

ANÁLISE DAS FORMULAÇÕES VARIÁVEIS PRIMITIVAS E FUNÇÃO CORRENTE PARA ESCOAMENTO TURBULENTO VIA TRANSFORMADA INTEGRAL

Lima, J.A.

Universidade Federal da Paraíba, Coord. Pós-Graduação Eng. Mecânica - CPGEM/CT/UFPB
58.059-900 - João Pessoa - PB, Brasil
jalima@funape.ufpb.br

Santos, C.A.C.

Universidade Federal da Paraíba, Lab. Energia Solar - LES/DTM/CT/UFPB
58.059-900 - João Pessoa – PB, Brasil

Pimentel, L.C.G.

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Prog. Engenharia Mecânica - PEM/COPPE/UFRJ
21.945-970 - Rio de Janeiro – RJ, Brasil

Resumo

Em trabalhos recentes sobre o desenvolvimento hidrodinâmico do escoamento laminar em canais de placas planas paralelas, são discutidas as diferenças e vantagens da formulação em função corrente sobre a de variáveis primitivas, quando a Técnica da Transformada Integral é utilizada. Incentivados por estes resultados, a mesma comparação crítica entre as formulações é presentemente realizada para o caso do escoamento turbulento. Novamente, a GITT é aplicada como ferramenta de solução das equações parabólicas de camada limite e um modelo algébrico é utilizado para a modelagem do fenômeno da turbulência. O objetivo é identificar se as bases utilizadas nas expansões dos campos de velocidade e função corrente do problema laminar, preservarão as mesmas características de convergência para o caso do escoamento turbulento. Resultados numéricos para diferentes números de Reynolds são apresentados para verificação de sua influência sobre ambas as formulações.

***Palavras-Chave:** Escoamento Turbulento, Variáveis Primitivas, Função Corrente, GITT*

1. INTRODUÇÃO

Pela sua simplicidade, o canal de placas paralelas se constitui numa geometria ideal para teste e desenvolvimento de técnicas numéricas aplicadas à solução das equações que governam a dinâmica de escoamentos. Entre as técnicas que se apresentam para a solução destas equações, a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) é um método do tipo espectral que se baseia em expansões de autofunções que, com a ajuda de *softwares* recentes de manipulação algébrica/simbólica, incorpora alguns aspectos de uma técnica puramente analítica. Devido à sua natureza híbrida, esta técnica apresenta alguns fatores

interessantes como o procedimento automático e direto do controle de erro global, bem como a necessidade de um pequeno acréscimo no esforço computacional global com o aumento do número de variáveis independentes do problema. Dadas estas características, a GITT torna-se particularmente apropriada para finalidades de covalidação de resultados, e será empregada para a análise das formulações que neste trabalho se apresentam.

A aplicação da GITT na solução das equações de camada limite laminar na formulação variáveis primitivas está bem estabelecida em várias contribuições (Cotta e Carvalho, 1991; Carvalho *et al.*, 1993; Machado e Cotta, 1995). Motivados pela possibilidade de um ganho de convergência, Figueira da Silva *et al.* (1996), propuseram a solução das equações de camada limite laminar na formulação alternativa de função corrente. Vislumbraram que a satisfação automática da conservação da massa e a eliminação do termo fonte representado pelo gradiente de pressão resultariam em redução do custo computacional e melhor representação dos potenciais estudados. Pimentel (1993), alicerçado no estudo apresentado para o caso laminar, estendeu os procedimentos anteriormente estabelecidos para o estudo do desenvolvimento hidrodinâmico turbulento empregando o modelo algébrico de turbulência de Cebeci e Smith (1974). Com a confirmação da violação da equação da continuidade, identificada pela variação da velocidade média ao longo do canal, Pimentel *et al.* (1997) implementaram a formulação em função corrente e verificaram uma melhora na representação e convergência dos potenciais do problema.

