

DINÂMICA DE SISTEMAS CONSTITUÍDOS POR VIGAS SUJEITAS A CARGAS MÓVEIS ORIUNDAS DE SUBSISTEMAS MECÂNICOS

Wallace M. Bessa

Instituto Militar de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica e Materiais
Praça General Tibúrcio, 80, Praia Vermelha – 22290-270 – Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Fernando R. da Silva

Universidade Católica de Petrópolis, Escola de Engenharia
Rua Barão do Amazonas, 124, Centro – 25685-070 – Petrópolis, RJ, Brasil

Resumo

Apresenta-se um estudo da interação entre uma estrutura, representada por uma viga, e um carregamento oriundo de um subsistema mecânico em movimento. O efeito de parâmetros importantes do subsistema, como por exemplo, sua velocidade e suas características mecânicas, são levados em consideração na análise da resposta da estrutura. Utiliza-se o método dos elementos finitos e a técnica dos grafos de ligação na modelagem do sistema. O modelo matemático obtido na forma de equações de estado permite uma análise física do sistema global, isto é, uma análise do comportamento dinâmico da estrutura e do subsistema mecânico, interagindo entre si. São apresentados resultados de simulação para a validação do procedimento, com o intuito de destacar a importância de um modelo que considere o comportamento global do sistema.

Palavras-chave: Dinâmica, Vibrações, Cargas Móveis, Elementos Finitos, Grafos de Ligação

1. INTRODUÇÃO

O comportamento dinâmico de uma estrutura submetida a um carregamento móvel vem sendo investigado desde a construção das primeiras pontes para estradas de ferro no começo do século XIX. O interesse por essa classe de problemas surgiu quando se observou que, em uma determinada estrutura, o deslocamento dinâmico proporcionado por um carregamento móvel era maior do que o deslocamento estático máximo.

Diferentes aspectos do problema em questão foram investigados ao longo das últimas décadas. Biggs(1964), Timoshenko(1965) e Warburton(1976) apresentaram soluções analíticas para a equação diferencial de governo de uma viga Bernoulli-Euler submetida a uma carga móvel simples e constante. Considerando o efeito do cisalhamento e da inércia rotatória e desconsiderando o regime transiente do modelo estrutural, Achembach e Sun(1965) analisaram o comportamento de uma viga de Timoshenko infinita apoiada em uma fundação elástica, quando atravessada por uma carga móvel.

Utilizando o método dos elementos finitos para discretizar a estrutura, Lin e Trethewey(1990) analisaram o comportamento dinâmico de uma viga Bernoulli-Euler interagindo com sistemas mecânicos de um e dois graus liberdade, e Thambiratnam e Zhuge(1996) investigaram o caso de uma viga apoiada em uma fundação elástica e submetida a uma carga simples.

Em trabalhos mais recentes, Henchi *et al.*(1997), Wu & Shih(1998), Kwon *et al.*(1998), Wang & Lin(1998), Wang & Chou(1998) e Chant *et al.*(1999), propuseram-se a investigar o

problema de cargas móveis em estruturas. Apesar da crescente complexidade que vem sendo atribuída ao modelo estrutural, o carregamento continua sendo tratado como uma carga simples e constante. Em alguns casos, como por exemplo na análise de veículos pesados trafegando sobre pontes e viadutos, esta simplificação não é apropriada, pois necessita-se de um subsistema que represente a dinâmica veicular.

Aliando as vantagens do método dos elementos finitos à versatilidade da técnica dos grafos de ligação, Da Silva(1994) apresentou um procedimento para a representação de uma estrutura que esteja acoplada a subsistemas de naturezas físicas distintas.

Utilizando este procedimento, Bessa(2000) investigou o comportamento dinâmico de vigas e placas com condições de contorno arbitrárias e submetidas a subsistemas mecânicos em movimento com diferentes níveis de complexidade.

