

MODELAGEM DA INTERAÇÃO DINÂMICA ENTRE ESTRUTURAS DE PLACA E SUBSISTEMAS MECÂNICOS EM MOVIMENTO

Wallace M. Bessa

Instituto Militar de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica e Materiais
Praça General Tibúrcio, 80, Praia Vermelha – 22290-270 – Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Fernando R. da Silva

Universidade Católica de Petrópolis, Escola de Engenharia
Rua Barão do Amazonas, 124, Centro – 25685-070 – Petrópolis, RJ, Brasil

Resumo

Procura-se, neste trabalho, apresentar uma formulação para o estudo da interação entre uma estrutura, representada por uma placa, e um carregamento oriundo de um subsistema mecânico em movimento, que percorra uma trajetória qualquer ao longo da superfície da placa. O efeito de parâmetros importantes do subsistema, como por exemplo, sua velocidade, sua trajetória, e suas características mecânicas, são levados em consideração na análise da resposta da estrutura. Utiliza-se o método dos elementos finitos e a técnica dos grafos de ligação na modelagem do sistema. O modelo matemático obtido na forma de equações de estado permite uma análise física do sistema global, isto é, uma análise do comportamento dinâmico da estrutura de placa e do subsistema mecânico, interagindo entre si. São apresentados resultados de simulação para a validação do procedimento, com o intuito de destacar a importância de um modelo que considere o comportamento global do sistema.

Palavras-chave: Dinâmica, Vibrações, Cargas Móveis, Elementos Finitos, Grafos de Ligação

1. INTRODUÇÃO

A análise dinâmica do problema de cargas móveis em placas é de grande importância para algumas áreas da engenharia mecânica, civil e aeroespacial. Em boa parte dos casos, o carregamento pode perfeitamente ser representado por uma carga constante, concentrada ou linearmente distribuída. Porém, nem sempre esta simplificação representa adequadamente a realidade.

Com o desenvolvimento de novos materiais e o crescimento dos transportes urbanos de massa, pontes e viadutos têm se tornado cada vez mais esbeltos, à medida que ônibus e trens, por sua vez, tornam-se mais pesados. Devido a esse aumento da relação entre o peso do veículo e o peso da estrutura, para que um modelo represente bem esta interação, a dinâmica veicular precisa ser considerada. Essa necessidade, porém, esbarra na dificuldade de se considerar, em um mesmo modelo, subsistemas de parâmetros distribuídos e concentrados que interajam entre si.

Apesar da grande maioria dos trabalhos, Henchi *et al.*(1997), Wu & Shih(1998), Kwon *et al.*(1998), Wang & Lin(1998), Wang & Chou(1998) e Chant *et al.*(1999), abordar o problema de cargas móveis através de modelos simplificados, onde o carregamento é constante e a estrutura é representada por uma viga, alguns autores propuseram-se a investigar o comportamento de uma placa submetida a um carregamento móvel.

Considerando o efeito do cisalhamento e da inércia rotatória e desconsiderando o regime transiente do modelo estrutural, Jahanshahi e Monzel(1965) e Adler e Reismann(1974), utilizando a teoria de Mindlin para placas analisaram o comportamento uma placa infinita sob a ação de um carregamento móvel distribuído em linha perpendicularmente à sua trajetória.

Utilizando o método dos elementos finitos para discretizar a estrutura, Taheri e Ting(1990) analisaram o comportamento dinâmico de uma placa de Kichhoff submetida a uma carga simples.

Através de uma formulação baseada na análise modal e na técnica dos grafos de ligação, Da Silva e Bessa(1999), analisaram a interação entre uma placa de Kichhoff e um carregamento oriundo de um subsistema mecânico em movimento. Apesar de sua grande eficiência esta metodologia está condicionada ao conhecimento das autofunções do modelo estrutural.

Aliando as vantagens do método dos elementos finitos à versatilidade e da técnica dos grafos de ligação, Da Silva(1994) apresentou um procedimento para a representação de uma estrutura que esteja acoplada a subsistemas de natureza física distinta.

