

# AVALIAÇÃO DE UM CRITÉRIO DE SELEÇÃO DE MODOS APLICADO NA TÉCNICA DE SÍNTESE MODAL

## **Cleudmar Amaral de Araújo**

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campus Santa Mônica, CP: 593, 38400-089, Uberlândia, MG, Brasil. E-mail: cleudmar@mecanica.ufu.br

## **Paulo Roberto Gardel Kurka**

Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Projeto Mecânico, Campus Zeferino Vaz, CP: 6122, 13083-970, Campinas, SP, Brasil. E-mail: kurka@fem.unicamp.br

## **Resumo**

Em um recente trabalho, os autores propuseram um critério de seleção de modos normais de subestruturas aplicado a um método de síntese modal, com a finalidade de eliminar a interferência do usuário no processo de identificação. Sabe-se que a análise por elementos finitos de uma estrutura específica, gera, na maioria dos casos, modos reais que não podem ser diretamente relacionados com os respectivos modos complexos de uma análise experimental. Neste trabalho, o critério de escolha é avaliado em termos de modos complexos obtidos a partir de uma técnica de conversão de modos reais em modos complexos. O trabalho apresenta o método de síntese modal utilizado, o critério de seleção automática de modos e a técnica de conversão dos modos reais em modos complexos. A validação da metodologia é feita através de um modelo experimental, composto de elementos estruturais do tipo perfil U.

**Palavras-chave:** Síntese modal, Modos complexos, Flexibilidade residual, Identificação.

## **1. INTRODUÇÃO**

A análise de estruturas de engenharia depende essencialmente do tipo de modelo matemático que é utilizado para descrever o comportamento físico do sistema. Dentre os modelos numéricos comumente utilizados na análise de sistemas destaca-se o método dos elementos finitos. Uma outra forma de análise de sistemas é através da modelagem experimental. Uma análise experimental criteriosa porém, visando minimizar as fontes de erros, é uma tarefa de difícil execução. Além disso, a condensação das matrizes do modelo analítico aos graus de liberdade experimentais para efeito de comparação, ou mesmo, o problema inverso, são operações que podem apresentar problemas numéricos de condicionamento. Em todos os tipos de análise descritos anteriormente, principalmente, quando se tratar de estruturas grandes ou complexas, a solução do sistema completo geralmente torna-se inviável do ponto de vista de tempo de modelagem e esforço computacional. Nestes casos, uma solução seria utilizar um processo de síntese modal que forneça um problema computacional de tamanho reduzido.

Desde o trabalho pioneiro sobre síntese modal de Hurty (1965), vários métodos de síntese modal foram desenvolvidos, sendo que alguns destes métodos foram revisados, Hurty et al.(1971) e Craig (1987). O trabalho de Craig (1981) apresenta uma revisão destes principais métodos, mostrando que os métodos de síntese modal diferenciam-se, basicamente, na forma

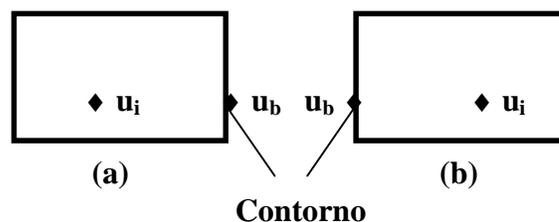
de forçar as compatibilidades para a montagem das equações de equilíbrio e na montagem dos superconjuntos modais, que podem incluir modos estáticos e/ou modos normais.

No método proposto as subestruturas são discretizadas através de parâmetros de massa, rigidez e amortecimento, sendo separadas umas das outras através de pontos discretos de inércia. Os modos de flexibilidade residual são estimados à partir dos modos não selecionados da base modal. Aqui, nenhuma restrição é feita quanto a quantidade de modos que devem ser selecionados e não selecionados da base, sendo que é possível obter-se resultados satisfatórios na faixa de 65 a 80% de modos identificados, dentro da faixa de frequência analisada (Duarte, 1994). A qualidade dos modos selecionados e não selecionados da base modal também possui um papel fundamental para o sucesso da síntese. Até então, a eliminação dos modos da base era feita por tentativa pelo analista. Para contornar este problema é proposto uma formulação que utiliza um processo de seleção automática dos modos da base modal, com a vantagem de tornar o procedimento de síntese automático, sem a possível interferência do usuário, (Cleudmar e Kurka, 1999).