Neste trabalho analisa-se a interação de uma viga com um carregamento oriundo de um subsistema mecânico que possua uma dinâmica própria. Apresenta-se, ainda, um modelo específico para a análise do comportamento de um trem interagindo com uma ferrovia.

2. MODELAGEM DO SISTEMA

2.1. Viga submetida a um oscilador móvel

A abordagem do problema de cargas móveis em vigas, através de uma metodologia clássica, pode representar um grande desafio quando o carregamento móvel é proveniente de um subsistema mecânico, como por exemplo, no modelo físico ilustrado na Figura 1(a).

A técnica dos grafos de ligação tem se mostrado como a alternativa mais apropriada, quando se necessita analisar um sistema composto por subsistemas de natureza distinta. Devido a sua característica modular, esta técnica permite que o modelo representativo de cada subsistema seja desenvolvido separadamente, e mediante o acoplamento destes modelos, torna-se possível a avaliação do comportamento global do sistema dinâmico. O grafo de ligação proposto para a representação deste sistema é apresentado na Figura 1(b).

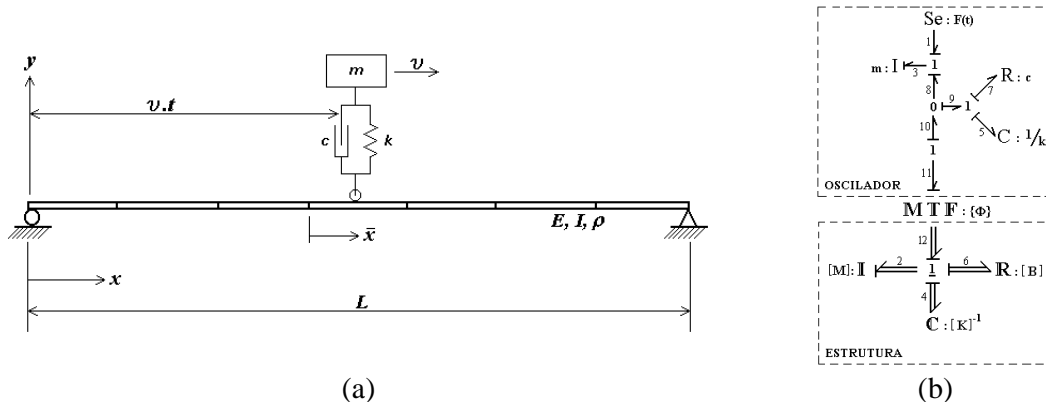


Figura 1. (a) Modelo físico do sistema e (b) Grafo de ligação do sistema

A parte deste grafo correspondente a estrutura baseia-se no modelo proposto por Da Silva(1994), e aplica-se a qualquer estrutura que possa ser representada em termos de suas matrizes de massa $[M]$, de flexibilidade $[K]^{-1}$ e de amortecimento $[B]$, representadas na Figura 1(b) pelos campos multiportas \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{R} respectivamente. Para o oscilador foi construído um grafo no qual estivessem incluídos seus efeitos inerciais (m), capacitivos ($1/k$) e resistivos (c), característicos de um sistema massa-mola-amortecedor .

Pelo fato do oscilador estar em movimento, seu ponto de contato com a estrutura varia a cada instante de tempo. Deste modo, como o carregamento não limita-se apenas aos nós, torna-se necessária sua representação no interior do elemento de viga.

Na técnica dos grafos de ligação esta função é desempenhada por um multitransformador modulado (**M T F**), cujo módulo é definido através das funções de interpolação, calculadas no ponto de contato do oscilador com a viga.

Para um elemento de viga Bernoulli-Euler, utiliza-se as funções de interpolação cúbica de Hermite (Reddy, 1993), apresentadas a seguir em função das coordenadas locais do elemento.

$$\begin{aligned}\phi_1^e &= 1 - 3\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^3, & \phi_2^e &= -\bar{x}\left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2, \\ \phi_3^e &= 3\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^3, & \phi_4^e &= -\bar{x}\left[\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 - \left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)\right]\end{aligned}\quad (1)$$

onde h_e é o comprimento do elemento de viga.