Utilizando este procedimento, Bessa(2000) investigou o comportamento dinâmico de vigas e placas com condições de contorno arbitrárias e submetidas a subsistemas mecânicos em movimento com diferentes níveis de complexidade.

Neste trabalho analisa-se a interação de uma placa de Kichhoff com um carregamento oriundo de um subsistema mecânico que possua uma dinâmica própria. Apresenta-se, ainda, um modelo específico para a análise da interação veículo-estrutura.

2. MODELAGEM DO SISTEMA

2.1. Placa submetida a um oscilador móvel

A abordagem do problema de cargas móveis em placas, através de uma metodologia clássica, pode representar um grande desafio, quando o carregamento móvel é proveniente de um subsistema mecânico, como por exemplo, no modelo físico ilustrado na Figura 1(a).

A técnica dos grafos de ligação supera esta dificuldade, pois permite que um sistema complexo, seja dividido em subsistemas mais simples, e que podem ser posteriormente acoplados, para a obtenção do modelo matemático representativo do sistema global. O grafo de ligação proposto para a representação deste sistema é apresentado na Figura 1(b).

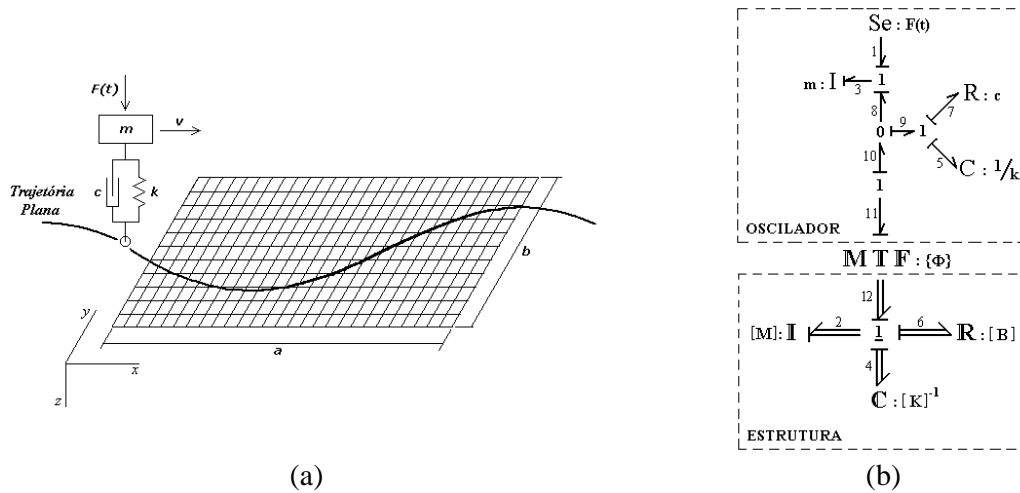


Figura 1. (a) Modelo físico do sistema e (b) Grafo de ligação do sistema

A parte deste grafo correspondente a estrutura baseia-se no modelo proposto por Da Silva(1994), e aplica-se a qualquer estrutura que possa ser representada em termos de suas matrizes de massa $[M]$, de flexibilidade $[K]^{-1}$ e de amortecimento $[B]$, representadas na Figura 1(b) pelos campos multiportas \mathbf{I} , \mathbf{C} e \mathbf{R} respectivamente. Para o oscilador foi construído um grafo no qual estivessem incluídos seus efeitos inerciais (m), capacitivos ($1/k$) e resistivos (c), característicos de um sistema massa-mola-amortecedor .

Pelo fato do oscilador estar em movimento, seu ponto de contato com a estrutura varia a cada instante de tempo. Deste modo, como o carregamento não limita-se apenas aos nós, torna-se necessária sua representação no interior do elemento de placa.

Na técnica dos grafos de ligação esta função é desempenhada por um multitransformador modulado ($\mathbf{M T F}$), cujo módulo é definido através das funções de interpolação, calculadas no ponto de contato do oscilador com a viga.

As matrizes elementares do modelo estrutural foram definidas, através de uma formulação consistente, para um elemento de dezesseis graus de liberdade (quatro graus de liberdade por nó – w , $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ e $\partial^2 w/\partial x \partial y$). As funções de interpolação para este elemento são obtidas a partir do produto das funções de Hermite unidimensionais nas direções x e y .