Buscando verificar a causa das discrepâncias entre estas formulações, na análise do desenvolvimento do escoamento turbulento em canais de placas paralelas, e, de certa forma, complementando o esforço anteriormente desenvolvido por Lima *et al.* (1999), o presente trabalho analisa com um maior grau de profundidade os fatores que levam à violação da conservação da massa, bem como apresenta uma discussão sobre qual das formulações apresenta menor custo computacional para uma dada precisão prescrita e resultados completamente convergidos. De forma a simplificar tal análise, um modelo algébrico de turbulência extremamente simples e anteriormente utilizado em outros trabalhos (Lima *et al.*, 1997 e Lima *et al.*, 1999) é empregado. As características pertinentes a cada formulação são demonstradas pela apresentação de resultados para diferentes números de Reynolds.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considera-se o desenvolvimento do escoamento turbulento incompressível, bidimensional, de um fluido newtoniano com propriedades físicas constantes em um canal de placas planas e paralelas. O fluido entra no canal com um perfil uniforme e paralelo de velocidade e considera-se que a transição laminar-turbulento ocorre logo na entrada do canal. Assume-se que o escoamento médio esteja em regime permanente e que o conceito de viscosidade turbulenta é válido. Empregando-se os seguintes grupos adimensionais:

$$x = \frac{x^*}{b} \frac{1}{Re}; \quad y = \frac{y^*}{b}; \quad U = \frac{U^*}{\bar{U}}; \quad V = \frac{V^*}{\bar{U}} Re; \quad Re = \frac{\bar{U}b}{\nu}; \quad v_t = \frac{v_t^*}{\nu}; \quad P = \frac{P^*}{\rho \bar{U}^2}$$

sendo b a metade da distância entre as placas, \bar{U} a velocidade média, ρ a massa específica do fluido, ν a viscosidade molecular e v_t^* a viscosidade turbulenta; as equações médias de Reynolds - equação da conservação da massa, equação da quantidade de movimento na direção x e equação da quantidade de movimento na direção y - na formulação de camada limite, são escritas em variáveis primitivas e na forma adimensional como:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad 0 < y < 1, \quad x > 0 \quad (1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(1+v_t) \frac{\partial U}{\partial y} \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

submetidas às condições de entrada e de contorno, respectivamente:

$$x=0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (4)$$

$$U(0,y)=1$$

$$V(0,y)=0 \quad (5)$$

$$y=0, \quad x > 0$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$$

$$V(x,0)=0$$

$$y=1, \quad x > 0$$

$$U(x,1)=0$$

$$V(x,1)=0$$

(6-9)

De forma a se reescrever o sistema de equações acima na formulação alternativa de função corrente, $\Psi(x,y)$, parte-se de sua definição:

$$U(x,y) = \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y}; \quad V(x,y) = -\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} \quad (10-11)$$

que, após apropriada manipulação matemática das Eqs. (2-3), chega-se à equação que governa o escoamento nesta nova formulação:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left((1+v_t) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \right], \quad 0 < y < 1, \quad x > 0 \quad (12)$$

submetida às condições de entrada e de contorno, respectivamente:

$$x=0, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$\Psi(0,y)=y \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (14)$$

$$y=0, \quad x > 0$$

$$\Psi(x,0)=0$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0$$

$$y=1, \quad x > 0$$

$$\Psi(x,1)=1$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{y=1} = 0$$

(15-18)

Para o fechamento dos sistemas de equações (1-9) e (12-18), faz-se necessário a prescrição ou modelamento da viscosidade turbulenta, ν_t . O modelo aqui adotado é o mesmo utilizado por Lima *et al.* (1997) e Lima *et al.* (1999), o qual consiste num modelo algébrico que utiliza o conceito de viscosidade turbulenta efetiva, desenvolvido por Richman e Azad (1973). Representa um truncamento do modelo original de Van Driest em $(1-y)=0.158$ que, apesar de extremamente simples, serve para os propósitos que neste trabalho se apresentam. Maiores considerações sobre este modelo podem ser obtidas em Richman e Azad (1973).

3. METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

Seguindo idéias anteriormente estabelecidas no desenvolvimento da GITT propõe-se a separação dos potenciais a serem estudados, velocidade e função corrente, em duas parcelas: uma devido ao campo completamente desenvolvido e outra devido exclusivamente ao campo em desenvolvimento. Este procedimento reduz significativamente o esforço computacional, além de homogeneizar a condição de contorno, eq. (17); uma vantagem adicional para a aplicação da transformada integral. Uma vez que os sistemas resultantes para ambas as formulações são similares, e de forma a reescrevê-los em termos de apenas uma equação, são definidas as seguintes variáveis genéricas:

$$G(x,y) = F(x,y) + F_\infty(y) \quad (19)$$

onde: $G(x,y)$ - potencial original de velocidade, $U(x,y)$, ou função corrente, $\Psi(x,y)$
 $F(x,y)$ - potencial filtrado de velocidade, $U(x,y)$, ou função corrente, $\Phi(x,y)$
 $F_\infty(y)$ - campo completamente desenvolvido, $U_\infty(y)$, ou $\Psi_\infty(y)$

O primeiro passo para a aplicação da técnica da transformada integral consiste na escolha de problemas de autovalor que irão auxiliar no processo de solução. Para ambas as formulações, estes problemas estão bem estabelecidos e podem ser encontrados em Figueira da Silva *et al.* (1996). Os problemas auxiliares permitem a definição do seguinte par genérico de transformada/integral:

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{Y}_i(y) \bar{F}_i(x) \quad \text{Inversa} \quad (20)$$

$$\bar{F}_i(x) = \int_0^1 \tilde{Y}_i(y) F(x,y) dy \quad \text{Transformada} \quad (21)$$

onde os potenciais são definidos, de acordo com a formulação que se esteja analisando, como:

$\bar{F}_i(x)$ - potencial transformado de velocidade, $\bar{U}_i(x)$, ou de função corrente, $\bar{\Phi}_i(x)$
 $\tilde{Y}_i(y)$ - autofunções normalizadas associadas aos autovalores μ_i 's.

Após o formalismo matemático de transformação integral, isto é, após a aplicação do operador $\int_0^1 \tilde{Y}_i(y) dy$ e uso da fórmula de inversão, eq. (21), nas equações (1-9) e (12-18) obtém-se o seguinte sistema genérico de equações diferenciais ordinárias, com os seus respectivos coeficientes.

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} \frac{d\bar{F}_k}{dx} = B_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (22)$$

onde, para a formulação em variáveis primitivas, os coeficiente são definidos como:

$$A_{ik} = \sum_{j=1}^{\infty} [A_{ijk} + B_{ijk}] \cdot \bar{U}_j + [C_{ik\infty} + D_{ik\infty}] - 2 \cdot \bar{f}_i(0) \cdot [\bar{U}_k + B_{k\infty}] \quad (23)$$

$$B_i = - [\mu_i^2 \bar{U}_i + B_{i\infty} + B_{iv\infty}] + \bar{f}_i(0) \cdot \left[\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 \bar{f}_j(0) \bar{U}_j - \frac{dU_{\infty}}{dy} \Big|_{y=1} \right] \quad (24)$$

$$A_{ijk} = \int_0^1 \tilde{Y}_i \tilde{Y}_j \tilde{Y}_k dy \quad B_{ijk} = \int_0^1 \tilde{Y}_i \tilde{Y}_j \tilde{f}_k dy \quad C_{ik\infty} = \int_0^1 \tilde{Y}_i \tilde{Y}_k U_{\infty} dy \quad (25-27)$$

$$D_{ik\infty} = \int_0^1 \tilde{Y}_i \tilde{f}_k U'_{\infty} dy \quad B_{i\infty} = \int_0^1 \tilde{Y}_i U_{\infty} dy \quad B_{iv\infty} = \int_0^1 \tilde{Y}_i v_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} + U'_{\infty} \right) dy \quad (28-30)$$

$$\bar{f}_i(y) = \int_y^1 \tilde{Y}_i dy \quad (31)$$

e, para a formulação em função corrente:

$$A_{ik} = \sum_{j=1}^{\infty} [A_{ijk} - B_{ijk}] \cdot \bar{\Phi}_j + [C_{ik\infty} - D_{ik\infty}] \quad B_i = [\mu_i^4 \bar{\Phi}_i + B_{i\infty} + B_{iv\infty}] \quad (32-33)$$

$$A_{ijk} = \int_0^1 \tilde{Y}_i \tilde{Y}_j \tilde{Y}_k'' dy \quad B_{ijk} = \int_0^1 \tilde{Y}_i \tilde{Y}_j''' \tilde{Y}_k dy \quad C_{ik\infty} = \int_0^1 \tilde{Y}_i \tilde{Y}_k'' \Psi'_{\infty} dy \quad (34-36)$$

$$D_{ik\infty} = \int_0^1 \tilde{Y}_i \tilde{Y}_k \Psi''_{\infty} dy \quad B_{i\infty} = \int_0^1 \tilde{Y}_i'' \Psi''_{\infty} dy \quad B_{iv\infty} = \int_0^1 \tilde{Y}_i'' v_t \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \Psi''_{\infty} \right) dy \quad (37-39)$$

nestes coeficientes, um apóstrofe, ('), denota diferenciação em relação à variável y.

