UMA METODOLOGIA SEGREGADA PARA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Rudolf Huebner*
Mauri Fortes**
*Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Engenharia Mecânica, Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil. e-mail : rudolf@demec.ufmg.br
**Faculdade de Ciências Gerenciais-UNA, Rua Sapucaí, 429, 30150-050, Belo Horizonte, MG, Brasil. e-mail : maurif@uol.com.br

Resumo

O presente trabalho apresenta uma metodologia segregada para solução das equações de Navier-Stokes. O método consiste em uma formulação de Petrov-Galerkin obtida à partir da aplicação da formulação de mínimos quadrados aos resíduos das equações de quantidade de movimento. A presente metodologia permite que interpolações de mesma ordem sejam utilizadas para velocidade e pressão. O método é utilizado na solução de diversos casos de escoamentos laminares e os resultados são comparados com dados existentes na literatura.

Palavras- Chaves : Petrov-Galerkin, Navier-Stokes, Elementos Finitos, Escoamento Incompressível

1. INTRODUÇÃO

Problemas incompressíveis (ou ligeiramente compressíveis) de escoamento de fluidos geralmente são formulados em termos de velocidade e pressão e caem na categoria de problemas de formulação mista (Dyne e Heinrich, 1993). Em tais problemas, a condição de estabilidade de Babuska-Brezzi (CEBB) impõe restrições ao uso de funções de interpolação arbitrárias para velocidades e pressões. Pode-se mostrar que a violação da CEBB leva a um sistema singular de equações; para que não haja violação da CEBB, a interpolação utilizada para a velocidade deve ser de ordem superior à interpolação usada para a pressão (Zienkiewicz e Wu, 1991; Zienkiewicz e Taylor, 1989; Hughes, 1989). Formulações mistas, que não obedecem à CEBB podem gerar campos de pressão espúrios e apresentar dificuldade de convergência

Vários pesquisadores desenvolveram metodologias que contornam a CEBB, sem a utilização de ordens de interpolações diferentes (Schnipke e Rice, 1986; Sampaio, 1991; Shaw, 1991; Franca, Hughes e Ballestra, 1986).

Rice e Schnipke (1986) desenvolveram uma metodologia de aproximação *upwind* segregada. Nesta metodologia as equações de quantidade de movimento são discretizadas usando-se a formulação de Galerkin em todos os termos, exceto os termos convectivos. Os termos convectivos são tratados usando-se uma formulação *upwind* na direção das linhas de corrente. Esta metodologia não produz oscilações e reduz substancialmente a difusão numérica.

Shaw (1991) desenvolveu um esquema de solução segregada que tem por base o algoritmo SIMPLER (Patankar, 1980). O esquema proposto permite que se usem interpolações de mesma ordem para pressão e velocidades; entretanto a instabilidade do método ao ser aplicado a problemas com números de Reynolds mais elevados mostra a necessidade de se utilizarem técnicas *upwind*, tais como a proposta por Hughes(1978).

Sampaio (1991), tendo por base uma formulação proposta por Franca et al. (1986), propôs o uso de uma outra metodologia para solução das equações de Navier-Stokes. O método consiste em uma formulação de Petrov-Galerkin que é obtida a partir da aplicação da formulação de mínimos quadrados aos resíduos das equações (quantidade de movimento e continuidade). A metodologia proposta permite que interpolações de mesma ordem sejam usadas para velocidade e pressão. Uma desvantagem da técnica proposta por Sampaio é que ela trata a velocidade e pressão de um modo acoplado devendo-se utilizar um método direto de solução do sistema resultante de equações. O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma metodologia segregada para solução das equações de Navier-Stokes tomando por base a formulação proposta por Sampaio.

2. METODOLOGIA

As equações de quantidade de movimento e continuidade aplicáveis a escoamentos transientes, bidimensionais e incompressíveis são :

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+b_x \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho u\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+b_y \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{3}$$

em que u e v são as componentes da velocidade nas direções x e y respectivamente, p é a pressão, ρ é a densidade, μ é a viscosidade do fluido, t é o tempo e b_x e b_y são as componentes da força de corpo.