A maioria dos trabalhos que utiliza o método de síntese dos modos do componente para a solução de problemas dinâmicos de grandes estruturas, desprezam o amortecimento ou no caso mais geral consideram amortecimento proporcional. Entretanto, a suposição de leve amortecimento não é válida para algumas estruturas em engenharia. Além disso, geralmente os modos medidos experimentalmente são complexos, ou seja, não satisfazem a condição de proporcionalidade no amortecimento. Na análise do autoproblema de um sistema sem amortecimento, os modos de vibrar considerados são todos reais. Na prática, sabe-se que as estruturas possuem um certo nível de amortecimento levando a um modelo cujo autoproblema fornecerá, necessariamente, modos complexos. Este fato sempre ocorre na análise experimental, onde autovalores e autovetores complexos são extraídos de dados oriundos do domínio da frequência ou do domínio do tempo. Entretanto, os softwares de análise por elementos finitos, geralmente, fornecem apenas modelos de modos reais. Com isso, a transformação destes modos reais em modos complexos similares será de grande importância para a validação de testes experimentais, bem como, para a utilização em métodos de síntese modal que exijam modos complexos.

## 2. MÉTODO DE SÍNTESE MODAL

O método proposto é utilizado tanto em sistemas sem amortecimento como em sistemas com amortecimento não proporcional. Para isto, as equações de movimento das subestruturas são transformadas em equações de estado de primeira ordem e um superconjunto modal de flexibilidade residual é utilizado para transformar as coordenadas físicas em coordenadas modais, (Cleudmar e Kurka, 1999). Para a aplicação da técnica de síntese modal proposta, suponha que dois componentes (a) e (b) sejam ligados por uma interface comum, para formarem uma estrutura global, como mostrado na figura (1). Estas subestruturas são discretizadas utilizando coordenadas físicas internas ( $u_i$ ) e de contorno ( $u_b$ ).



**Figura 1.** Subestruturas (a) e (b) discretizadas e interligadas por uma interface comum.

A equação de movimento de uma subestrutura supondo amortecimento geral pode ser definida de forma genérica por:

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = f \quad (1)$$

Na equação (1), (M) é a matriz de massa, (C) a matriz de amortecimentos, (K) a matriz de rigidez, (u) o vetor de deslocamentos físicos e (f) o vetor de forças internas e de contorno. A forma mais conveniente de solução desta equação é utilizar a formulação de estado (Santos, 1993), ou seja, transformá-la em um sistema de 2n equações diferenciais de primeira ordem, ou seja:

$$A \dot{v} + B v = P \quad (2)$$

Os modos de flexibilidade residual são obtidos a partir dos modos flexíveis não selecionados ( $\theta_{fu}$ ), ponderados através de forças unitárias ( $f_b$ ) no contorno, da seguinte forma:

$$\delta_r = \theta_{fu} \Lambda_{fu}^{-1} \theta_{fu}^t f_b = \theta_{fu} \Lambda_{fu}^{-1} \theta_{fub}^t \quad (3)$$

A solução homogênea da equação (2) fornece os autovalores e os autovetores complexos do sistema físico. As coordenadas físicas (v) são substituídas pelas coordenadas modais ( $\eta$ ) através da seguinte transformação linear:

$$v = \begin{bmatrix} \hat{\delta}_{ri} & \hat{\theta}_{fki} \\ \hat{\delta}_{rb} & \hat{\theta}_{fkb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_r \\ \eta_k \end{Bmatrix} = \hat{\Psi} \eta \quad (4)$$

