias: experimental e simulação numérica, de forma a validar o procedimento de identificação dos parâmetros modais.

Inicialmente, foi utilizado o *software* comercial de elementos finitos, ANSYS, para realizar as simulações numéricas do comportamento do eixo à vibração. Em seguida, foram utilizadas técnicas experimentais, onde o eixo foi ensaiado e os respectivos parâmetros modais foram determinados por análise modal no domínio do tempo. Nesta etapa foram utilizados diferentes mecanismos de excitação: martelo de impacto instrumentado e excitador de vibrações. A coleta e tratamento dos dados no procedimento experimental foi desenvolvida com auxílio dos *softwares* SISDIN e AQDADOS da LYNX.

## 2. ANÁLISE MODAL TEÓRICA

Análise modal é fundamentada no fato de que o comportamento dinâmico de um sistema linear pode ser descrito como uma composição de movimentos independentes, que possuem, cada um, uma forma de deformação única. Estes movimentos independentes são definidos como modos de vibração. Os modos de vibração são caracterizados pelos parâmetros modais: frequência natural, amortecimento modal e forma modal.

Assim, a análise modal determina as propriedades dinâmicas de uma estrutura mecânica através da identificação de seus modos de vibração. As propriedades inferidas através da análise modal, podem ser utilizadas para prever ou controlar a performance dinâmica da estrutura (Ewins, 1992 & Meirovitch, 1986).

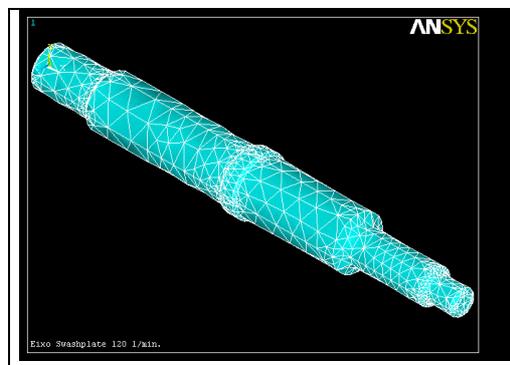
O procedimento de análise modal elaborado via elementos finitos, abrange as seguintes etapas gerais: construção do modelo geométrico, geração do modelo discreto, aplicação das condições de contorno (cargas e restrições), expansão dos modos, obtenção da solução e revisão dos resultados.

Como um dos interesses desta análise foi o de visualizar as configurações deformadas do eixo, foi construído um modelo tridimensional da estrutura inteira sem a utilização de planos de simetria, no cálculo da resposta estrutural.

O material utilizado para a confecção do eixo é o aço SAE 4140, sendo este um aço de média temperabilidade e com boas propriedades mecânicas.

Para a geração da malha de elementos finitos foi utilizado o elemento SOLID 72. Este elemento é definido por 4 nós, possuindo 6 graus de liberdade em cada um dos nós: rotações em torno das direções X, Y, Z, e translações nas direções X, Y e Z.

A figura 1 apresenta o modelo global do eixo com a malha de elementos finitos, sendo constituída por 12.681 elementos e 2.771 nós.



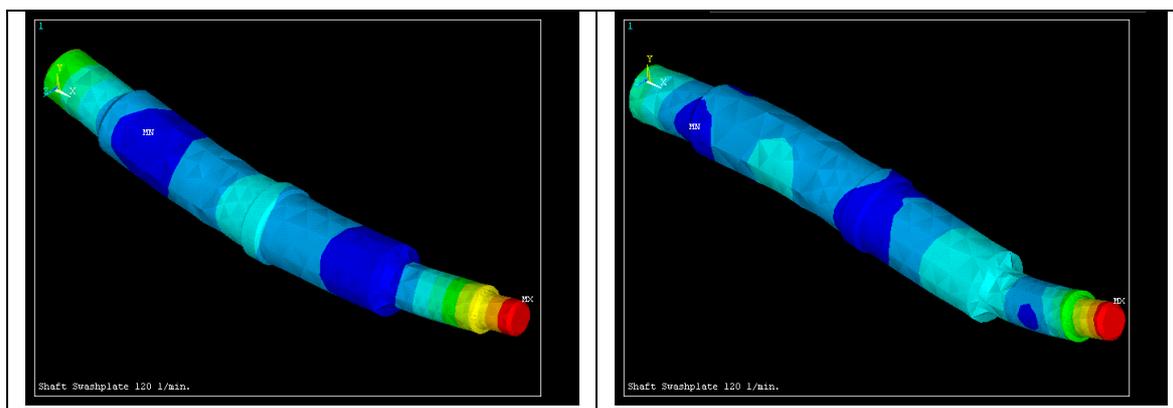
**Figura 1.** Malha de elementos finitos do eixo rotativo.