As equações de quantidade de movimento são discretizadas no tempo como :

$$F_x - b_x^{n+1/2} = 0 \tag{4}$$

$$F_y - b_y^{n+1/2} = 0 \tag{5}$$

onde

$$F_x=\frac{\rho}{\Delta t}(u^{n+1}-u^n)+\rho\, u^n\frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial x}+\rho\, v^n\frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial y}-\mu\nabla^2 u^{n+1/2}+\frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x} \tag{6}$$

$$F_y=\frac{\rho}{\Delta t}(v^{n+1}-v^n)+\rho\, u^n\frac{\partial v^{n+1/2}}{\partial x}+\rho\, v^n\frac{\partial v^{n+1/2}}{\partial y}-\mu\nabla^2 v^{n+1/2}+\frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial y} \tag{7}$$

em que o sobrescrito n+1/2 indica que as equações foram discretizadas no tempo usando um esquema de diferenças centrais. A discretização das variáveis dependentes é feita por meio de interpolações lineares para velocidade e pressão.

$$\hat{u}^{n+1} = N_a u_a^{n+1} \qquad \hat{v}^{n+1} = N_b v_b^{n+1} \qquad \hat{p}^{n+1} = N_c p_c^{n+1}\ .$$

As equações de quantidade de movimento, na forma discretizada, são escritas como :

$$\hat{F}_x=\frac{\rho}{\Delta t}(\hat{u}^{n+1}-\hat{u}^n)+\rho\,\hat{u}^n\frac{\partial \hat{u}^{n+1/2}}{\partial x}+\rho\,\hat{v}^n\frac{\partial \hat{u}^{n+1/2}}{\partial y}-\mu\nabla^2\hat{u}^{n+1/2}+\frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x}\ , \tag{8}$$

$$\hat{F}_y = \frac{\rho}{\Delta t}(\hat{v}^{n+1} - \hat{v}^n) + \rho\,\hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^{n+1/2}}{\partial x} + \rho\,\hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^{n+1/2}}{\partial y} - \mu \nabla^2 \hat{v}^{n+1/2} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial y}\,. \tag{9}$$

Substituindo F_x , F_y por $\hat{F}_x, \hat{F}_y$ e usando as equações (4) e (5) pode-se escrever a soma do quadrado dos resíduos das equações de quantidade de movimento.

$$S = \int_\Omega [\hat{F}_x - b_x^{n+1/2}]^2\, d\Omega + \int_\Omega [\hat{F}_y - b_y^{n+1/2}]^2\, d\Omega\,. \tag{10}$$

Minimizando a equação acima com relação a u_i^{n+1}, v_k^{n+1} obtém-se as equações abaixo que são equivalentes ao método de Petrov-Galerkin para as equações de quantidade de movimento.

$$\int_\Omega (N_i + W_i)[\hat{F}_y - b_y^{n+1/2}]\,d\Omega = 0\,, \tag{11}$$

$$\int_\Omega (N_k + W_k)[\hat{F}_y - b_y^{n+1/2}]\,d\Omega = 0\,, \tag{12}$$

onde

$$W_i = \frac{\Delta t}{2}\left(\hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y}\right) - \frac{\mu \Delta t}{2\rho}\nabla^2 N_i \;\text{ e }\; W_k = \frac{\Delta t}{2}\left(\hat{u}^n \frac{\partial N_k}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_k}{\partial y}\right) - \frac{\mu \Delta t}{2\rho}\nabla^2 N_k\,.$$

O parâmetro Δt nas equações acima é calculado da seguinte maneira :

$$\Delta t = \frac{\alpha h}{|u|} \tag{13}$$

em que, $\alpha = \coth\left(\frac{Re}{2}\right) - \frac{2}{Re}$, $Re = \frac{\rho |u| h}{\mu}$ é o número de Reynolds do elemento e h é o comprimento característico do elemento.

Usando o teorema de Green nos termos viscosos, ponderados segundo Galerkin nas equações (11) e (12) e considerando o limite quando os valores de u, v e p avaliados no instante n+1 tendem aos valores de u, v e p avaliados no instante n, obtém-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (N_i + W_i)\left[\rho\,\hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial x} + \rho\,\hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1}}{\partial x} - b_x\right] d\Omega \\ &+ \int_\Omega \mu \nabla N_i . \nabla \hat{u}^{n+1} d\Omega - \int_\Omega W_i\, \mu\, \nabla^2 \hat{u}^{n+1} d\Omega = \int_\Gamma N_i\, \mu \nabla \hat{u}^{n+1} .\mathbf{n}\, d\Gamma\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (N_k + W_k)\left[\rho\,\hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial x} + \rho\,\hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1}}{\partial y} - b_y\right] d\Omega \\ &+ \int_\Omega \mu \nabla N_k . \nabla \hat{v}^{n+1} d\Omega - \int_\Omega W_k\, \mu\, \nabla^2 \hat{v}^{n+1} d\Omega = \int_\Gamma N_k\, \mu \nabla \hat{v}^{n+1} .\mathbf{n}\, d\Gamma\end{aligned} \tag{15}$$

onde **n** é o vetor unitário normal ao contorno.