Para a construção das matrizes globais $[M]$, $[K]$ e $[B]$, que são utilizadas por este procedimento para a representação da estrutura, deve-se compatibilizar os esforços e deslocamentos nos graus de liberdade do modelo, impondo condições de continuidade e equilíbrio às variáveis primárias e secundárias.

Assim, o modelo de estado obtido a partir do grafo da Figura 2, escrito em função das variáveis de estado de entrada do sistema, é apresentado na Equação 1.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{p}}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_4 \\ \dot{\mathbf{q}}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -([B] + \{\Phi\}^c \{\Phi\}^T) [M]^{-1} & \{\Phi\}^c / m & -[K] & -\{\Phi\}^k \\ c \{\Phi\}^T [M]^{-1} & -c/m & 0 & k \\ [M]^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \{\Phi\}^T [M]^{-1} & -1/m & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{q}_4 \\ \mathbf{q}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [e_1] \quad (1)$$

onde \mathbf{p}_2 e \mathbf{q}_4 são os vetores com as quantidades de movimento e com os deslocamentos associados a cada grau de liberdade do modelo estrutural, \mathbf{p}_3 , \mathbf{q}_5 e e_1 representam a quantidade de movimento, o deslocamento e o peso relativo a massa do oscilador.

Deve-se ressaltar que o módulo do multitransformador $\{\Phi\}$, é um vetor cujo número de coeficientes depende do número de graus de liberdade do modelo estrutural. Porém, apenas dezesseis destes coeficientes, correspondentes aos graus de liberdade do elemento de placa no qual a carga esteja atuando, assumem valor diferente de zero. Assim, existe um sub-vetor 16×1 , que a medida que a carga se move para o próximo elemento, ele se desloca para os graus de liberdade representativos deste elemento.

Os valores dos termos deste sub-vetor podem ser calculados a partir das funções de interpolação do elemento. Como a carga está em movimento sua posição \bar{x} pode ser substituída por:

$$\bar{x} = \mathbf{v} \cdot (t - t_e) \quad (2)$$

onde \mathbf{v} é a velocidade do oscilador e t_e é o instante em que o oscilador entra no elemento.

2.2. Aplicativo: interação carro – ponte

A técnica dos grafos de ligação tem se mostrado eficaz na solução de sistemas que envolvam solicitações dinâmicas, inclusive quando há interação entre subsistemas com elevado grau de complexidade. Assim, esta técnica torna-se perfeitamente aplicável à modelagem da interação entre um veículo e uma ponte, como apresentado na Figura 2.

O modelo físico proposto para representar este sistema consiste de um veículo, modelado com sete graus de liberdade, que trafega sobre uma ponte (placa apoiada por dois lados opostos), discretizada pelo método dos elementos finitos e representada pela técnica dos grafos de ligação.

Devido a modularidade da técnica de modelagem utilizada, o modelo dinâmico global pode ser obtido através do acoplamento dos grafos desenvolvidos, isoladamente, para cada subsistema. Deste modo, o grafo multiligação representativo do sistema completo é apresentado na Figura 2(c).