### 2.1. Resultados de Simulação Numérica por Elementos Finitos

As quatro primeiras frequências naturais obtidas são apresentadas na tabela 1. Na figura 2 são ilustradas as formas modais correspondentes ao 2º modos de vibração e 3º modo de vibração respectivamente. Ressalta-se que em vista da maior complexidade do modelo podem aparecer frequências que não são verificadas no procedimento experimental.

**Tabela 1.** Valores das 4 primeiras frequências estimadas do modelo de elementos finitos.

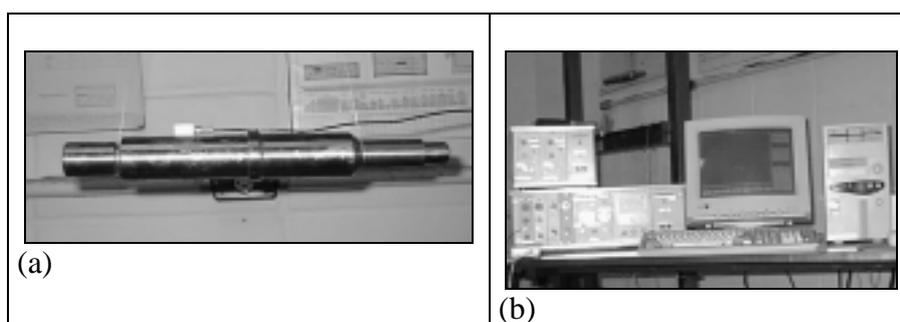
Modo	Frequência (Hz)
1 <sup>o</sup>	1.822,3
2 <sup>o</sup>	1.826,7
3 <sup>o</sup>	3.808,9
4 <sup>o</sup>	3.891,6



**Figura 2.** 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> formas modais do eixo.

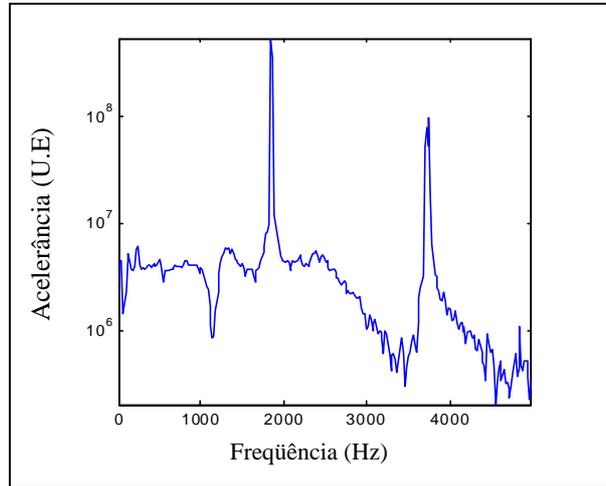
### 3. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

No desenvolvimento do procedimento experimental, um eixo de uma bomba axial tipo *swashplate* foi confeccionado com o objetivo de realizar um ensaio de análise modal. Com os dados do ensaio a identificação dos parâmetros modais do sistema foi realizada através de um modelo paramétrico do domínio do tempo. Da identificação as frequências naturais estimadas do modelo de elementos finitos foram validadas e os fatores de amortecimento da estrutura foram também estimados. O ensaio foi desenvolvido com a estrutura presa por elementos elásticos conforme ilustra a figura 3-(a). O procedimento experimental consistiu em aplicar impactos em diferentes pontos da estrutura e coletar os sinais de aceleração em um dado ponto de referência. Este procedimento foi baseado em uma análise univariada (modelo SISO). Os sinais foram medidos ao longo de uma única direção. A componente de excitação foi aplicada ao sistema através de um martelo de análise modal, imprimindo-se impactos em oito pontos dispostos de forma equidistantes ao longo do eixo. O aparato instrumental indicado na figura 3-(b) consistiu de um martelo, acelerômetro, condicionadores de sinais, filtros analógicos e sistema de aquisição de dados. O sistema de aquisição de dados resume-se a uma placa analógica digital, um *software* de aquisição e um microcomputador.