A condição de entrada, x=0, para cada formulação deve igualmente ser transformada:

$$\bar{F}_i(0) = \bar{U}_i(0) = \int_0^1 \tilde{Y}_i [1 - U_{\infty}(y)] dy \quad i = 1, 2, \dots, \infty \quad \text{Variáveis Primitivas} \quad (40)$$

$$\bar{F}_i(0) = \bar{\Phi}_i(0) = \int_0^1 \tilde{Y}_i [y - \Psi_{\infty}(y)] dy \quad i = 1, 2, \dots, \infty \quad \text{Função Corrente} \quad (41)$$

O processo de transformação integral elimina, então, a coordenada transversal, y, e oferece um sistema diferencial ordinário para os potenciais transformados na coordenada x. O sistema infinito, Eq. (22), deve ser truncado numa ordem N, suficientemente grande, de forma a se obter resultados numéricos dentro de uma precisão prescrita, através de subrotinas para problemas de valor inicial, como a DIVPAG (IMSL, 1987). Uma vez que estas quantidades tenham sido avaliadas para qualquer posição axial, x, os potenciais originais são recuperados analiticamente pelo uso de suas definições e da fórmula de inversão.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O procedimento computacional foi implementado em Fortran e executado em um microcomputador Pentium III de 500 MHz/192 Mb de memória. Um erro relativo de 10^{-5} (cinco dígitos significativos) foi estabelecido na chamada da subrotina DIVPAG. Resultados para os principais potenciais são mostrados para diferentes números de Reynolds.

A tabela 1 ilustra a convergência da velocidade média, quando a formulação em variáveis primitivas é empregada, para dois números de Reynolds ao longo do canal. Verifica-se que a violação da velocidade média, comentada no trabalho de Figueira da Silva *et al.* (1996) e Pimentel (1993), é claramente observada apenas quando baixas ordens de truncamento nas expansões propostas são utilizadas, mais notadamente, em posições distantes da entrada do canal. Para $Re=3,5 \cdot 10^4$ e $N=200$, a velocidade média já se encontra completamente convergida. Para um número de Reynolds mais elevado, $Re=4,8 \cdot 10^4$, a tabela 1 indica que o processo de convergência parece ser mais lento, requerendo um maior número de termos para a completa conservação.

Tabela 1 – Convergência da velocidade média, $\bar{U}(x)$, ao longo do canal, para diferentes números de Reynolds. (Variáveis Primitivas)

$x^*/D_h N$	$Re=3,5 \cdot 10^4$				$Re=4,8 \cdot 10^4$			
	10	100	150	200	10	100	150	200
1	0,9961	1,001	1,000	0,9999	0,9966	1,001	1,001	1,001
5	1,006	1,004	1,002	1,000	1,006	1,005	1,003	1,002
10	1,011	1,005	1,003	1,001	1,011	1,007	1,004	1,003
20	1,015	1,006	1,003	1,001	1,016	1,008	1,005	1,003
30	1,019	1,007	1,003	1,001	1,020	1,009	1,006	1,003
40	1,023	1,007	1,003	1,001	1,024	1,010	1,006	1,003
60	1,032	1,008	1,003	1,001	1,033	1,011	1,006	1,003
100	1,063	1,009	1,004	1,001	1,066	1,014	1,007	1,004
400	3,049	1,037	1,007	1,001	3,019	1,071	1,022	1,007

A tabela 2 ilustra o comportamento da convergência da velocidade no centro do canal ao longo da posição axial, para $Re=3,5 \cdot 10^4$. Esta tabela mostra a equivalência entre as duas formulações quando a conservação da massa é alcançada.