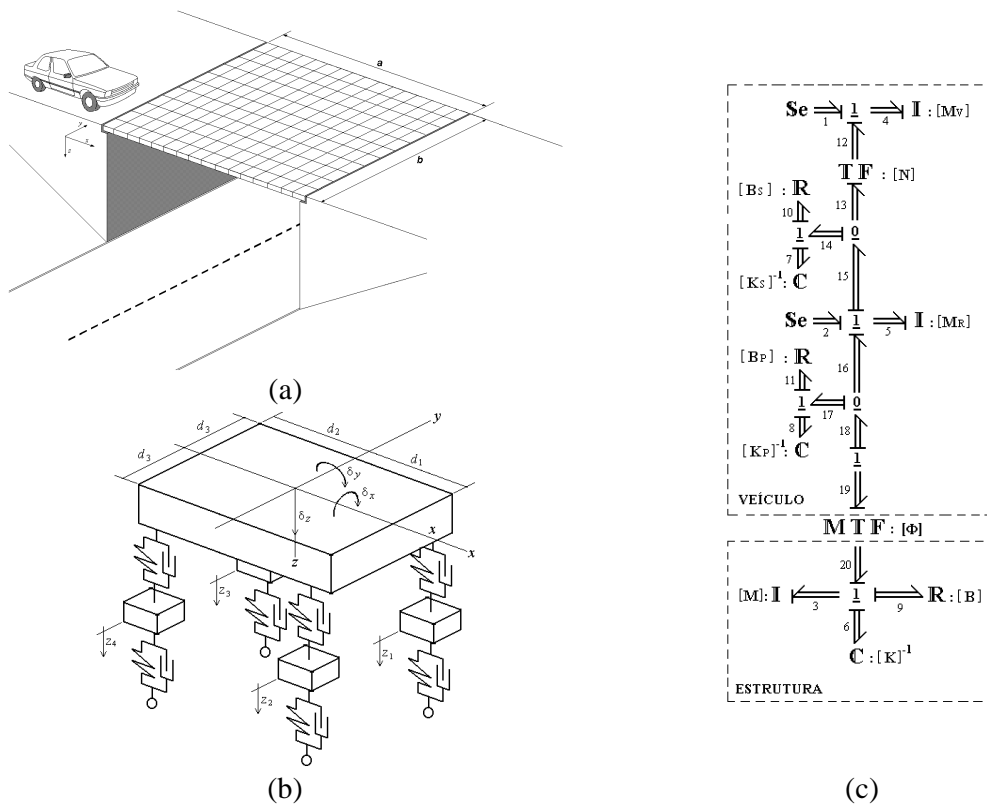


Figura 2. (a) Subsistema estrutural; (b) Veículo e (c) Grafo multiligação do sistema

A partir deste grafo, pode-se determinar as equações de estado do modelo, aqui escritas na sua forma matricial, em função das variáveis de estado (X) e do vetor de entradas (U).

$$\dot{X} = AX + BU \quad (3)$$

$$Y = CX + DU \quad (4)$$

Neste caso, os vetores X , U e Y , e as matrizes A , B , C e D , presentes no modelo de estado, podem ser expressos por:

$$\begin{aligned}
X &= [\mathbf{p}_3 \quad \mathbf{p}_4 \quad \mathbf{p}_5 \quad \mathbf{q}_6 \quad \mathbf{q}_7 \quad \mathbf{q}_8]^T \\
U &= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]^T \\
Y &= [\mathbf{f}_4] \\
A &= \begin{bmatrix} -([\mathbf{B}] + [\Phi][\mathbf{B}_p][\Phi]^T)[\mathbf{M}]^{-1} & 0 & [\Phi][\mathbf{B}_p][\mathbf{M}_R]^{-1} & -[\mathbf{K}] & 0 & -[\Phi][\mathbf{K}_p] \\ 0 & -[\mathbf{N}][\mathbf{B}_s][\mathbf{N}]^T[\mathbf{M}_v]^{-1} & [\mathbf{N}][\mathbf{B}_s][\mathbf{M}_R]^{-1} & 0 & [\mathbf{N}][\mathbf{K}_s] & 0 \\ [\mathbf{B}_p][\Phi]^T[\mathbf{M}]^{-1} & [\mathbf{B}_s][\mathbf{N}]^T[\mathbf{M}_v]^{-1} & -([\mathbf{B}_p] + [\mathbf{B}_s])[\mathbf{M}_R]^{-1} & 0 & -[\mathbf{K}_s] & [\mathbf{K}_p] \\ [\mathbf{M}]^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -[\mathbf{N}]^T[\mathbf{M}_v]^{-1} & [\mathbf{M}_R]^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ [\Phi]^T[\mathbf{M}]^{-1} & 0 & -[\mathbf{M}_R]^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} 0 & [\mathbf{I}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{I}] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\
C &= \begin{bmatrix} 0 & [\mathbf{M}_v]^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
D &= [0]
\end{aligned}$$

onde $[\mathbf{N}]$ e $[\Phi]$ são os módulos dos transformadores, expressos por:

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ d_3 & -d_3 & d_3 & -d_3 \\ d_1 & d_1 & -d_2 & -d_2 \end{bmatrix}; \quad [\Phi] = \{ \{\Phi\}_1 \quad \{\Phi\}_2 \quad \{\Phi\}_3 \quad \{\Phi\}_4 \}$$

Os elementos $\{\Phi\}_n$ da matriz $[\Phi]$, são os vetores responsáveis pela representação de cada roda do veículo, nos pontos de contato situados no interior do elemento de placa.