A equação (10) pode ser minimizada com relação a p_l^{n+1}.

$$\frac{\partial S}{\partial p_l^{n+1}} = \int_\Omega 2\left[\hat{F}_x - b_x^{n+1/2}\right]\frac{\partial \hat{F}_x}{\partial p_l^{N+1}}\, d\Omega + \int_\Omega 2\left[\hat{F}_y - b_y^{n+1/2}\right]\frac{\partial \hat{F}_y}{\partial p_l^{N+1}}\, d\Omega = 0 \qquad (16)$$

A equação para pressão, mostrada abaixo, é obtida à partir da combinação da equação de continuidade, discretizada segundo Galerkin, com a equação (16).

$$\int_\Omega \frac{\Delta t}{\rho}\frac{\partial N_l}{\partial x}\left[\rho\,\hat{u}^{n+1}\frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial x} + \rho\,\hat{v}^{n+1}\frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial y} - \mu\nabla^2\hat{u}^{n+1} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1}}{\partial x} - b_x\right]d\Omega +$$
$$\int_\Omega \frac{\Delta t}{\rho}\frac{\partial N_l}{\partial y}\left[\rho\,\hat{u}^{n+1}\frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial x} + \rho\,\hat{v}^{n+1}\frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial y} - \mu\nabla^2\hat{v}^{n+1} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1}}{\partial y} - b_y\right]d\Omega + \int_\Omega N_l\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}\right)^{n+1} d\Omega = 0 \qquad (17)$$

As equações (14), (15) e (17) constituem o sistema a ser resolvido. As condições de contorno essenciais são valores prescritos de velocidade e/ou pressão, e as condições de contorno naturais são gradientes de velocidade prescritos. Pelo menos um valor de referência para pressão deve ser definido a fim de se obter um problema bem colocado.

Neste trabalho uma relaxação linear na forma

$$\phi_r = \alpha\phi_n + (1-\alpha)\phi_o \qquad (18)$$

é aplicada às variáveis u, v e p. Na equação acima ϕ_r é o valor relaxado, ϕ_n é valor obtido na iteração atual e ϕ_o é o valor da iteração anterior.

O sistema resultante de equações foi resolvido conforme a seqüência mostrada abaixo.

1. Obtenção de u - equação (14)
2. Atualização de u - equação (18)
3. Obtenção de v - equação (15)
4. Atualização de v - equação (18)
5. Obtenção de p - equação (17)
6. Atualização de p - equação (18)
7. Se a solução convergiu pare, caso contrário retorne ao passo 1.

A solução é considerada convergida quando $\left|\phi_r - \phi_{r\,anterior}\right| \leq \varepsilon$.

3.RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, serão apresentados problemas que ilustram a aplicação da formulação proposta. O primeiro problema a ser considerado é o escoamento plenamente desenvolvido entre placas. A figura 1 mostra a geometria considerada. Devido à simetria com relação ao plano central somente metade da região entre as placas foi discretizada. O número de Reynolds para o escoamento foi 150 (baseado na velocidade média e distância entre as placas).

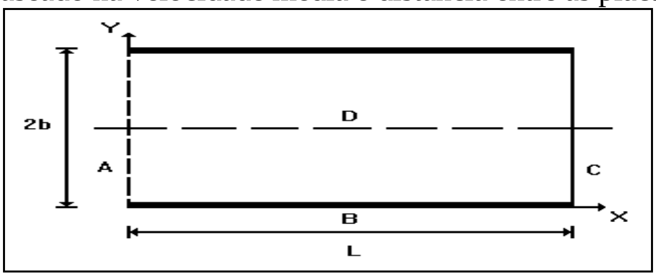


Figura 1. Geometria e dimensões características (b=0,5m e L=50m)

A região foi discretizada utilizando uma malha uniforme com 10 elementos ao longo da direção x e 5 ao longo da direção y. As condições de contorno utilizadas neste problema foram :

Na entrada (A) : $p = 100 \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$

Na parede (B) : $u = 0 \quad v = 0$

Na saída (C) : $p = 0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$

No plano de simetria (D) : $v = 0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

Na análise do problema o critério de convergência usado foi de (10^{-3}) e nenhuma relaxação foi necessária para obtenção dos campos de pressão e velocidade.