**Figura 3.** (a) Eixo ensaiado; (b) Aparato experimental.

A aquisição dos sinais foi efetuada na frequência de amostragem de 10.000 Hz de modo estabelecer a faixa de análise de 0 a 5.000 Hz. As saídas dos sinais dos condicionadores foram filtrados com filtros analógicos do tipo passa-baixa ajustado na frequência de 5.000 Hz. A análise dos sinais foi processada com programas desenvolvidos no ambiente do Matlab, tomando-se os dados de entrada e saída referentes as oitos estações de medida. Na figura 4 é ilustrado uma função de transferência do sistema correspondente a resposta no ponto de referência 3 a um impacto aplicado no ponto 2.



**Figura 4.** Função de transferência H32.

#### 4. PROCEDIMENTO DE IDENTIFICAÇÃO

A identificação experimental foi implementada com um modelo paramétrico do domínio do tempo. De início foi adotado o modelo autoregressivo de médias móveis com entrada exógena (ARMAX), no entanto como os resultados obtidos com o modelo autoregressivo com entrada exógena (ARX) foram equivalentes, optou-se pelo último. A justificativa da escolha do modelo ARX foi motivada pela sua simplicidade de implementação com relação aos aspectos numéricos e estimação da ordem do modelo. Os modelos ARX com diferentes ordens foram ajustados a partir dos dados de força e aceleração obtidos nos diferentes pontos de medida no eixo. Os dados experimentais foram ajustados pela seguinte equação de diferenças que descreve um processo ARX:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{p-2n} \alpha_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{r-2n-1} \gamma_i f(k-i) + e(k) \quad (1)$$

onde  $p$  e  $r$  correspondem a ordem dos processos autoregressivo (AR) e exógeno, os escalares  $\alpha_i$  ( $i = 1 \dots p$ ) representam os coeficientes AR que ponderam a influência de valores prévios de uma série temporal discreta  $\{y(k)\}$  no valor presente  $y(k)$ ,  $\gamma_i$  ( $i = 1 \dots r$ ) são coeficientes associados a uma componente determinística de excitação e  $e(k)$  componente relacionado com o erros de ajuste (Skullestad, 1996). Dos coeficientes AR um polinômio de grau da mesma ordem do processo AR é construído. As raízes do polinômio guardam informações relativas aos parâmetros modais, frequência e fator de amortecimento, bem como informações de modos computacionais que aparecem em decorrência da ordem do modelo ser mais elevada do que a ordem verdadeira do processo em questão. O recurso do ajuste de ordens mais elevadas justifica-se em razão dos efeitos de ruídos presentes nos sinais e de aspectos relacionados a precisão dos estimadores numéricos. Assim o aspecto fundamental no processo de estimação é a busca de critérios de ajuste de ordem de modelo que estabeleça estimação de

parâmetros precisa, bem como critérios que possibilitem distinguir os parâmetros que guardam a informação da dinâmica do sistema daqueles relacionados com os modos computacionais (Hollkamp *et al.*, 1992). Reforçando o conceito enfatiza-se que a idéia básica na determinação da ordem é estabelecer a ordem que forneça parâmetros mais precisos ao invés de identificar a verdadeira ordem do modelo. Na literatura são propostos diferentes critérios de ajuste da ordem de modelos, tais como os critérios FPE, AIC, MDL, etc. (Ljung, 1987 & Young, 1976). Estes critérios baseiam-se essencialmente na minimização de um funcional descrito a partir do erro quadrático de ajuste. Os aspectos importantes na busca da identificação satisfatória é levar em consideração que a identificação apropriada do modelo depende da relação associada entre o tipo de excitação a estrutura do modelo de ajuste e a relação de transformação dos parâmetros discretos da equação de diferenças com os pólos relacionadas ao domínio contínuo no tempo da transformada de Laplace (Broersen, 1988 & Fassois *et al.*, 1990). No presente trabalho optou-se pelo critério MDL (*Maximum Description Lenght*) para o ajuste da ordem do modelo ARX.