Destaca-se, que para modelar o veículo, foram adotadas algumas propriedades características da área de dinâmica veicular. A matriz $[\mathbf{M}_v]$, por exemplo, contém as inércias referentes ao deslocamento vertical (m) e aos deslocamentos angulares (I_x e I_y) do veículo, ao passo que a matriz $[\mathbf{M}_R]$, representa a massa de cada roda.

$$[\mathbf{M}_v] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{M}_R] = \begin{bmatrix} M_R^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_R^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_R^4 \end{bmatrix}$$

As propriedades de rigidez e amortecimento da suspensão e do pneu, foram incorporadas ao modelo, através das matrizes:

$$[\mathbf{K}_s] = \begin{bmatrix} K_s^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_s^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_s^4 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{B}_s] = \begin{bmatrix} B_s^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_s^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_s^4 \end{bmatrix}; \\
[\mathbf{K}_p] = \begin{bmatrix} K_p^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_p^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_p^4 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{B}_p] = \begin{bmatrix} B_p^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_p^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_p^4 \end{bmatrix}$$

3. RESULTADOS OBTIDOS

3.1. Placa submetida a um oscilador móvel

Utilizando um código computacional, desenvolvido em FORTRAN 90, simulou-se o comportamento dinâmico da estrutura para diferentes velocidades do carregamento.

Nesta simulação, considerou-se uma placa de dimensões: $a=b=1\text{m}$ e $h=0,001\text{m}$, discretizada por uma malha com dezesseis elementos. Para o oscilador, a massa (m) e a rigidez (k) foram escolhidas, de modo que se obtivesse uma razão $m/M_p = 0,125$ (m/M_p – massa do oscilador dividido pela massa da placa) e uma frequência natural (ω) de $38,73\text{ rad/s}$, enquanto sua trajetória foi definida ao longo de uma linha reta, paralela ao lado a da placa, e que passava pelo centro desta estrutura.

Apresenta-se na Figura 3, o deslocamento transversal do nó central da placa, para diferentes parâmetros adimensionais de velocidade (T/τ). O símbolo T representa o período fundamental da estrutura, enquanto τ significa o tempo necessário para o oscilador atravessar a superfície da placa.. Destaca-se que os deslocamentos a partir de $x/a > 1$ correspondem à vibração livre da estrutura, pois neste instante o oscilador perde o contato com a estrutura.

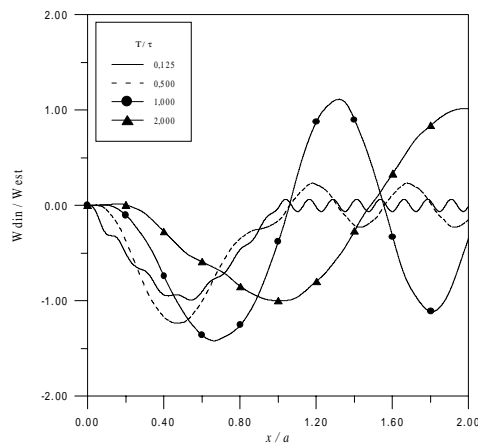


Figura 3. Deslocamento vertical do centro da placa em função da posição do oscilador

Observando a Figura 3, pode-se constatar a presença de uma velocidade crítica, para a qual o deslocamento dinâmico apresenta um valor máximo.