Deste modo, definidas as funções de interpolação, determina-se os coeficientes das matrizes elementares de massa (M_{ij}^v) e rigidez (K_{ij}^v).

$$K_{ij}^v = EI \int_{x_e}^{x_{e+1}} (d^2\phi_i^e/dx^2)(d^2\phi_j^e/dx^2) dx \quad (2)$$

$$M_{ij}^v = \rho A \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e \phi_j^e dx \quad (3)$$

onde E , I , ρ e A são, respectivamente, o módulo de elasticidade, o momento de inércia, a massa específica e a área da seção reta da viga.

A matriz de amortecimento do modelo estrutural pode ser obtida através de uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, conhecida como amortecimento proporcional.

$$B_{ij}^v = \alpha \cdot M_{ij}^v + \beta \cdot K_{ij}^v \quad (4)$$

Estas matrizes foram definidas, através de uma formulação consistente, para um elemento isolado da malha. Para a construção das matrizes globais $[M]$, $[K]$ e $[B]$, que são utilizadas por este procedimento para a representação da estrutura, deve-se compatibilizar os deslocamentos nos graus de liberdade do modelo, impondo condições de continuidade e equilíbrio às variáveis primárias e secundárias.

Assim, o modelo de estado obtido a partir do grafo da Figura 1(b), escrito em função das variáveis de estado de entrada do sistema, é apresentado na Equação 5.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{p}}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_4 \\ \dot{\mathbf{q}}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -([B] + \{\Phi\}c\{\Phi\}^T)[M]^{-1} & \{\Phi\} \frac{c}{m} & -[K] & -\{\Phi\}k \\ c\{\Phi\}^T[M]^{-1} & -\frac{c}{m} & 0 & k \\ [M]^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \{\Phi\}^T[M]^{-1} & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{q}_4 \\ \mathbf{q}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [e_1] \quad (5)$$

onde \mathbf{p}_2 e \mathbf{q}_4 são os vetores com as quantidades de movimento e com os deslocamentos associados a cada grau de liberdade do modelo estrutural, \mathbf{p}_3 , \mathbf{q}_5 e e_1 representam a quantidade de movimento, o deslocamento e o peso relativo a massa do oscilador.

Deve-se ressaltar que o módulo do multitransformador $\{\Phi\}$, é um vetor cujo número de coeficientes depende do número de graus de liberdade do modelo estrutural. Porém, apenas quatro destes coeficientes, correspondentes aos graus de liberdade do elemento de viga no qual a carga esteja atuando, assumem valor diferente de zero. Assim, existe um sub-vetor 4×1 , que a medida que a carga se move para o próximo elemento, ele se desloca para os graus de liberdade representativos deste elemento.

Os valores dos termos deste sub-vetor podem ser calculados a partir das funções de interpolação do elemento. Como a carga está em movimento sua posição \bar{x} pode ser substituída por:

$$\bar{x} = \mathbf{v} \cdot (t - t_e) \quad (6)$$

onde \mathbf{v} é a velocidade do oscilador e t_e é o instante em que o oscilador entra no elemento.

2.2. Aplicativo: interação trem – ferrovia

A dinâmica da interação entre trens e ferrovias possui uma série de questões que ainda não foram resolvidas. Um dos principais problemas encontrados, consiste na deterioração dos trilhos, devido a passagem de vagões de trens. Portanto, a melhor compreensão do comportamento dinâmico deste sistema (ver Figura 2), pode significar uma redução nos custos de manutenção de uma ferrovia.