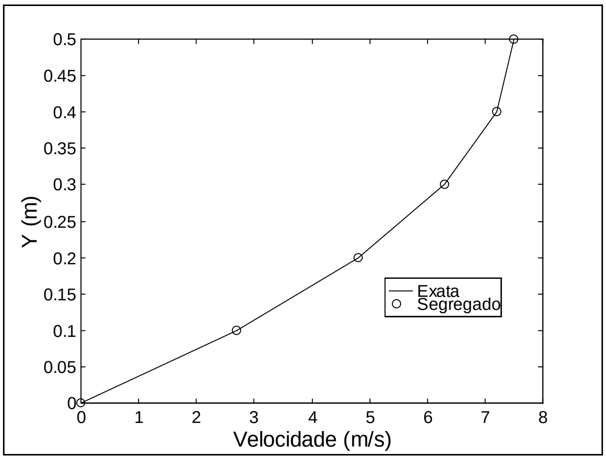


Figura 2. Perfil de velocidade

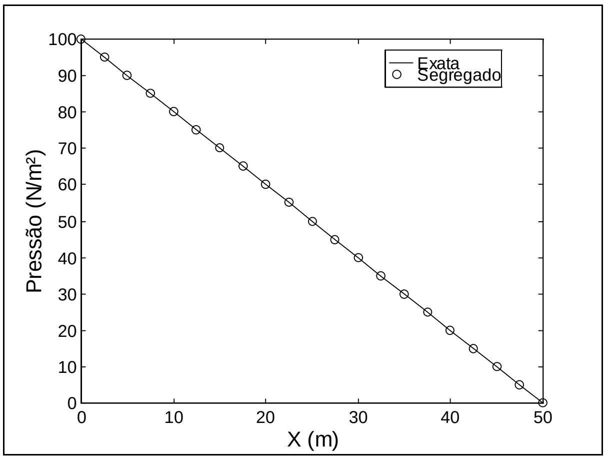


Figura 3. Variação da pressão com x

A figura 2 mostra que o perfil de velocidade obtido, na saída do domínio, coincide com a solução exata. Na figura 3 pode-se observar a variação linear do perfil de pressão ao longo da direção x.

O segundo problema considerado foi o escoamento em desenvolvimento entre placas. O domínio analisado apresenta a mesma geometria do problema anterior, exceto o comprimento do domínio (L) que passou a ser igual a 15. O número de Reynolds para o escoamento foi 100 (baseado na velocidade média e distância entre as placas).

As condições de contorno utilizadas foram :

Na entrada (lado A, figura 1) : $\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad u = 1 \quad v = 0$

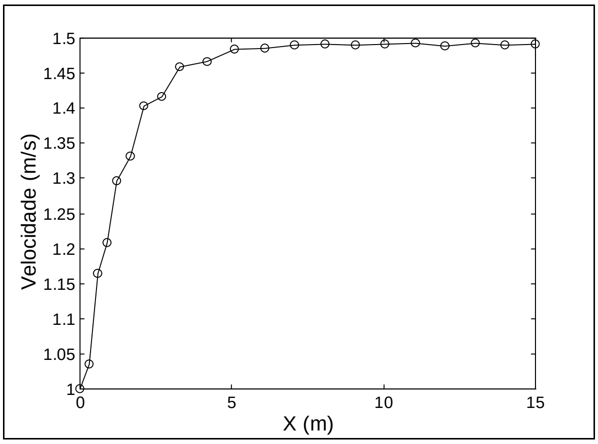
Na parede (lado B, figura 1) : $u = 0 \quad v = 0$

Na saída (lado C, figura 1) : $p = 0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$

No plano de simetria (lado D, figura 1) : $v = 0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

Nas simulações a região foi discretizada utilizando 20 divisões ao longo da direção x e 11 divisões ao longo da direção y. Na direção y a malha foi refinada junto a parede e na direção x a malha foi refinada na região próxima à entrada do escoamento

Na análise do problema o critério de convergência usado foi de (10^{-3}) e apenas a pressão foi relaxada por um fator igual a 10^{-2}.



