

ALGORITMO PARA IMPLEMENTAÇÃO DO CRITÉRIO DE PLANO CRÍTICO PARA FADIGA MULTIAXIAL

José A. Araújo*

José C. Balthazar**

Nelison R.C. Vilela**

* Departamento de Ciências de Engenharia, Universidade de Oxford, Oxford, Reino Unido. E-mail: alex.araujo@christ-church.oxford.ac.uk

** Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica, 70910-900, Brasília, DF, Brasil. E-mail: jcb@enm.unb.br

Resumo

A grande maioria das teorias propostas para análise do problema da fadiga multiaxial o fazem segundo tres metodologias básicas: a) métodos baseados nas tensões ou deformações equivalentes; b) métodos de plano crítico e; c) métodos de energia ou do trabalho de deformação. As teorias de plano crítico, desenvolvidas a partir da interpretação física dos mecanismos de crescimento de trincas de fadiga são as que tem mostrado resultados mais promissores. Entretanto, a aplicação destas teorias não é tão simples, pois nos carregamentos fora de fase, os eixos das tensões e deformações principais mudam de orientação ao longo do tempo, dificultando a identificação do plano crítico, e o cálculo dos parâmetros envolvidos, mesmo nos casos de carregamentos proporcionais. Neste trabalho é descrito um algoritmo para implementação de dois modelos de plano crítico para fadiga multiaxial.

Palavras-chave: fadiga, fadiga multiaxial, carregamentos combinados, plano crítico.

1. INTRODUÇÃO

Componentes mecânicos com funções estruturais são frequentemente submetidos a carregamentos variáveis no tempo. Árvores de transmissão, eixos, barras de torção, vasos de pressão, tubulações em plantas químicas e refinarias, junções pás de turbina/rotor, componentes aeronáuticos e mesmo junções parafusadas, entre outros, estão frequentemente sob estados bi-axiais ou tri-axiais de tensão que, quando originados por carregamentos dinâmicos, podem levar à iniciação e propagação de trincas de fadiga. O processo de fadiga sob estes estados complexos de tensão é conhecida como *Fadiga Multiaxial* e sua consideração é de fundamental importância para o correto dimensionamento e aumento da confiabilidade de componentes que na sua vida operacional estejam submetidos a este tipo de carregamento. As primeiras investigações sobre o assunto datam do século passado, quando Lanza (1886) publicou os primeiros resultados de testes envolvendo carregamento combinado de flexão e torção. Já neste século, Mason (1917), Haigh(1923), Nishiara e Kawamoto (1941), Gough *et al* (1951) e Sines (1955), publicaram mais resultados experimentais e formularam as primeiras hipóteses teóricas para explicar o processo de fadiga sob cargas multiaxiais. Na tentativa de desenvolver teorias que possam ser utilizadas nas situações mais gerais e complexas da fadiga multiaxial, mais de duas dezenas de modelos já

foram propostos para tentar solucionar o problema. De um modo geral, as teorias já apresentadas são derivadas a partir de três diferentes abordagens: a) da tensão ou deformação equivalente (Sines, 1959), b) da energia de deformação (Garud, 1979, Ellyin et al., 1991, Ellyin e Golos, 1993, Liu, 1993 e Glinka et al., 1995) e; c) do plano crítico (Brown e Miller, 1973, Lohr e Ellison, 1980, Socie, 1987, Fatemi e Socie, 1988, McDiarmid, 1991, e Socie, 1993).