Finalmente, a equação de movimento de cada componente em termos das coordenadas modais pode ser obtida como:

$$\hat{\beta} \ddot{\eta} + \hat{\alpha} \dot{\eta} = \hat{\Psi}^t P \quad \text{sendo } \hat{\beta} = \hat{\Psi}^t A \hat{\Psi} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{rr} & 0 \\ 0 & I_{kk} \end{bmatrix} \quad \text{e } \hat{\alpha} = \hat{\Psi}^t B \hat{\Psi} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{rr} & 0 \\ 0 & \hat{\Lambda}_{kk} \end{bmatrix} \quad (5)$$

A equação de movimento para as duas subestruturas conectadas é uma extensão da equação (5). As equações de compatibilidade entre as subestruturas podem ser obtidas aplicando-se uma con

$$\begin{cases} u_b^a - u_b^b = 0 \\ \eta_r^a - \eta_r^b = 0 \end{cases} \quad (6)$$

As parcelas de coordenadas modais mantidas são utilizadas para efetuar uma nova transformação linear no sistema, sendo que a matriz de conectividade geral ( $\bar{S}$ ) é dada por:

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} -C_{db}^{-1} C_{ik} \\ I_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D \hat{\theta}_{fkb}^a & D \hat{\theta}_{fkb}^b \\ D \hat{\theta}_{fkb}^a & -D \hat{\theta}_{fkb}^b \\ I_{kk}^a & 0 \\ 0 & I_{kk}^b \end{bmatrix} \text{ sendo } D = (\hat{\delta}_{rb}^a + \hat{\delta}_{rb}^b)^{-1} \quad (7)$$

Finalmente, a equação homogênea global de movimento do sistema é dada por:

$$\hat{M} \ddot{\hat{p}} + \hat{K} \hat{p} = 0 \quad \text{Onde; } \hat{M} = \bar{S}^t \hat{\Delta} \bar{S} = \begin{bmatrix} I_{kk}^a + \hat{\theta}_{fkb}^{a^t} \hat{V} \hat{\theta}_{fkb}^a & -\hat{\theta}_{fkb}^{a^t} \hat{V} \hat{\theta}_{fkb}^b \\ -\hat{\theta}_{fkb}^{b^t} \hat{V} \hat{\theta}_{fkb}^a & I_{kk}^b + \hat{\theta}_{fkb}^{b^t} \hat{V} \hat{\theta}_{fkb}^b \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\hat{V} = D^t (\hat{\beta}_{rr}^a + \hat{\beta}_{rr}^b) D \quad \text{e} \quad \hat{K} = \bar{S}^t \hat{\Gamma} \bar{S} = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{kk}^a + \hat{\theta}_{fkb}^{a^t} D \hat{\theta}_{fkb}^a & -\hat{\theta}_{fkb}^{a^t} D \hat{\theta}_{fkb}^b \\ -\hat{\theta}_{fkb}^{b^t} D \hat{\theta}_{fkb}^a & \hat{\Lambda}_{kk}^b + \hat{\theta}_{fkb}^{b^t} D \hat{\theta}_{fkb}^b \end{bmatrix}$$

A equação (8), representa a equação de movimento sintetizada do sistema completo e a sua solução fornece os autovalores e autovetores complexos.

### 3. CRITÉRIO DE ELIMINAÇÃO AUTOMÁTICA DE MODOS COMPLEXOS

Nos processos de síntese modal que utilizam o superconjunto modal de flexibilidade residual, o usuário define, aleatoriamente, quais modos deseja retirar da base modal. Estes modos não selecionados vão ser utilizados para definir os modos de flexibilidade residual. Neste caso, mesmo mantendo-se um número suficiente de modos na base, corre-se o risco de selecionar modos que seriam de baixa sensibilidade para a identificação dinâmica do sistema original. Visando automatizar este processo, foi definido um critério de eliminação de modos complexos através da suposição de que as parcelas internas de energia dos modos selecionados são as principais responsáveis pelo movimento de vibração do sistema completo, já que as parcelas relativas do contorno ficarão naturalmente sujeitas às condições impostas pelo acoplamento. Os graus de liberdade do interior de cada subestrutura, por sua vez, tendem a sofrer estes efeitos apenas de forma indireta. No entanto, como o movimento resultante da estrutura completa é devido ao acoplamento mútuo entre os vários modos das subestruturas conectadas, mesmo que um modo isolado de uma subestrutura possua uma pequena influência no contorno, quando este modo for, naturalmente, associado com os outros modos da outra subestrutura conectada, esta vinculação pode acarretar em um aumento do nível de energia de deflexão no contorno. Esta influência foi medida levando-se em conta um peso que fornece um índice de qualidade modal. Considerando, inicialmente, duas subestruturas conectadas, o peso final de cada modo ( $Z^x$ ) é definido através de um somatório mútuo entre os vários pesos modais de cada subestrutura conectada. Estes pesos modais individuais de cada subestrutura são obtidos através da norma Euclidiana (kreyzig, 1991) entre as parcelas modais do contorno e as parcelas modais internas (Cleudmar e Kurka, 1999). Finalmente, o peso final de cada j-ésimo modo de uma dada subestrutura é obtido por:

$$N^j = \sqrt{|N_x^j|^2 + |N_y^j|^2 + |N_z^j|^2} \quad (9)$$

Onde  $(N_x^j)$  representa um somatório de  $(n)$  pesos finais na direção  $(x)$ . Portanto, um critério consistente é a eliminação daqueles modos de maior peso  $(N^j)$ .

#### 4. FORMULAÇÃO EM MODOS COMPLEXOS

Os trabalhos de (Santos, 1993) e (Mitchell, 1990) apresentam um processo de transformação de modos reais em modos complexos similares e que são utilizados como base para a formulação apresentada neste trabalho. Uma base de autovetores complexos pode ser extraída à partir dos modos reais calculados  $(\bar{\phi})$ . Para que os modos complexos obtidos possam descrever adequadamente o comportamento do sistema físico, deve-se efetuar uma normalização conveniente dos modos reais calculados. A fim de se obter estes parâmetros de normalização, considere um sistema com amortecimento geral descrito pela equação (2). Esta equação diferencial de primeira ordem, de tamanho  $2n$  é descrita por;

$$A = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} ; v = \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix} ; P = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

As coordenadas físicas  $(v)$  são substituídas pelas coordenadas modais  $(\eta)$  através da seguinte transformação linear:

$$v = \hat{\psi} \eta \quad \text{onde} \quad \hat{\psi} = \begin{bmatrix} \psi & \psi^* \\ \lambda\psi & \lambda^*\psi^* \end{bmatrix} \quad (11)$$

A matriz modal  $(\hat{\psi})$  é composta de modos normais mantidos e modos de flexibilidade residual, conforme mostrado na equação (4). Através das equações (10) e (11) e premultiplicando o resultado pela transposta da matriz modal, obtém-se um conjunto de equações diferenciais da forma:

$$a \dot{\eta} + b \eta = \hat{\psi}^t P \quad (12)$$

Onde:

$$a = \begin{bmatrix} 2\lambda^* \psi^h M \psi^* + \psi^h C \psi^* & (\lambda + \lambda^*) \psi^h M \psi + \psi^h C \psi \\ (\lambda + \lambda^*) \psi^t M \psi^* + \psi^t C \psi^* & 2\lambda \psi^t M \psi + \psi^t C \psi \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -\lambda^{*2} \psi^h M \psi^* + \psi^h K \psi^* & -\lambda \lambda^* \psi^h M \psi + \psi^h K \psi \\ -\lambda \lambda^* \psi^t M \psi^* + \psi^t K \psi^* & -\lambda^2 \psi^t M \psi + \psi^t K \psi \end{bmatrix}$$

Os autovalores do sistema são descritos por  $(\lambda = -\omega \xi - i \omega \sqrt{1 - \xi^2})$ . A equação (12) é diagonal. Com isso, as equações de ortogonalidade podem ser definidas como:

$$\begin{aligned}
-2\omega \xi \psi^h M \psi + \psi^h C \psi &= 0 & -\omega^2 \psi^t M \psi^* + \psi^t K \psi^* &= 0 \\
-2\omega \xi \psi^t M \psi^* + \psi^t C \psi^* &= 0 & -\omega^2 \psi^h M \psi + \psi^h K \psi &= 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Para um sistema modelado sem amortecimento, o parâmetro de normalização dos modos reais é obtido da seguinte forma:

$$a = \begin{bmatrix} 2\lambda^* m^* & 0 \\ 0 & 2\lambda m \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} k^* - \lambda^{*2} m^* & 0 \\ 0 & k - \lambda^2 m \end{bmatrix} \tag{14}$$