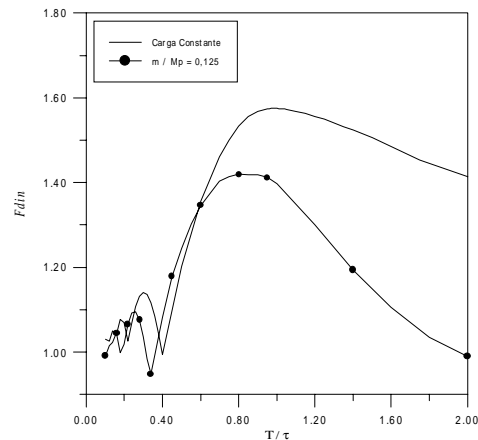


Figura 4. Fator dinâmico de amplificação para diferentes velocidades do carregamento

A Figura 4 mostra a variação do fator dinâmico de amplificação (F_{din}), definido como sendo a razão do máximo deslocamento dinâmico pelo máximo deslocamento estático ($W_{est} = 0,0116Fa^2/D_E$, onde D_E é a rigidez flexional de uma placa isotrópica), em função da velocidade desenvolvida pelo carregamento. Verifica-se que para uma carga constante, o deslocamento dinâmico transversal do centro da placa pode chegar a ser 57,5% vezes maior que deslocamento estático máximo ($F_{din} = 1,575$) quando o tempo necessário para a carga atravessar a placa for igual ao seu período fundamental ($T/\tau = 1,0$). Observa-se também que, para um subsistema mecânico, sua inércia gera um desvio na curva do Fator Dinâmico de Amplificação. É interessante notar que, para uma velocidade pré-determinada, este desvio causa uma diferença no comportamento da estrutura. Considerando, por exemplo, a região acima da velocidade crítica, verifica-se as maiores amplitudes de deslocamento ocorrem para o modelo com a carga constante, enquanto que em grande parte da região abaixo da velocidade crítica, as maiores amplitudes acontecem para o modelo com o oscilador.

3.2. Aplicativo: interação carro – ponte

Procurando simular o comportamento dinâmico deste sistema, considerou-se um veículo trafegando com uma velocidade constante de 20 m/s, sobre uma ponte, representada por uma placa apoiada por dois lados opostos.

A Figura 5, mostra o deslocamento vertical no tempo, do ponto central da ponte.

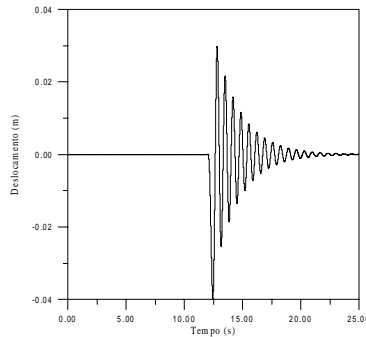


Figura 5. Deslocamento vertical da ponte em $x = a/2$ e $y = b/2$

Para o veículo, apresenta-se, na Figura 6 as velocidades relacionadas ao movimento vertical (Bounce) e as velocidades relacionadas aos movimentos angulares em y e x , (Pitch e Roll, respectivamente).

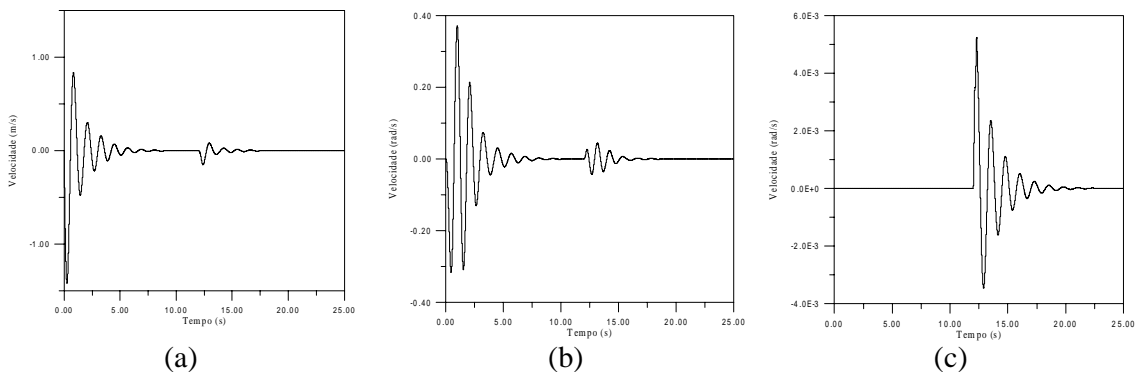


Figura 6. Velocidades relacionadas ao : (a) Bounce $\dot{\delta}_z$, (b) Pitch $\dot{\delta}_y$ e (c) Roll $\dot{\delta}_x$