As teorias de tensão ou deformação equivalente propõem a transformação das tensões multiaxiais de amplitude constante em uma amplitude de tensão uniaxial, a qual, assume-se, irá produzir a mesma vida à fadiga que as tensões multiaxiais combinadas. A amplitude de tensão equivalente é então usada para determinar a vida à fadiga a partir de curvas S-N, obtidas em ensaios convencionais de fadiga sob carregamento uniaxial alternado. Um modelo deste tipo bastante conhecido foi proposto por Sines (1959) o qual estabelece que a tensão cisalhante octaedral admissível é uma função linear da soma das tensões normais médias sobre os planos octaedrais, expresso matematicamente como:

$$\frac{1}{3} \left\{ (\sigma_{1a} - \sigma_{2a})^2 + (\sigma_{2a} - \sigma_{3a})^2 + (\sigma_{1a} - \sigma_{3a})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq A - \alpha (\sigma_{xm} + \sigma_{ym} + \sigma_{zm}) \quad (1)$$

onde σ_{1a} , σ_{2a} e σ_{3a} são as tensões principais alternadas, σ_{xm} , σ_{ym} e σ_{zm} são as tensões normais médias, A é uma constante para o material, proporcional a resistência a fadiga para carregamentos alternados, e α é uma medida da influência da tensão média normal sobre a resistência à fadiga do material para uma vida esperada. A falha ocorrerá se o valor da expressão do lado esquerdo exceder o do lado direito. A constante A é obtida a partir de ensaios sob carregamentos alternados, e α sob carregamentos repetidos. Formulações baseadas nas deformações também são utilizadas. Araújo e Balthazar (1997) mostraram que o critério de Sines apresenta resultados satisfatórios para o cálculo da resistência à fadiga em carregamentos combinados de flexão e torção em fase. Entretanto, critérios deste tipo não prevêm o crescimento de trincas de fadiga de forma coerente com o observado experimentalmente pois não considera os aspectos físicos da resposta do material submetido à carregamentos dinâmicos, isto é, não oferece uma interpretação em termos dos processos de nucleação e crescimento de trincas, parte fundamental do processo de fadiga. O modelo de Sines, por exemplo, prevê que a vida à fadiga é controlada pela amplitude da tensão cisalhante octaedral e, portanto, seria esperado que as trincas de fadiga propagassem nestes planos, o que não ocorre, conforme mostrado por Socie (1987). Outro problema deste tipo de critério é que sua aplicabilidade é restrita à carregamentos proporcionais, ou seja, aos casos em que os eixos principais das componentes alternadas de tensão permanecem invariáveis ao longo do ciclo de carga.

Uma outra abordagem para o problema foi considerada através do uso da energia como parâmetro de correlação para a falha por fadiga multiaxial. O método consiste em computar o trabalho plástico realizado em cada ciclo sob um estado multiaxial de tensões e correlacioná-lo com a vida à fadiga. Um método deste tipo é o modelo de Garud (1979) o qual propõe que a vida à fadiga para iniciação de uma trinca, N_f , é uma função do trabalho plástico por ciclo de carregamento, W_c , expresso pela equação:

$$N_f = F(W_c) \quad (2)$$

onde F é uma função a ser determinada experimentalmente a partir de ensaios sob controle de deformação.

Combinando-se um modelo deste tipo com uma teoria de acumulação de dano, como a

Regra de Miner, por exemplo, pode-se fazer uma previsão da vida à fadiga. Entretanto, para determinar o trabalho plástico realizado por ciclo é necessário o uso de relações constitutivas de plasticidade, o que torna difícil a utilização prática do modelo. Além disso a precisão deste tipo de modelo é questionável quando aplicada a fadiga policíclica, onde as deformações plásticas são muito pequenas ou inexistentes, o que torna as estimativas do trabalho plástico realizado em cada ciclo difíceis e imprecisas. De acordo com Nelson e Tipton (1985) uma pequena variação no valor do trabalho de deformação plástica resulta em grandes discrepâncias na previsão da vida à fadiga.

2. AS TEORIAS DE PLANO CRÍTICO

As teorias de plano crítico são fundamentadas em observações experimentais mostrando que as trincas de fadiga nucleiam-se e crescem inicialmente em planos preferenciais. As tensões e deformações são determinadas em vários planos durante um ciclo de carregamento para o mesmo estado de tensão e, uma combinação empírica destas variáveis é então usada para prever o plano mais severamente carregado ou “plano crítico”, onde espera-se que as trincas de fadiga tenham origem. Além do local de nucleação da trinca, tais parâmetros também podem ser correlacionados com a vida por fadiga obtida a partir de simples testes de flexão ou torção alternada pura.