Onde, as equações de compatibilidade do sistema amortecido são definidas como:

$$\begin{aligned}
\psi^t M \psi &= m & \psi^t K \psi &= k \\
\psi^h M \psi^* &= m^* & \psi^h K \psi^* &= k^*
\end{aligned} \tag{15}$$

Através das equações (13) e (15), obtém-se para a parcela relativa à matriz de massa, a seguinte relação:

$$m = i 2 \psi^t M \psi \tag{16}$$

Para uma normalização pela massa e da equação (14), tem-se que ( $2\lambda m = 1$ ). Finalmente, através das equações (15) e (16) tem-se que:

$$\psi^t M \psi = \frac{1}{4\omega} \tag{17}$$

Utilizando o parâmetro de normalização definido pela equação (17), é possível a obtenção de modos complexos simulados através dos modos reais. Se os modos reais obtidos pelo método de elementos finitos forem normalizados pela massa, os modos complexos simulados de cada subestrutura, serão definidos por:

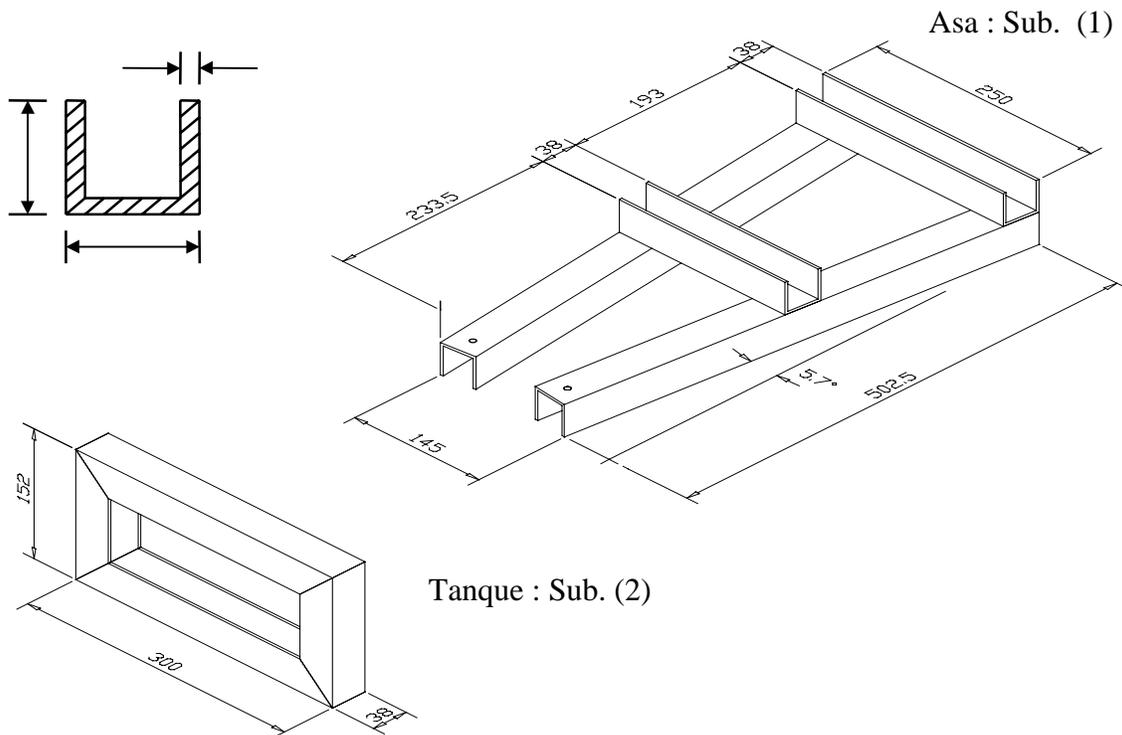
$$\psi = \phi + i \bar{\phi} \quad \text{sendo} \quad \phi = \frac{\bar{\phi}}{2\sqrt{\omega}} \quad e \quad \bar{\phi}^t M \bar{\phi} = I \tag{18}$$