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma análise do comportamento dinâmico de uma placa submetida a um carregamento móvel foi apresentada. Verificou-se, através dos resultados obtidos, que o comportamento do sistema está diretamente relacionado com a velocidade desenvolvida pelo carregamento, identificando, inclusive, a presença de uma velocidade crítica, para a qual o subsistema estrutural apresenta suas maiores amplitudes de deslocamento.

Observou-se que o deslocamento dinâmico transversal de uma placa simplesmente apoiada, sujeita a uma carga simples, deslocando-se com uma velocidade constante, em uma trajetória paralela a um de seus lados, pode chegar a ser 1,575 vezes maior que deslocamento estático máximo, quando o tempo necessário para a carga atravessar a placa for igual ao seu período fundamental ($T/\tau = 1,0$). Considerando que o carregamento atuante tenha sido proveniente de um subsistema massa-mola-amortecedor, investigou-se a influência que a massa do subsistema exerce sobre a resposta da estrutura.

Ressalta-se, através do modelo proposto para representar a interação veículo-estrutura, as vantagens de se utilizar um procedimento generalizado e modular na representação de um sistema de maior complexidade.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adler, A.A. and Reismann, H., 1974, “Moving Loads on a Elastic Plate Strip”, Transactions of the ASME, 1974, vol. 41, p. 713 – 718.
- Bessa, W.M., 2000, “Abordagem do Problema de Cargas Móveis Através de uma Técnica Multidisciplinar de Modelagem”, Tese de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, R.J., Brasil.
- Chan, T.H.T. et al., 1999, “An Interpretative Method for Moving Force Identification”, Journal of Sound and Vibration, vol. 219, N° 3, p. 503 – 524.
- Da Silva, F.R. , 1994, “Procedimentos para a Análise Estrutural Dinâmica Através da Técnica Generalizada dos Grafos de Ligação”, Tese de Doutorado, COPPE, Rio de Janeiro.
- Da Silva, F.R. e Bessa, W.M., 1999, “Cargas Móveis Sobre Placas: Uma Formulação Através da Análise Modal”, XV COBEM, Águas de Lindóia.
- Henchi, K. et al., 1997, “Dynamic Behaviour of Multi-Span Beams Under Moving Loads”, Journal of Sound and Vibration, vol. 199, N° 1, p. 33 – 50.
- Jahanshahi, A. and Monzel, F.J., 1965, “Effects of Rotatory Inertia and Transverse Shear on the Response of Elastic Plates to Moving Loads”, Ingenieur-Archiv, vol. 34, N° 6, p. 401 – 410.
- Kwon, H.-C., Kim, M.-C. and Lee, I.-W., 1998, “Vibration Control of Bridges Under Moving Loads”, Computers & Structures, vol. 66, N° 4, p. 473 – 480.
- Taheri, M.R. & Ting, E.C., 1990, “Dynamic Response of Plates to Moving Loads: Finite Element Method”, Computers & Structures, vol. 34, N° 3, p. 509 – 521.
- Wang, R.-T. & Lin, J.-S., 1998, “Vibration of Multi-Span Timoshenko Frames due to Moving Loads”, Journal of Sound and Vibration, vol. 212, N° 3, p. 417 – 434.
- Wang, R.-T. & Chou, T.-H., 1998, “Non-Linear Vibration of Timoshenko Beam due to a Moving Force and the Weight of Beam”, Journal of Sound and Vibration, vol. 218, N° 1, p. 117 – 131.
- Wu, J.-S. and Shih, P.-Y., 1998, “Moving-Load-Induced Vibrations of a Moored Floating Bridge”, Computers & Structures, vol. 66, N° 4, p. 435 – 461.