Brown e Miller (1973) afirmaram que o plano crítico é o plano de máxima amplitude da deformação cisalhante e que as trincas poderiam crescer sobre estes paralelamente a superfície (caso A) ou indo desta para o interior (caso B), como mostra a Fig. 1. Mais recentemente Bannantine e Socie e (1985) e Socie (1987) mostraram que os planos críticos, ou os planos mais prováveis de crescimento das trincas são os planos de máxima amplitude da deformação normal ou de máxima amplitude da deformação cisalhante e que o processo de crescimento e propagação das trincas depende não apenas do tipo do carregamento aplicado, mas do material, assim como da amplitude do carregamento.

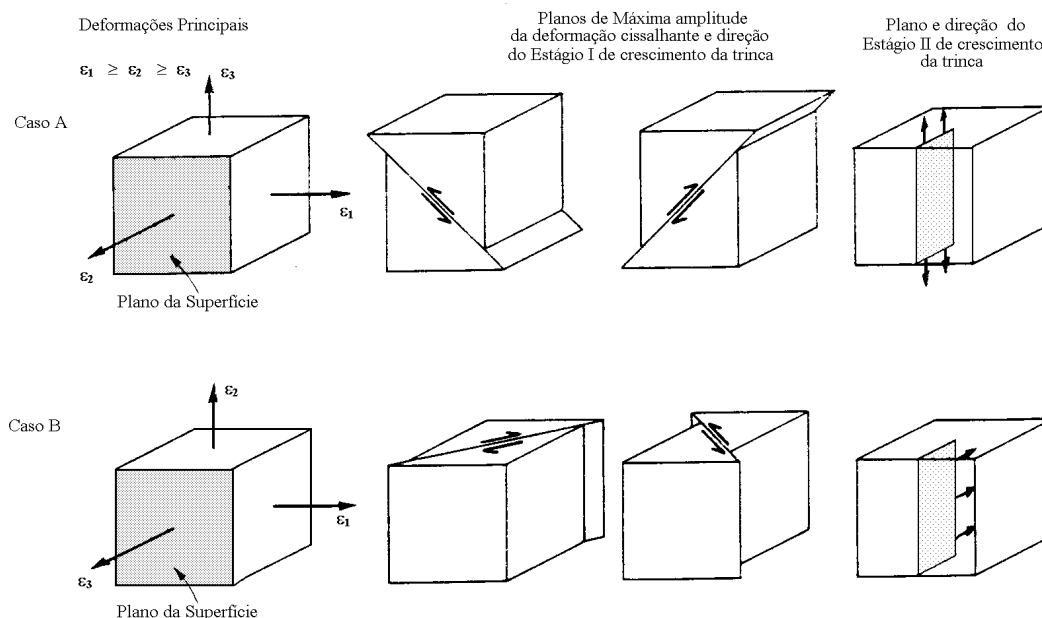


Figura 1 - Caso A e B de formação das trincas.

Como há dois casos de crescimento das trincas de fadiga, Socie (1987) e Fatemi e Socie (1988) mostraram que pelo menos 2 modelos diferentes são necessários para à análise da fadiga sob estados multiaxiais de deformações: (a) o modelo da deformação normal, para falhas que ocorrem devido a propagação de trincas normais (modo I) e b) o modelo da deformação

cisalhante, para falhas que ocorrem devido a propagação de trincas de cisalhamento (modo II).