## 5. ESTRUTURA ANALISADA

O modelo avaliado consiste de uma estrutura de alumínio construída em perfil U (Cleudmar, 1998) cujas dimensões são mostradas na figura (2). Para a aplicação do processo de síntese, a estrutura completa foi dividida em duas subestruturas. A subestrutura (1) é definida pela estrutura principal (asa) e a subestrutura (2) é definida pelo quadro (tanque), (kurka e Cleudmar, 1998). Os parâmetros modais experimentais das subestruturas e estrutura completa foram identificados a partir das funções de resposta em frequência (FRF) de pontos aleatoriamente distribuídos nas subestruturas, utilizando-se o programa StarModal, (SMS, 1990).

A estrutura completa, a subestrutura (1) e a subestrutura (2) foram também modeladas analiticamente, utilizando-se o método dos elementos finitos, através do programa Ansys. Os modelos foram construídos utilizando-se elementos de casca com oito nós por elemento e seis graus de liberdade por nó. As dimensões do modelo analítico são idênticas às do modelo experimental. A tabela 1 apresenta a comparação entre as frequências naturais numéricas com as respectivos frequências identificadas experimentalmente. Como os índices de amortecimento são baixos, utilizaram-se, para fins de comparação, somente a parte imaginária dos autovalores experimentais. Os modelos analíticos e experimentais foram avaliados através da comparação dos respectivos autovalores utilizando-se a inspeção visual entre os respectivos modos.

Os autovetores obtidos via análise numérica foram normalizados de acordo com a equação (17) e bases modais complexas equivalentes foram obtidas de acordo com a equação (18). Estas bases modais foram utilizadas para a identificação dos parâmetros dinâmicos da estrutura completa através da técnica de síntese modal. As informações modais analíticas das subestruturas são armazenadas em um arquivo externo e através do Programa Struct, (Cleudmar, 1998) é realizado o processo de síntese modal. Neste caso, eliminaram-se 5 modos da subestrutura (1) e 8 modos da subestrutura (2), correspondendo a 27,8 % e 40% do total dos respectivos modos.



**Figura 2.** Desenho da estrutura analisada.

A tabela 2 apresenta os resultados da síntese modal do sistema utilizando o critério de seleção automática de modos. Estes valores estão dentro de faixas usuais de identificação obtidos pela técnica de síntese modal (Duarte, 1993).

**Tabela 1.** Comparação entre as frequências naturais analíticas e experimentais.

	FREQUÊNCIAS NATURAIS (Hz)								
	SUB 1			SUB 2			ESTRUT. COMPLETA		
	EXP.	MEF	ERRO (%)	EXP.	MEF	ERRO (%)	EXP.	MEF	ERRO (%)
1	58,6	57,2	2,4	617,0	776,0	25,8	74,7	75,9	1,6
2	254,0	225,0	11,4	919,0	933,0	1,5	174,7	187,7	7,4
3	354,0	322,0	9,0	988,0	954,0	3,4	356,3	402,1	12,9
4	600,0	616,0	2,7	1210,0	1070,0	11,6	475,1	492,0	3,6
5	626,0	679,0	8,5	1250,0	1160,0	7,2	550,9	578,8	5,1
6	677,0	810,0	19,7	1370,0	1310,0	4,4	726,3	784,8	8,1
7	784,0	894,0	14,0	1510,0	1520,0	0,7	790,6	815,1	3,1
8	809,0	912,0	12,7	1660,0	1600,0	3,6	846,3	915,9	8,2
9	963,9	1030,4	6,9	1770,0	1700,0	3,9	939,7	952,4	1,4
10	964,0	1030,2	6,9	1810,0	1900,0	4,9	966,6	996,6	3,1