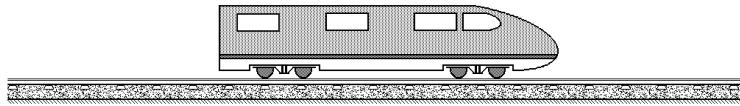


Figura 2. Modelo Real

Para representar corretamente este sistema dinâmico, é de extrema importância que seja considerada a influência do terreno, no qual os trilhos estejam apoiados. O modelo físico proposto, consiste em um sistema massa-mola-amortecedor, deslocando-se com uma velocidade constante, sobre uma viga simplesmente apoiada em uma fundação elástica.

Como pode ser observado na Figura 3, a fundação elástica, utilizada para representar o terreno, foi modelada como sendo uma série de molas (k_f) e amortecedores (c_f) linearmente distribuídos ao longo de todo o comprimento da viga.

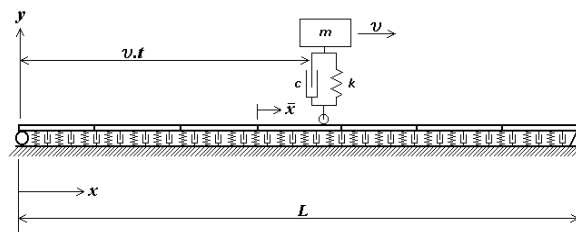


Figura 3. Modelo físico

Deste modo, as matrizes características deste modelo estrutural, podem ser obtidas através da simples adição das matrizes do elemento de viga Bernoulli-Euler (K_{ij}^v e B_{ij}^v), com as matrizes relativas à fundação elástica (K_{ij}^f e B_{ij}^f).

$$K_{ij}^f = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e k_f \phi_j^e dx \quad (7)$$

$$B_{ij}^f = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e c_f \phi_j^e dx \quad (8)$$

Destaca-se que, como não existe nenhum efeito inercial associado à fundação elástica, a matriz elementar de massa permanece idêntica à matriz de massa do elemento de viga Bernoulli-Euler.

Devido a característica generalizada da técnica dos grafos de ligação, e a versatilidade do método dos elementos finitos, pode-se representar este sistema, utilizando o mesmo grafo de ligação desenvolvido para o modelo físico da Figura 1(a).

3. RESULTADOS OBTIDOS

3.1. Viga submetida a um oscilador móvel

Utilizando um código computacional, desenvolvido em FORTRAN 90, simulou-se o comportamento dinâmico da estrutura para diferentes velocidades do carregamento, e comparou-se os resultados obtidos com resultados provenientes da literatura.

As propriedades de cada subsistema, utilizadas para a comparação dos resultados, foram: (1) Viga de 1,938 m modelada com doze elementos e engastada nas suas duas extremidades; seção reta com 0,0342 m de largura por 0,1491 m de altura; $\rho = 2,9602 \times 10^3$ kg/m³; $E = 104,79$ GPa e (2) Oscilador; $m = 9,0641$ kg; $k = 8,3459 \times 10^6$ N/m; $c = 173,9517$ N.s/m.

A Tabela 1 apresenta o fator dinâmico de amplificação (F_{din}), definido como sendo a razão do máximo deslocamento dinâmico pelo máximo deslocamento estático ($W_{est} = FL^3/192EI$), para diferentes parâmetros adimensionais de velocidade (T/τ). O símbolo T representa o período fundamental da estrutura, enquanto τ é tempo necessário para o oscilador percorrer todo o vão da viga.

Tabela 1. Fator dinâmico de amplificação (F_{din})

T/τ	Este trabalho	Lin e Trethewey(1990)
0,1	1,017	1,028
0,5	1,245	1,206
1,0	1,548	1,533
1,5	1,459	1,460
2,0	1,281	1,307

Verifica-se que a máxima discrepância entre os fatores dinâmicos de amplificação obtidos por este trabalho e pelos obtidos na referência está em torno de 3%. Ressalta-se que os resultados apresentados Lin e Trethewey(1990) foram obtidos a partir de um modelo em elementos finitos, cuja malha era composta por apenas quatro elementos de viga, e as equações relativas aos graus de liberdade de rotação ($\partial w/\partial x$) foram resolvidas estaticamente para reduzir o tempo de processamento.