Dois modelos de plano crítico têm sido amplamente usados e discutidos na literatura. O critério SWT de Smith, Watson and Topper (1970) é apropriado para previsão da vida de trincas que crescem em planos sujeitos a grandes deformações normais e que, portanto, crescem inicialmente no Modo I (estágio II). Este modelo é descrito pela eq. (3)

$$\Gamma = \sigma_{max} \epsilon_a = \frac{(\sigma_f')^2}{E} (2N_{ff})^{2b} + \sigma_f' \epsilon_f' (2N_{ff})^{b+c} \quad (3)$$

onde ϵ_a é a amplitude de deformação no plano de máxima amplitude de deformação e σ_{max} é a máxima tensão sobre este plano para um dado estado de tensão. Note-se que de acordo com o parâmetro de SWT o plano crítico é definido como o plano que experimenta a maior combinação de $\epsilon_a \sigma_{max}$. Para encontrar o valor máximo de Γ , correspondente ao plano crítico, situado a um ângulo θ_c , medido em relação aos planos principais ou outro referencial previamente definido, precisa-se calcular os campos de tensão e deformação para cada passo de carga em cada diferente ponto x,y da região mais severamente carregada. Mais ainda, as equações de transformação de tensão e deformação devem ser usadas para avaliar o parâmetro em diferentes planos em cada ponto e passo de carga. O lado direito da eq. (3) é a descrição de uma curva $\epsilon-N$ onde σ_f' e b são, respectivamente, o coeficiente e o expoente de resistência à fadiga, e ϵ_f' e c são o coeficiente e expoente de ductilidade à fadiga; E é o módulo de elasticidade e $2N_{ff}$ é o número de reversões necessárias para nuclear uma trinca de 1mm de comprimento.

Para situações onde a trinca cresce no Modo II (estágio I), em planos sujeitos a altos esforços cisalhantes, Fatemi e Socie (1988) propuseram o seguinte modelo:

$$\Psi = \gamma_a \left[1 + \alpha \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_e} \right) \right] = \left(\frac{\tau_f'}{G} \right) (2N_{ff})^{b_1} + \gamma_f' (2N_{ff})^c \quad (4)$$

onde γ_a é a máxima amplitude de deformação cisalhante e σ_{max} é a máxima tensão normal sobre este plano. σ_e é a tensão de escoamento e α é uma constante obtida a partir de ensaios de fadiga uniaxiais e de torção pura, a qual se aproxima de um para vidas longas ($>10^7$) e diminui para vidas curtas (Neu, Pape and Swalla-Michaud, 1999). Aqui, o plano crítico é definido como o plano experimentando a maior combinação γ_a e σ_{max} , e para avaliar-se o valor máximo do parâmetro Ψ , usa-se um procedimento similar ao descrito anteriormente para o parâmetro de SWT. Novamente, o lado direito da eq. (4) representa a curva $\epsilon-N$ para testes de torção alternada pura.

3. ALGORITMOS PARA IMPLEMENTAÇÃO DOS MODELOS DE SWT E FS

A quantificação do dano por fadiga e determinação do plano crítico é uma tarefa complexa. Um código que fosse capaz de descrever em detalhes os passos necessários para a implementação numérica destes modelos seria de grande relevância para aplicação prática em situações de projeto. O algoritmo apresentado a seguir, utilizando os modelos de Smith, Watson e Topper, e Fatemi e Socie, tem esta finalidade. O procedimento é adequado para determinação da vida inicial por fadiga de componentes estruturais sujeitos a carregamentos combinados cíclicos, de amplitude constante ou variável. Assume-se que os materiais estudados sejam isotrópicos e que o estado de tensão ou deformação seja plano, limitando a análise ao plano x,y. O detalhamento independe do regime de carregamento (elástico ou plástico) e da geometria analisada. Note-se que de acordo com os modelos de plano crítico, as variáveis que controlam o mecanismos de nucleção

da trinca são as tensões e deformações presentes no material na ausência de imperfeições. Para configurações com geometrias mais complicadas a determinação destas variáveis requer o uso de um método numérico como, por exemplo, o método de Elementos Finitos. Apesar da maioria de componentes estruturais de interesse prático possuírem geometrias complexas, ainda assim é possível obter soluções relativamente precisas para os campos de tensão/deformação de estruturas como eixos, árvores de transmissão ou tubos sob regime de carregamento elástico cíclico. Independentemente do método utilizado para determinação dos campos de tensão/deformação, deve-se enfatizar que, no procedimento abaixo, o objetivo é a determinação dos parâmetros de fadiga multiaxial e, portanto, assumir-se-á que a determinação dos campos de tensão/deformação pode ser conduzida pelo leitor com a precisão desejada.