Considerando todos os relevantes aspectos acima o procedimento de identificação adotado neste trabalho resume-se nos seguintes passos:

1. Leitura dos dados de entrada e saída do sistema;
2. Ajuste do modelo ARX de diferentes ordens e definição da ordem com o critério MDL;
3. Avaliação de modelos concorrentes de modo a avaliar a precisão dos parâmetros;
4. Obtenção do polinômio característico com base nos coeficientes AR;
5. Obtenção dos pólos do modelo e separação dos modos computacionais e modos físicos;
6. Estimação das freqüências e fatores de amortecimento do sistema.

#### **4.1. Resultados**

Os resultados foram avaliados para cada conjunto de dados de entrada e saída nas oito estações de medidas definidas no eixo. Na faixa de freqüência estudada foi identificado três modos. O que se observou é que em todos os pontos a convergência dos parâmetros modais relativa ao primeiro modo foi bastante satisfatória. Já para o segundo e terceiro modos a convergência dos parâmetros relativa ao conjunto de dados ficou prejudicada nos extremos do eixo. Mas com os dados obtidos nos outros pontos pode-se validar o modelo, bem como utilizá-los como referência para a busca de modelos concorrentes que estabeleçam resultados mais precisos. Este procedimento é justificado em razão dos critério de ordem não estabelecer efetivamente a ordem ideal. Visto que determinada base de dados pode até não ser caracterizada pelo modelo escolhido, requerendo assim modelos mais robustos. No caso em estudo não foi necessário este recurso, no entanto o que se adotou foi um refinamento da ordem do modelo. O critério utilizado para definir os parâmetros físicos do sistema foi através da análise do módulo do fator de amortecimento e pela repetibilidade das componentes (Mathias, 1998). Na tabela 2 são apresentados alguns resultados referentes a identificação de parâmetros com três conjuntos de dados, relacionados a estação de referência 3 e aos pontos de impactos 1, 3 e 4. As freqüências estimadas através do modelo ARX são destacadas em negrito na tabela.

**Tabela 2.** Resultados preliminares da identificação.

H31		H33		H34	
f(Hz)	$\zeta$	f(Hz)	$\zeta$	f(Hz)	$\zeta$
1,0	100,0	2,2	100,0	4,4	100,0
341,7	71,4	222,50	48,5	230,1	41,3
999,1	4,4	666,90	23,2	658,1	24,3
1.536,6	25,8	1.002,6	2,0	1.004,1	11,0
		1.416,2	5,2	1.448,3	7,9
<b>1.836,0</b>	<b><math>1,3 \times 10^{-2}</math></b>	<b>1.836,0</b>	<b><math>1,3 \times 10^{-2}</math></b>	<b>1.836,0</b>	<b><math>1,2 \times 10^{-2}</math></b>
2.451,8	4,9	2.181,1	6,2	2.236,2	5,6
2.965,4	4,9	2.549,7	6,9	2.516,4	75,3
		2.774,8	6,8	2.634,3	6,0
		3.181,0	3,0	3.033,7	7,1
				3.091,4	9,1
<b>3.703,8</b>	<b><math>7,1 \times 10^{-2}</math></b>	<b>3.706,6</b>	<b><math>2,1 \times 10^{-1}</math></b>	<b>3.708,5</b>	<b><math>1,9 \times 10^{-1}</math></b>
<b>3.744,7</b>	<b><math>7,3 \times 10^{-2}</math></b>	<b>3.745,1</b>	<b><math>6,7 \times 10^{-2}</math></b>	<b>3.745,0</b>	<b><math>7,0 \times 10^{-2}</math></b>
4.493,8	3,0	4.287,6	2,3	4.314,7	2,2
		4.635,1	2,5	4.677,1	3,2