**Tabela 2.** Resultados da síntese modal.

Número do modo	Frequências naturais do sistema (Hz)	Frequências naturais sintetizadas (Hz)	ERRO RELATIVO (%)	MAC
1	0,06	0,07	24,5	0,38
2	0,07	0,05	31,7	0,88
3	0,13	0,14	3,9	0,86
4	75,9	23,2	69,4	0,91
5	187,7	156,3	16,7	0,60
6	492,0	369,5	24,9	0,89
7	784,8	682,1	13,1	0,50
8	815,1	865,4	9,2	0,60
9	1047,7	1028,1	1,9	0,84
10	1048,0	1007,2	3,9	0,60
11	1062,8	1058,6	0,4	0,83

## 5. CONCLUSÕES

O trabalho apresenta uma técnica de conversão de modos reais em modos complexos. Estes modos complexos equivalentes são utilizados no método de síntese modal que utiliza um superconjunto de flexibilidade residual acoplado a um processo automático de escolha de modos a serem utilizados na síntese do sistema. A indicação dos modos que devem ser selecionados ou não selecionados das subestruturas, é um fator decisivo para a obtenção de precisão na síntese final. Verificou-se, através do modelo experimental, que o critério proposto é uma das possibilidades de escolha das bases modais apropriadas que poderiam ser utilizadas no processo de síntese, não descartando, porém, a possibilidade de existência de outras bases modais que também poderiam levar a resultados satisfatórios. Observou-se que os resultados obtidos com esta base modal equivalente foram satisfatórios, indicando a possibilidade de utilização de tal procedimento quando uma base de modos reais da estrutura for calculada via método dos elementos finitos. Uma avaliação mais criteriosa da metodologia pode ser obtida considerando um outro modelo experimental com um índice de amortecimento mais elevado.

## 6. REFERÊNCIAS

- Araújo, Cleudmar A., 1998, “Modelagem de Sistemas Dinâmicos Através da Síntese Modal de Componentes”, Doctoral Thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.
- Araújo, Cleudmar A. e Kurka, P. R. G. “Critério de seleção de modos complexos aplicado a um método de síntese modal generalizado - Parte I : Simulação Numérica.”, COBEM/99, Nov. 1999, Águas de Lindóia, SP.
- Araújo, Cleudmar A. e Kurka, P. R. G. “Critério de seleção de modos complexos aplicado a um método de síntese modal generalizado - Parte II : Ensaio Experimental.”, COBEM/99, Nov. 1999, Águas de Lindóia, SP.
- Craig, Jr., R. R., 1987, “A Review of Time-Domain and Frequency-Domain Component Mode Synthesis Methods”, J. of Modal Analysis, pp. 59-72.
- Craig Jr., R. R., 1981, “Structural dynamics - An introduction to computer methods”, J. Wiley, New York.
- Duarte, M. A. V., 1994, “Ajuste de Modelos de Dinâmicos de Estruturas com Não Linearidades Concentradas”, Doctoral Thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.
- Hurty, W. C., 1965, “Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes”, AIAA J., vol. 3, n. 4, pp. 678 - 685.
- Hurty, W. C., Collins, J. D., Hart, G. C., 1971, “Dynamic analysis of large structures by modal synthesis techniques. Computers & Structures, v. 1, p. 535-563.
- Kreyszig, E., 1993, “Advanced Engineering Mathematics”, J. Wiley, 7a. ed., New York.
- Kurka, P. R. G. and Araújo, Cleudmar A., 1998, “Practical application of a selection criteria for constructing the superset of residual flexibility modes used in modal synthesis method”, ISMA 23, Internatinal Conference on Noise and Vibration Engineering, Sept., Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, pp. 16-18.
- Mitchell, L., 1990, “Complex modes: A Review.”, Proc. of the 8th International Modal Analysis Conference. Kissimmee, USA, p. 891 -899.
- Programa StarModal, 1990, Theory and Applications. Structural Measurement Systems.
- Santos, J. M. C., 1993, “Ajuste de Modelos de Estruturas Acopladas por Juntas Mecânicas Usando Funções de Resposta em Frequência e Síntese Modal de Componentes”, Doctoral Thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.