Algoritmo:

- 1- Delimitar a região do componente onde as tensões são mais severas para conduzir a análise, por exemplo, as redondezas de concentradores de tensão (Fig. 2);

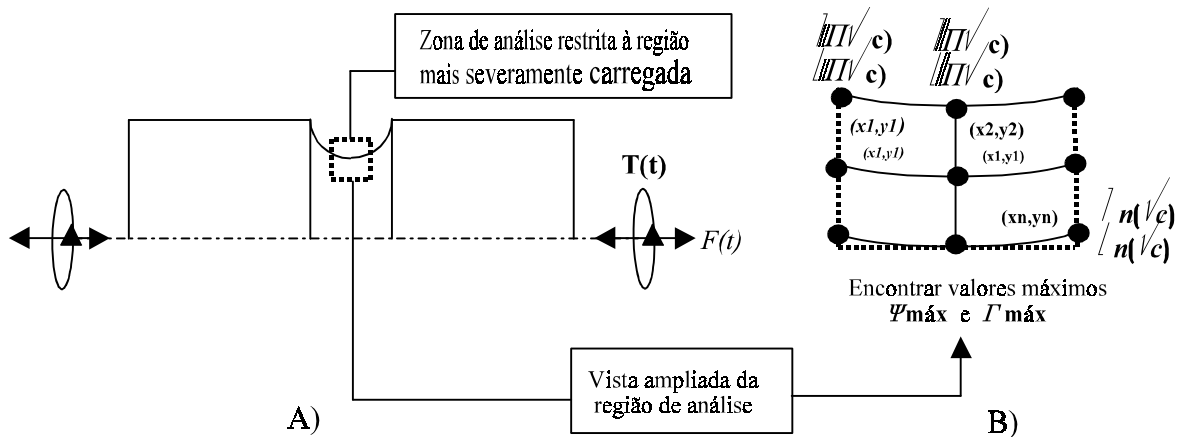


Figura 2 – A) Corpo-de-prova com entalhe mostrando a região onde a análise deve ser conduzida e B) vista ampliada desta região com pontos discretos onde os parâmetros Γ e Ψ serão avaliados.

- 2- Dividir esta região em uma malha de pontos x_i, y_i , onde $i=1, M$;
- 3- Escolher uma posição inicial, por exemplo, x_i^0, y_i^0 ;
- 4- Dividir a história de carregamento em N pontos discretos, onde N é um número inteiro suficientemente grande;
- 5- Iniciar a análise sobre o plano x ($\theta = 0^\circ$), vai-se para o primeiro passo da história de carregamento ($j = 1$) e avalia-se o tensor de tensão σ_{kl}^j e o tensor de deformação ϵ_{kl}^j ;
- 6- Repetir o passo 5 até $j = N$.
- 7- Calcular $\sigma_{xx}^{max}, \epsilon_{xx}^{max}, \epsilon_{xx}^{min}, \gamma_{xy}^{max}, \gamma_{xy}^{min}$, onde o índices superiores *max* e *min* indicam os valores máximos e mínimos da tensão máxima (média + alternada) e da deformação máxima dentro do ciclo de carregamento (ver Fig. 3);
- 8- Calcular os parâmetros $\Gamma_i(\theta)$ e $\Psi_i(\theta)$ para o plano estudado e na posição i , correspondendo cada posição i a um par ordenado (x_i, y_i) ;
- 9- Usando-se as equações básicas de transformação de tensão e deformação, calcular σ_{kl}^{ij} e ϵ_{kl}^{ij} em um plano na posição $\theta_i = \theta + \Delta\theta$;