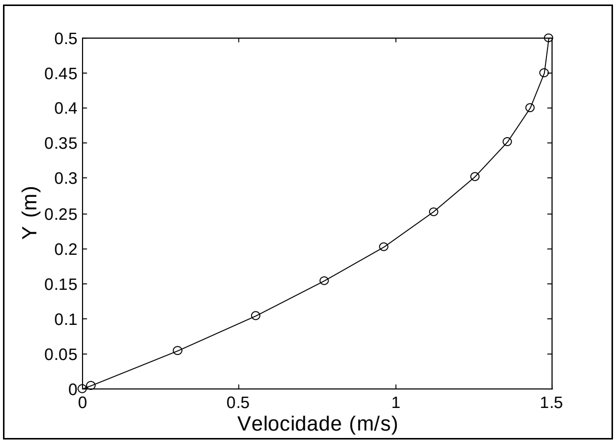


Figura 4. Variação de u para y=0,5

Figura 5. Perfil de velocidade na saída

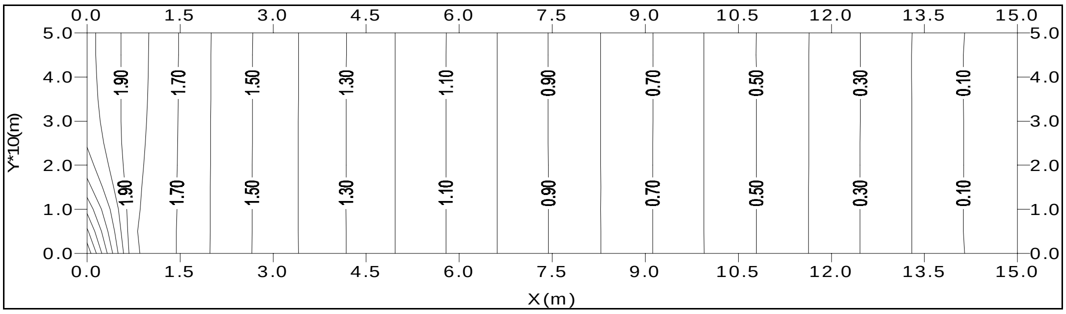


Figura 6. Campo de pressão

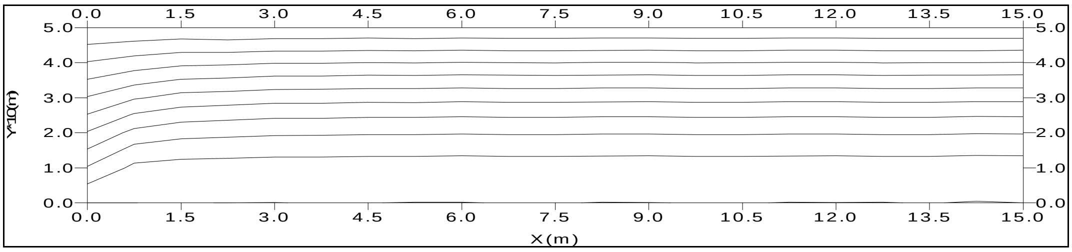


Figura 7. Linhas de corrente

A variação da componente u da velocidade, ao longo da linha de centro, é mostrada na figura 4. A figura 5 mostra que o perfil de velocidade obtido se aproxima bem do perfil de velocidade de um escoamento completamente desenvolvido na região de saída. O campo de pressão obtido é mostrado na figura 6 (fora de escala) e observar-se que o mesmo não apresenta oscilações apesar do uso de interpolações de mesma ordem para velocidade e pressão. A figura 7 (fora de escala) mostra as linhas de corrente do escoamento. A tabela 1 mostra os valores de u, ao longo da linha de centro, obtidos pela presente formulação e por Guerrero e Cotta (1995) para um escoamento com Re igual a 40. Pode-se observar uma boa concordância entre os valores obtidos pelas duas metodologias.

Tabela 1 - Valores de u ao longo da linha de centro do escoamento para Re = 40.

x	Guerrero e Cotta	Segregado	x	Guerrero e Cotta	Segregado
0.2	1.022	1.035	1.4	1.421	1.452
0.6	1.166	1.259	1.8	1.480	1.477

O último problema a ser considerado é o escoamento laminar sobre um degrau. A figura 8 mostra a geometria do domínio analisado.