Observa-se dos dados relativo a função de transferência H31 que certa discrepância aparece no fator de amortecimento do modo de frequência 3.703, 8 Hz. Embora em menor grau este problema foi também verificado no terceiro modo na análise de outros conjuntos de dados. A validação dos parâmetros foi efetuada utilizando quatro amostras de sinais para cada ponto de medida. Problema semelhante foi observado no outro extremo da barra (ponto 8). Os demais pontos apresentaram resultados satisfatórios não requerendo maior demanda de recursos numéricos para a análise. Outro aspecto que ficou evidente da análise é que a ordem do processo AR para os dados sempre apresentou valores elevados (acima de 20) e do processo exógeno foi baixa, aspecto que é característico de sinais determinísticos. Na tabela 3 são compilados os resultados da estimação dos parâmetros, frequência e fator de amortecimento, obtidos com os sinais medidos no ponto 3 quando excitado nos pontos 2 e 4, respectivamente. Os resultados correspondem a média da identificação de um conjunto de quatro amostras para cada estação de medida.

**Tabela 3.** Parâmetros modais identificados.

H32		H34	
f(Hz)	$\zeta$	f(Hz)	$\zeta$
1.835,9	$1,3 \times 10^{-2}$	1.836,2	$1,2 \times 10^{-2}$
3.706,8	$1,9 \times 10^{-1}$	3.707,6	$2,1 \times 10^{-1}$
3.744,8	$7,0 \times 10^{-2}$	3.745,2	$6,9 \times 10^{-2}$

Pela comparação percentual das frequências estimadas na tabela 3 com as do modelo de elementos finitos, conclui-se que na primeira frequência o erro foi da ordem de 1,0%, na segunda o erro foi da ordem de 2,7% e na terceira o erro foi de 3,0%.

## 5. CONCLUSÕES

Um método de identificação paramétrico aliado a um modelo de elementos finitos foi aplicado para estimar os parâmetros modais de um eixo de uma bomba *swashplate*. O método de identificação explorou a relação entre o modelo paramétrico discreto e o modelo contínuo no tempo derivado da formulação de Laplace.

É importante salientar que o objetivo principal deste trabalho foi de estabelecer subsídios ao projeto de uma bomba tipo *swashplate* que se encontra em desenvolvimento no Departamento de Mecânica da FEG – UNESP. O trabalho continua sendo complementado com a identificação dos modos de vibrar através da análise dos resíduos da função de transferência identificada.

## 6. REFERÊNCIAS

- Broersen, P. M. T., 1988, “A Comparison of Criteria for Autoregressive Order Selection. In: IFAC – Identification and System Parameter Estimation”, Beijing, pp. 27-31.
- Cook, R. D., 1974, “Concepts and Applications for Finite Element Analysis”, John Wiley & Sons.
- Ewins, D. J., 1992, “Modal Testing: Theory and Practice”, John Wiley & Sons Inc.
- Fassois, S. D., Eman, K. F., Wu, S. M., 1990, “Sensitivity Analysis of The Discrete-To-Continuous Dynamic System Transformation”, ASME- Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, v. 112, pp. 1-9.
- Hollkamp, J. J., Batil, S. M., 1992, “Structural Identification Using Order Overspecified Time-Series Models”, ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control, v. 114, n.1, pp. 27-33.
- Ljung, L., 1987, “System Identification: Theory for The User”, New Jersey: Prentice-Hall Englewood Cliffs.
- Mathias, M. H., 1998, “Aplicação da Técnica Paramétrica ARMA de Processamento de Sinais na Caracterização de Estruturas Mecânicas”, Universidade Estadual de Campinas, Tese de Doutorado.
- Meirovitch, L., 1986, “Elements of Vibration Analysis”, Mc Graw-Hill Book Company.
- Skullestad, A., 1996, “Identification of Vibration Modes. In: A Spacecraft Using Nonparametric and Parametric Methods”, Modeling, Identification and Control, v. 17, n. 4, pp. 231-259.
- Young, P., 1976, “Some Observations on Instrumental Variable Methods of Time Series Analysis”, International Journal of Control, v. 23, pp. 593-612.