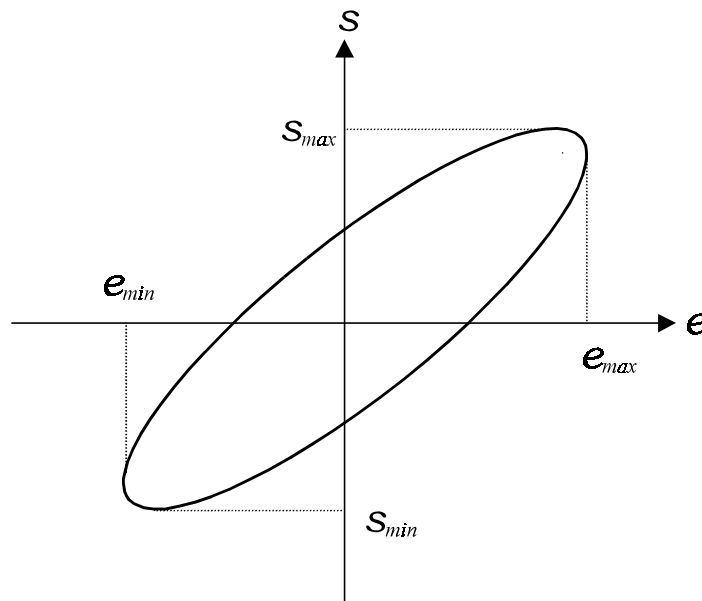


Figura 3 – Diagrama esquemático do ciclo de tensão x deformação do material em um determinado plano θ , mostrando os pontos onde a tensão e a deformação máxima (média + alternada) alcançam valores máximos e mínimos.

- 10- Repetir os passos 7 e 8 para novos planos, variando θ de 0° até $\theta = 180^\circ$;
- 11- Encontrar e armazenar os maiores valores de Γ_i e Ψ_i e os correspondentes planos críticos locais θ_c entre todos os planos investigados para o ponto inicial;
- 12- Incrementar x_i e ir para o passo 2;
- 13- Repetir o passo 12 até $i = M$;
- 14- Incrementar y_i e ir para o passo 2;
- 15- Repetir o passo 14 até $i = M$;
- 16- Encontrar o valores máximos globais Γ_{max} e Ψ_{max} entre todos os diferentes pontos i (estados de tensão) analisados e os planos críticos θ_c associados a cada um destes parâmetros;
- 17- Entrar com os valores de Γ_{max} e Ψ_{max} nas Eqs. 3 e 4 e calcular o número de reversões ($2N_f$) necessárias para iniciar uma trinca de 1mm de comprimento. Adotar a previsão mais conservativa (menor vida) como solução.

4. ANÁLISE CRÍTICA DOS MODELOS DE PLANO CRÍTICO

O grande apelo das teorias de plano crítico é que a mesma apresenta uma interpretação física do processo de dano de fadiga sob estados multiaxiais de tensões. Entretanto, de um modo geral, elas requerem um maior número de parâmetros a serem determinados experimentalmente. Na fadiga oligocíclica há necessidade do uso de teorias de plasticidade para caracterizar o comportamento plástico dos materiais nos modelos que utilizam tensão e deformação como parâmetros. Isto pode ser feito através das teorias da deformação total ou da plasticidade incremental. A teoria da deformação total é de fácil implementação, porém não pode ser aplicada a casos de carregamentos não proporcionais. A teoria da plasticidade incremental prevê que o comportamento plástico dos materiais pode ser aproximado em uma curva tensão-deformação

por segmentos lineares. Estas regiões de inclinação constante são definidas através de condições de escoamento previamente estabelecidas e devem ser redefinidas sempre que ocorrerem deformações plásticas. Isto requer a aplicação de regras de encruamento para definir as mudanças no estado do material, tornando complicada a implementação da teoria.