O deslocamento transversal do nó central da viga em função da posição do carregamento, é apresentado na Figura 4, para cada parâmetro adimensional de velocidade da Tabela 1. Destaca-se que o oscilador só está em contato com a viga no intervalo $0 \leq x/L \leq 1$, portanto os deslocamentos para $x/L > 1$ correspondem à vibração livre da estrutura.

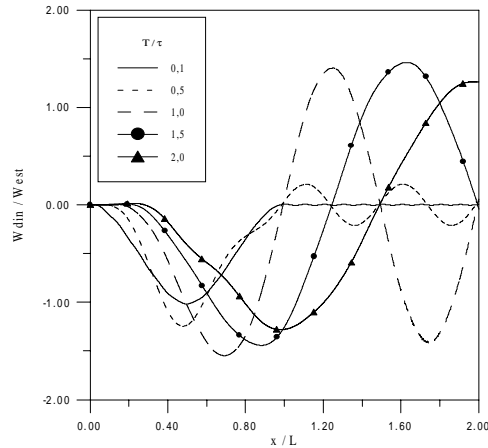


Figura 4. Deslocamento vertical do centro da viga em função da posição do oscilador

Observando a Tabela 1 e a Figura 4, pode-se constatar a presença de uma velocidade crítica, para a qual o deslocamento dinâmico apresenta um valor máximo. Este deslocamento dinâmico máximo foi identificado (Bessa, 2000), para o caso de uma carga móvel simples, como sendo 73,5% maior que o deslocamento estático máximo ($F_{din} = 1,735$), e ocorria quando o tempo necessário para a carga percorrer todo o vão da viga era 0,81 vezes o período fundamental ($T / \tau = 1,234$). Para o caso de uma viga submetida a um oscilador, a velocidade crítica do sistema depende da razão entre a massa do oscilador e a massa da viga (m/M_v).

Apresenta-se a seguir o deslocamento dinâmico de uma viga para dois diferentes parâmetros de massa. Pela Figura 5(a), verifica-se que para um carregamento com velocidade abaixo da velocidade crítica (velocidade subcrítica), as maiores amplitudes de deslocamento ocorrem para os valores mais elevados de m/M_v . No entanto, para velocidades supercríticas, como mostra a Figura 5(b), observa-se exatamente o inverso, as maiores amplitudes de deslocamento ocorrem para os menores valores de m/M_v .

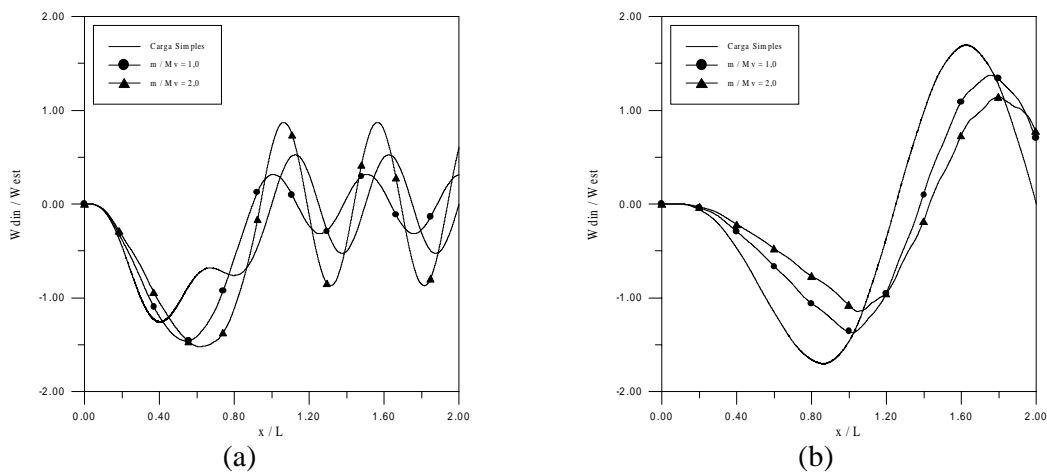


Figura 5. Deslocamento vertical do centro da para: (a) $T/\tau = 0,5$ e (b) $T/\tau = 1,5$