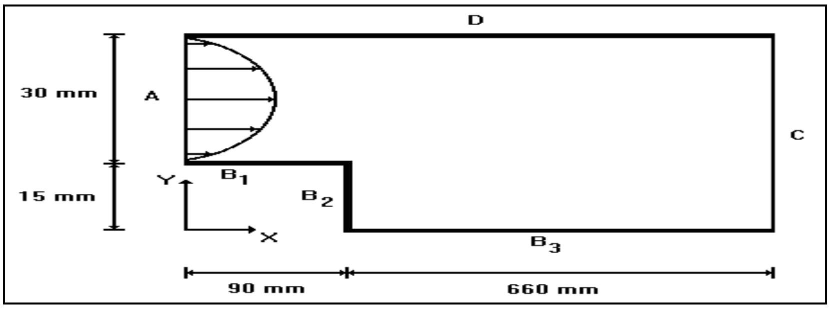


Figura 8. Geometria e dimensões

As condições de contorno utilizadas foram :

Na entrada (A) : $u(y) = -\frac{2*10^4}{3}(y-0{,}015)*(y-0{,}045)\,;\, v=0\,;\, \frac{\partial p}{\partial x}=0$

Nas paredes (B_1,B_2,B_3 e D) : $u=0\,;\, v=0$

Na saída (C) : $\frac{\partial u}{\partial x}=0\,;\, \frac{\partial v}{\partial x}=0\,;\, p=0$

O número de Reynolds foi 73 (baseado na velocidade média na entrada e altura do degrau). A figura 9 mostra a malha utilizada. O critério de convergência utilizado foi igual a 10^{-3}. As velocidades foram relaxadas por um fator de relaxação igual a 0.5 e a pressão por um fator igual a 10^{-3}. A figura 10 mostra o perfil de velocidade (componente u do vetor velocidade) a 12 mm do degrau. O perfil obtido numericamente aproxima-se bastante dos valores experimentais obtidos por Denham e Patrick (1974); citados por Shaw, (1991). As linhas de corrente e o campo de pressão são mostrados nas figuras 11 e 12 (fora de escala), respectivamente.