É evidente que a escolha do modelo apropriado para avaliar a vida por fadiga depende do prévio conhecimento do modo de nucleação e crescimento inicial da trinca (Modo I ou II). Esta não é uma tarefa trivial pois o modo de crescimento da trinca depende não apenas do tipo do carregamento aplicado, mas do material, assim como da amplitude do carregamento. Isto essencialmente quer dizer que, *a priori*, não se pode definir qual dos modelos propostos, eq. 3 ou 4, seria mais indicado para avaliar o dano por fadiga em um dado tipo de material e carregamento. Sabe-se entretanto que, a aplicação do modelo usado para quantificar o dano em trincas dominadas por deformações cisalhantes para casos em que o crescimento da trinca é controlado por deformações normais fornece resultados ligeiramente conservativos, e *vice-versa*. Portanto, uma solução para este impasse passa pelo cálculo da vida por fadiga usando-se ambos os modelos. A vida esperada será a fornecida pela menor estimativa.

A determinação da constante α presente no modelo de Fatemi e Socie exige dados experimentais tanto para ensaios de fadiga uniaxiais assim como para ensaios de fadiga à torção pura. Um outro problema do modelo da deformação cisalhante (Fatemi e Socie) é que o mesmo não consegue distinguir entre o crescimento de trincas do tipo A e do tipo B. Além disto, segundo Socie (1987), os modelos da deformação cisalhante e da deformação normal não fornecem bons resultados nos casos de fadiga policíclica, pois neste caso, o processo de fadiga é controlado pelas tensões elásticas.

As tensões normais médias de tração diminuem a resistência à fadiga em carregamentos de flexão e torção alternada. Portanto, qualquer modelo proposto dentro das diferentes abordagens para o problema da fadiga multiaxial, deve possuir termos capazes de quantificar o efeito das tensões normais médias. Na fadiga oligocíclica o relaxamento da tensão média acontece devido a existência de grandes deformações plásticas o que também deve ser quantificado pelo modelo.

Resultados apresentados por Das e Sivakumar (1999) mostram que os métodos de Plano Crítico apresentam boa correlação com resultados experimentais

5. CONCLUSÃO

Embora os critérios de tensão/deformação equivalentes sejam de simples implementação e apresentem resultados satisfatórios em alguns casos, sua aplicabilidade é limitada às situações envolvendo carregamentos proporcionais (Araújo e Balthazar, 1997). Os métodos de energia apresentam dificuldades em situações onde as deformações plásticas são reduzidas ou inexistentes, como no caso da fadiga policíclica. Por estarem vinculados a uma interpretação física do processo de fadiga, os modelos de plano crítico parecem mais adequados para abordagem do problema da fadiga multiaxial, particularmente para carregamentos fora-de-fase e não-proporcionais. A identificação dos planos críticos é essencial neste processo. O algoritmo apresentado permite indentificar o plano crítico, segundo os modelos SWT e Fatemi-Socie. Este trabalho é parte de um programa de pesquisa em andamento, para avaliar a capacidade dos modelos de plano crítico para previsão da resistência e vida à fadiga de componentes estruturais sob estados multiaxiais de tensões.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BALTHAZAR, J.C. e ARAÚJO, J.A. - "Biaxial Fatigue: An Analysis of the Combined Bending / Torsion Loading Case", *Proc. of 5th International Conference on Biaxial /*

Multiaxial Fatigue and Fracture, Cracóvia, Polônia, Setembro, 1997, pp. 9-23.