Tabela 2 – Convergência da velocidade no centro do canal, $U(x,0)$, ao longo da posição axial, para ambas as formulações. $Re=3,5 \cdot 10^4$

$X^*/D_h N$	Variáveis Primitivas				Função Corrente			
	10	100	150	200	10	100	150	200
1	1,024	1,022	1,021	1,021	1,020	1,021	1,022	1,022
5	1,082	1,070	1,069	1,068	1,068	1,067	1,069	1,070
10	1,121	1,107	1,104	1,103	1,105	1,102	1,103	1,104
20	1,146	1,132	1,128	1,126	1,127	1,125	1,125	1,126
25	1,151	1,136	1,132	1,129	1,130	1,129	1,129	1,129
30	1,154	1,138	1,134	1,131	1,131	1,130	1,130	1,130
40	1,159	1,139	1,135	1,132	1,132	1,131	1,131	1,131
60	1,171	1,141	1,136	1,133	1,132	1,132	1,132	1,132
100	1,210	1,142	1,136	1,133	1,132	1,132	1,132	1,132

Observa-se que, tomando os resultados de função corrente como referência, em posições próximo à entrada do canal, os resultados fornecidos pela formulação em variáveis primitivas são praticamente idênticos aos fornecidos pela formulação em função corrente, mesmo para pequenos valores de N. Todavia, para posições distantes da entrada, os resultados para a formulação variáveis primitivas se deterioram devido à não conservação da massa. Um número maior de termos se faz necessário. Fazendo-se $N=200$ as formulações são idênticas.

Confirmando as conclusões anteriores, a tabela 3 mostra a convergência da velocidade longitudinal na posição axial, $x^*/D_h=10$, em vários pontos da coordenada transversal, y. Nota-se que, em regiões afastadas da parede, as duas formulações fornecem resultados iguais. Entretanto, próximo à parede, onde prevalecem os maiores gradientes de velocidade, a convergência é mais lenta. Até mesmo a formulação em função corrente, que conserva a massa em toda posição ao longo do canal, tem sua convergência prejudicada nesta região.

Tabela 3 – Convergência da velocidade longitudinal, $U(x,y)$, para a posição axial $x^*/D_h=10$ para ambas as formulações. $Re=3,5 \cdot 10^4$

Y N	Variáveis Primitivas				Função Corrente			
	10	100	150	200	10	100	150	200
0,0	1,121	1,107	1,104	1,103	1,105	1,102	1,103	1,104
0,1	1,119	1,105	1,102	1,101	1,102	1,100	1,101	1,101
0,2	1,112	1,099	1,096	1,094	1,097	1,094	1,094	1,095
0,3	1,100	1,088	1,085	1,083	1,085	1,083	1,083	1,084
0,4	1,082	1,072	1,069	1,067	1,069	1,066	1,066	1,067
0,5	1,057	1,049	1,046	1,043	1,045	1,043	1,043	1,043
0,6	1,022	1,018	1,015	1,012	1,013	1,012	1,011	1,011
0,7	0,9798	0,9777	0,9747	0,9723	0,9713	0,9719	0,9711	0,9706
0,8	0,9251	0,9277	0,9249	0,9225	0,9192	0,9221	0,9212	0,9205
0,9	0,8523	0,8582	0,8557	0,8535	0,8487	0,8530	0,8523	0,8514

A tabela 4 ilustra uma comparação, em termos de custo computacional, entre as duas formulações. Observa-se que, para a faixa analisada, o número de Reynolds apresenta pouca influência sobre o tempo de execução, para um mesmo número de termos e mesma formulação. Também, para um mesmo número de termos, a formulação em função corrente apresenta custo computacional de cerca de duas vezes o custo apresentado pela formulação variáveis primitivas. Em adição, para ambas as formulações, nota-se um crescimento excessivo do custo computacional com o aumento do número de termos. Isto indica a necessidade de recursos computacionais avançados para uma perfeita convergência de resultados, principalmente quando se utiliza a formulação em função corrente.

Tabela 4 – Tempo de CPU, em segundos, para diferentes números de Reynolds e para as diferentes formulações.