Destaca-se que os gráficos relativos a uma carga simples foram incluídos na Figura 5 apenas para demonstrar que esta simplificação nem sempre representa adequadamente a realidade, e deve ser adotada somente quando a massa do subsistema representar uma pequena fração da massa da estrutura.

3.2. Aplicativo: interação trem – ferrovia

Para apresentar alguns resultados de simulação, que ilustrem o comportamento do trilho e do vagão interagindo entre si, considerou-se um sistema com as seguintes propriedades: (1) Trilho de aço de 500 m, com uma seção reta de 10 cm de largura por 10 cm de altura e $\xi_1 = \xi_2 = 5\%$; (2) Fundação elástica com rigidez $k_f = 4 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ e amortecimento $c_f = 1,5 \times 10^4 \text{ N.s/m}^2$; (3) Vagão com $m = 40.000 \text{ kg}$, $k = 6 \times 10^7 \text{ N/m}$ e $c = 4 \times 10^5 \text{ N.s/m}$.

A Figura 6 mostra o deslocamento dinâmico do trilho modelado com 20 elementos, submetido a um vagão com velocidade constante de 50 m/s.

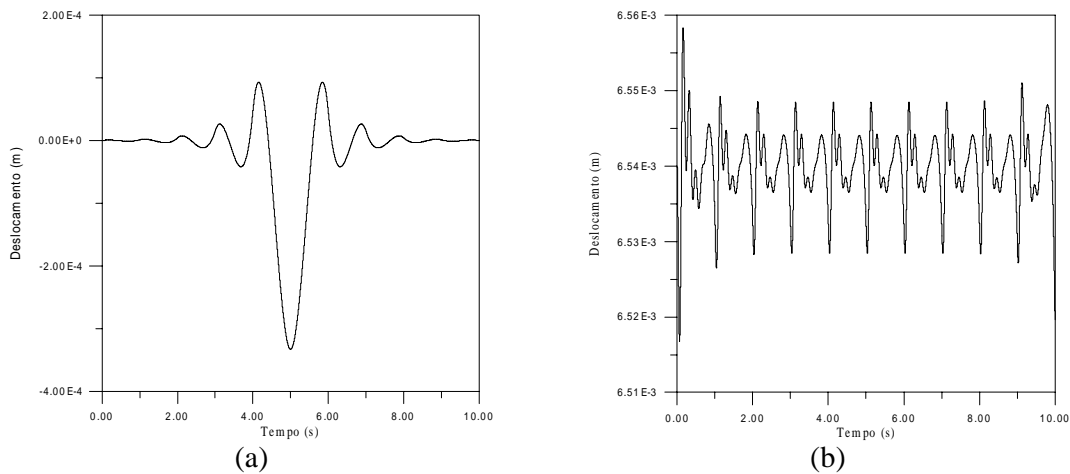


Figura 6. Deslocamento vertical: (a) do trilho em $x = L/2$ e (b) do vagão

Ressalta-se que outros resultados, podem facilmente ser obtidos através do código computacional desenvolvido. Para o veículo, por exemplo, pode-se avaliar a variação dos esforços, das acelerações, das velocidades e dos deslocamentos, relativos a cada um de seus componentes (mola, amortecedor e inércia).