- BROWN, M. W. and MILLER, K.J., (1973), A Theory for Fatigue Failure under Multiaxial Stress-Strain Conditions, Proc. IMechE, Vol. 187, pp. 745-755.
- DAS, J., e SIVAKUMAR, S.M., An Evaluation of Multiaxial Faigue Life Assessment Methods for Engineering Components, International Journal of Pressure Vessels and Piping, 76, 1999,
- ELLYIN, F., GOLOS, K. and XIA, Z., (1991), In-Phase and Out-of-Phase Multiaxial Fatigue, J. Engng. Mat. Tech., ASME, vol. 113, pp.112-118.
- ELLYIN, F., and KUJAWSKI, D., (1993), A Multiaxial Fatigue Criterion Including Mean-Stress Effect, Advances in Multiaxial Fatigue, ASTM STP 1191, (Ed. D.L. McDowell and R. Ellis), pp. 55-66.
- FATEMI, A., and SOCIE, D. F., (1988), A Critical Plane Approach to Multiaxial Fatigue Damage Including Out-of-Phase Loading, Fatigue & Fracture Engng. Mat. Struct., vol. 11, pp. 149-165.
- GARUD, Y. S., (1979), A New Approach to the Evaluation of Fatigue under Multiaxial Loading, proc. Symp. on Methods for Predicting Material Life in Fatigue, ASME, New York, pp. 247-264.
- GARUD, Y.S., (1981), Multiaxial Fatigue: A Survey of the State of the Art, J. of Testing and Evaluation, vol. 9, No. 3, pp. 165-178.
- GLINKA, G., SHEN, G. and PLUMTREE, A., (1995), A Multiaxial Fatigue Strain Energy Density Parameter Related to the Critical Fracture Plane, Fatigue & Fracture of Engng. Mat. Structures, vol. 18, pp. 37-46.
- HAIGH, B.P., (1923), The Thermodynamic Theory of Mechanical Fatigue and Hysteresis in Metals, Rep. British Association for the Advancement of Science, pp. 358-368.
- LANZA, G., (1886), Strength of Shafting Subjected to Both Twisting and Bending, Trans. ASME, vol. 8, pp. 121-196.
- LIU, K. C., (1993), A Method Based on Virtual Strain-Energy Parameters for Multiaxial Fatigue Life Prediction, Advances in Multiaxial Fatigue, ASTM STP 1191, (Ed. D.L. McDowell and R. Ellis), pp. 67-84.
- LOHR, R.D. and ELLISON, E.G., (1980), A Simple Theory for Low-Cycle Multiaxial Fatigue, Fatigue & Fracture of Engng. Mat. Structures, vol. 3, pp. 1-17.
- MASON, W., (1917), Alternating Stress Experiments, Proc. IMechE, Feb., pp. 121-196.
- McDIARMID, D.L., (1991), A General Criterion for High Cycle Multiaxial Fatigue Failure, Fatigue & Fracture Engng. Mat. Struct., vol. 14, pp. 429-453.
- NISHIARA, T. and KAWAMOTO, M., (1941), The Strength of Metals under Combined Alternating Bending and Twisting, Memoirs, College of Engineering, Kyoto Imp. University, Japan, vol. 10, pp. 177-201.
- NEU, R. W., PAPE, J. A., and SWALLA-MICHAUD, D. R., Methodologies for Linking Nucleation and Propagation Approaches for Predicting Life under Fretting Fatigue, Fretting Fatigue: Current Technology and Practices, ASTM STP 1367, D.W. Hoepfner, V. Chandrasekaran, and C.B. Elliotts, Eds., American Society for Testing Materials, 1999.
- SINES, G., (1955) , Failure of Materials under Combined Repeated Stresses with Superimposed Static Stresses, NACA Technical Note 3495, Washington, USA.
- SMITH, K.N., WATSON, P., and TOPPER, T.H., A Stress-Strain Function for the Fatigue of Metals, J. Mater., Vol. 5, No. 4, 1970, pp. 767-778.
- SOCIE, D. F., (1987), Multiaxial Fatigue Damage Models, J. of Engineering Materials and Technology, ASME, Vol. 109, Oct. pp. 293-298.
- SOCIE, D.F., (1993), Critical Plane Approaches for Multiaxial Fatigue Damage Assessment, Advances in Multiaxial Fatigue, ASTM STP 1191, (Ed. D.L. McDowell and R. Ellis), pp.7-36.