N	Variáveis Primitivas		Função Corrente	
	$Re=3,5 \cdot 10^4$	$Re=4,8 \cdot 10^4$	$Re=3,5 \cdot 10^4$	$Re=4,8 \cdot 10^4$
10	2,8	3,0	5,4	5,1
50	160	159	363	364
100	1.225	1.218	2.422	2.777
150	4.429	4.200	9.366	9.380
200	12.281	12.300	26.961	26.881

5. CONCLUSÕES

Quando as equações de camada limite são analisadas na formulação em variáveis primitivas pela GITT, resultados idênticos aos produzidos pela formulação em função corrente são obtidos. Tal conclusão é verdadeira desde que a conservação da massa seja totalmente satisfeita, isto é, um número de termos, N , suficientemente elevado seja utilizado nas expansões dos potenciais. Esta conclusão, reafirma os resultados de Figueira da Silva *et al.* (1996) e Pimentel *et al.* (1997), realçando, entretanto, que a violação da equação da continuidade se dá apenas devido às baixas ordens de truncamento anteriormente empregadas. Isto implica que a formulação em variáveis primitivas é tão representativa quanto a formulação em função corrente. Mais ainda, se os recursos computacionais são escassos, a formulação em variáveis primitivas apresenta menor custo, apesar de requerer um maior número de termos para a total convergência de resultados. A favor da formulação em função corrente está a excelente representatividade dos potenciais originais para baixas ordens de truncamento e pequena influência do número de Reynolds nas taxas de convergência, características que levam à sua preferência em relação à formulação em variáveis primitivas. Como uma nota final, lembra-se que o mesmo comportamento de convergência deve ser verificado com outros modelos algébricos que melhor descrevem o fenômeno da turbulência.

REFERÊNCIAS

- Carvalho, T.M.B., Cotta, R.M. and Mikhailov, M.D., 1993, "Flow Development in the Entrance Region of Ducts", *Comm. Num. Meth. Eng.*, Vol.9, pp. 503,509.
- Cebeci, T. and Smith, A.M.D., 1974, "Analysis of Turbulent Boundary Layers", Academic Press, New York.
- Cotta, R.M. and Carvalho, T.M.B., 1991, "Hybrid Analysis of Boundary Layer Equations for Internal Flow Problems", *Proceedings of the 7th Int. Conf. on Num. Meth. in Laminar and Turbulent Flow, Part 1*, pp.106-115, July, Stanford, CA.
- Figueira da Silva, E., Perez-Guerrero, J.S. and Cotta, R.M., 1996, "A Comparison of Integral Transform Strategies for Solving Boundary Layer Equations", *Proceedings of the 6th National Thermal Sciences Meeting, ENCIT-96*, Novembro, Florianópolis, SC, Brazil.
- IMSL Library, 1987, *Math/Lib*, Houston, Texas.
- Lima, J.A., Perez-Guerrero, S.S. and Cotta, R.M., 1997, "Hybrid Solution of the Averaged Navier-Stokes Equations for Turbulent Flow", *Computational Mechanics*, Vol. 19, Iss. 4, pp. 297-307.
- Lima, J.A., Santos, C.A.C. and Pimentel, L.C.G., 1999, "Solution of the Reynolds-Averaged Equations for Turbulent Flow via Integral Transform and Algebraic Turbulence Model", *Proceedings of the 15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, 15th Symposium, COBEM-99*, November, Águas de Lindóia, SP, Brazil.
- Machado, H.A. and Cotta, R.M., 1995, "Integral Transform Method for Boundary Layer Equations in Simultaneous Heat and Fluid Flow Problems", *Int. J. Num. Meth. Heat & Fluid Flow*, Vol.5, pp. 225-237.
- Pimentel, L.C.G., 1993, "Simulação do Escoamento Turbulento em Dutos via Modelo Algébrico de Turbulência e Transformação Integral", *PEM/COPPE/UFRJ, M.Sc.*, Tese, Rio de Janeiro, Brasil.
- Pimentel, L.C.G., Cotta, R.M. and Kakaç, S., 1997, "Integral Transform Solution of the Turbulent Boundary Layer Equations in Streamfunction-only Formulation", *Proc. Of the ICHMT Int. Symp. on Computational Heat Transfer*, pp. 224-231, May, Turquia.
- Richman, J.W. and Azad, R.S., 1973, "Developing Turbulent Flow in Smooth Pipes", *Applied Science Research*, Vol. 28, pp. 419-441.