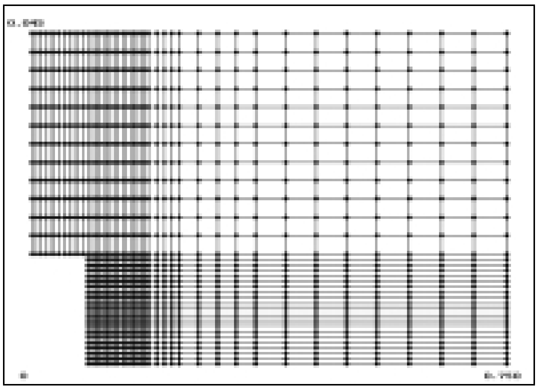


Figura 9. Malha utilizada na discretização

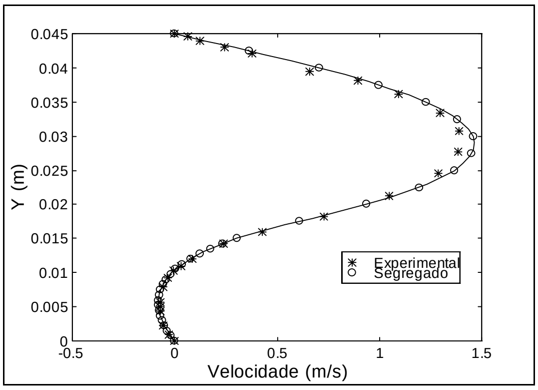


Figura 10. Perfil a 12 mm do degrau

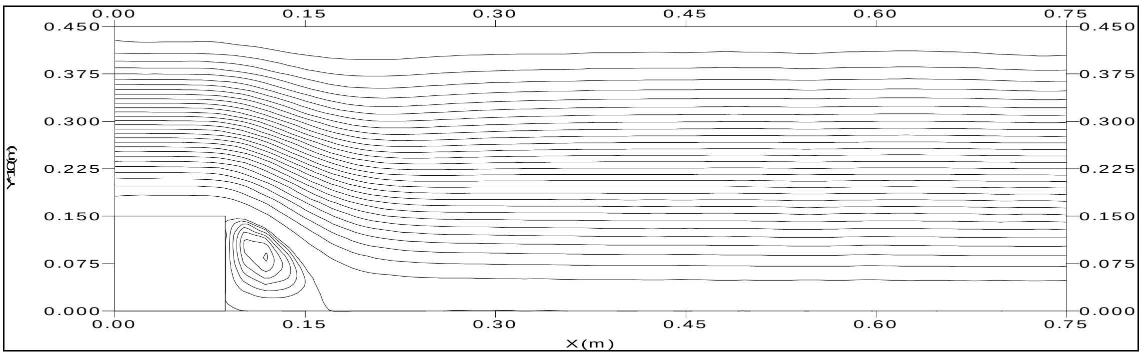


Figura 11. Linhas de corrente

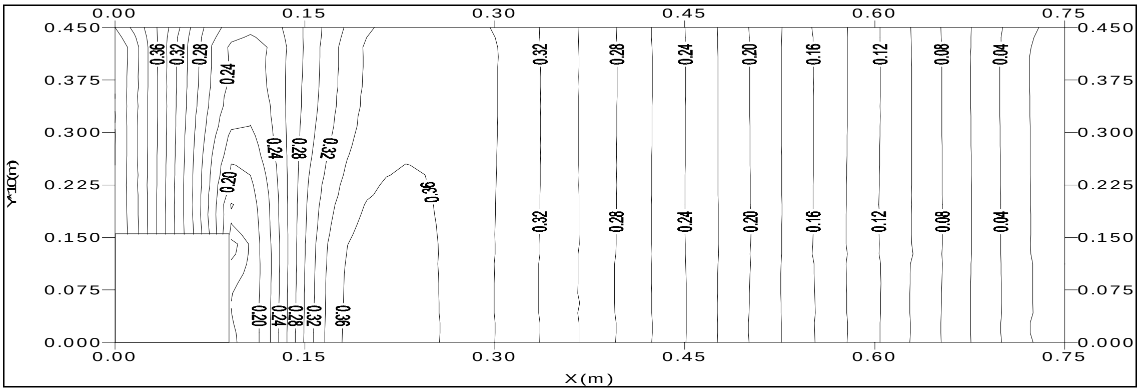


Figura 12. Campo de Pressão

4. CONCLUSÕES

Os resultados mostram que a formulação originalmente proposta por Sampaio (1991) admite um esquema de solução na forma segregada. O esquema segregado leva à soluções que apresentam campos de velocidade e pressões fisicamente consistentes. Uma vantagem da metodologia segregada é que o esforço computacional envolvido na solução do sistema de equações é menor, entretanto é necessário uso de relaxações para se obter convergência.

5. REFERÊNCIAS

- Dyne, B.R. & Heinrich, J.C., 1993, “Physically correct penalty-like formulations for accurate pressure calculation in finite element algorithms of the Navier-Stokes Equations”,, Int. J. Num. Methods in Engng. 36: 3883-3902.
- Franca, L.P., Hughes, T.J.R. & Ballestra. M., 1986, “A new finite element formulation for computacional fluid dynamics : V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition : A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal-order interpolations”, Comp. Methods Appl. Mech. Engng. 59: 85-99.
- Guerrero, J.S.P. & Cotta, R.M., 1995, “Integral transform solution of developing laminar duct flow in Navier-Stokes formulation”, Int. J. Num. Methods in Fluids. 20:1203-1213.
- Hughes, T.J.R., 1978, “A simple scheme for developing “upwind” finite elements”, Int. J. Num. Methods in Engng. 12: 1359-1365.
- Hughes, T.J.R., 1989, “The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis”, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 803p.
- Patankar, S.V., 1980, “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, Ed. Hemisphere, New York, 168p.
- Rice, J.G. & Schnipke, R.J., 1986, ”An equal-order velocity-pressure formulation that does not exhibit spurious pressure modes”, Comp. Methods Appl. Mech. Engng., 58: 135-149.
- Sampaio, P.A.B. de, 1991, “A Petrov-Galerkin formulation for the incompressible Navier-Stokes equations using equal order interpolation for velocity and pressure”, Int. J. Num. Methods in Engng. 31: 1135-1149.
- Shaw, C.T., 1991, “Using a segregated finite element scheme to solve the incompressible Navier-Stokes equations”, Int. J. Num. Methods in Fluids 12: 81-92.
- Zienkiewicz, O.C. & Taylor, R.L., 1989, “The Finite Element Method”, Vol. 1, Ed. McGraw-Hill Book Company, London, 648p.
- Zienkiewicz, O.C. & Wu, J., 1991, “Incompressibility without tears - How to avoid restrictions of mixed formulation”, Int. J. Num. Methods in Engng. 32: 1189-1203.