Para a estrutura, além dos deslocamentos associados a cada grau de liberdade, poderia se explorar os esforços, as deformações e as tensões atuantes.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma análise do comportamento dinâmico de uma viga submetida a um carregamento móvel foi apresentada. Verificou-se, através dos resultados obtidos, que o comportamento do sistema está diretamente relacionado com a velocidade desenvolvida pelo carregamento.

Investigou-se a influência que a massa do subsistema exerce sobre a resposta da estrutura. Deste modo, foi constatado que para velocidades subcríticas, o aumento da massa do oscilador proporciona uma maior amplitude no deslocamento dinâmico da viga, ao passo que para velocidades supercríticas, ocorre justamente o contrário.

Verificou-se, também, que o carregamento só deve ser aproximado por uma carga simples, quando a massa do subsistema for desprezível, se comparada com a massa da estrutura. Portanto, para a análise da interação entre estruturas e veículos pesados, a dinâmica veicular precisa ser considerada.

É importante lembrar que os resultados aqui discutidos, limitaram-se a considerar uma um carregamento com velocidade constante . Porém, nada impede que o oscilador assuma um movimento do tipo uniformemente variado.

Embora tenha-se analisado apenas vigas biapoiadas ou com engastes em ambas as extremidades, devido a versatilidade do método dos elementos finitos, este procedimento permite que vigas com as mais diversas condições de contorno, apresentando inclusive, apoios intermediários, possam ser analisadas.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Achenbach, J.D. and Sun, C.T., 1965, “Moving Load on a Flexibly Supported Timoshenko Beam”, *International Journal of Solids Structures*, vol. 1, p. 353 – 370.
- Bessa, W.M., 2000, “Abordagem do Problema de Cargas Móveis Através de uma Técnica Multidisciplinar de Modelagem”, Tese de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, R.J., Brasil.
- Biggs, J.M., 1964, “Introduction to Structural Dynamics”, McGraw Hill, New York.
- Chan, T.H.T. et al., 1999, “An Interpretative Method for Moving Force Identification”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 219, N° 3, p. 503 – 524.
- Da Silva, F.R. , 1994, “Procedimentos para a Análise Estrutural Dinâmica Através da Técnica Generalizada dos Grafos de Ligação”, Tese de Doutorado, COPPE, Rio de Janeiro.
- Henchi, K. et al., 1997, “Dynamic Behaviour of Multi-Span Beams Under Moving Loads”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 199, N° 1, p. 33 – 50.
- Kwon, H.-C., Kim, M.-C. and Lee, I.-W., 1998, “Vibration Control of Bridges Under Moving Loads”, *Computers & Structures*, vol. 66, N° 4, p. 473 – 480.
- Lin, Y.-H. and Trethewey, M.W., 1990, “Finite Element Analysis of Elastic Beams Subjected to Moving Dynamic Loads”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 136, N° 2, p. 323 – 342.
- Reddy, J.N. , 1993, “Introduction to the Finite Element Method”, McGraw Hill, New York.
- Thambiratnam, D. and Zhuge, Y., 1996, “Dynamic Analysis of Beams on Elastic Foundations Subjected to Moving Loads”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 198, N° 2, p. 149 – 169.
- Timoshenko, S.P. , 1965, “Theory of Structures”, John Wiley, New York.
- Wang, R.-T. & Lin, J.-S., 1998, “Vibration of Multi-Span Timoshenko Frames due to Moving Loads”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 212, N° 3, p. 417 – 434.
- Wang, R.-T. & Chou, T.-H., 1998, “Non-Linear Vibration of Timoshenko Beam due to a Moving Force and the Weight of Beam”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 218, N° 1, p. 117 – 131.
- Warburton, G.B. , 1976, “The Dynamic Behavior of Structures”, Pergamon Press, Oxford.
- Wu, J.-S. and Shih, P.-Y., 1998, “Moving-Load-Induced Vibrations of a Moored Floating Bridge”, *Computers & Structures*, vol. 66, N° 4, p. 435 – 461.