

UMA COMPARAÇÃO ENTRE DUAS METODOLOGIAS PARA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES USANDO ELEMENTOS DE SEGUNDA ORDEM

Rudolf Huebner*

Mauri Fortes**

*Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Engenharia Mecânica, Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil. e-mail : rudolf@demec.ufmg.br

**Centro Universitário de Belo Horizonte-UNI-BH, Rua Diamantina , 529, 31110-320, Belo Horizonte, MG, Brasil. e-mail : maurif@uol.com.br

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo analisar duas metodologias para solução de problemas de escoamento incompressível. Ambas metodologias consistem em uma formulação de Petrov-Galerkin, porém uma faz uso de um método direto para solução do sistema de equações enquanto a outra consiste em um esquema segregado para solução do sistema de equações. As duas metodologias são empregadas na solução de diversos casos de escoamentos laminares e os resultados são comparados entre si e com dados existentes na literatura.

Palavras- Chaves : Petrov-Galerkin, Navier-Stokes, Elementos Finitos, Escoamento Incompressível

1.INTRODUÇÃO

O método de Galerkin é muito eficiente para analisar problemas lineares auto-adjuntos e problemas não lineares de valores nos contornos. Em problemas de mecânica dos fluidos e problemas convectivos-difusivos (problemas não auto-adjuntos) a matriz associada ao termo convectivo não é simétrica (devido ao caráter não adjunto, assimétrico, do operador diferencial convectivo). Devido a este fato, as soluções obtidas podem apresentar um comportamento oscilatório e, para que se obtenham soluções precisas e sem oscilações, deve-se utilizar malhas muito refinadas. As limitações da formulação de Galerkin, principalmente no que se refere à falsa difusão e à dispersão numérica, podem ser superadas utilizando-se os chamados esquemas a montante (*upwind*) ou formulações de Petrov-Galerkin (Brooks e Hughes, 1982; Hughes, 1978; Sampaio, 1990; Rice e Schnipke, 1986).

Os esquemas do tipo a montante (*upwind*) eliminam oscilações mas não são precisos. Assim, (Hughes, 1978) propôs um método que consiste em modificar a forma de integração numérica do termo convectivo. Uma grande vantagem desse tipo de aproximação é que o grau de 'upwinding' pode ser continuamente controlado a fim de melhorar a precisão dos resultados.

(Brooks e Hughes, 1982) utilizaram o método de Petrov-Galerkin, segundo o qual as funções de peso (teste) e as funções de forma são escolhidas em espaços diferentes. Assim, propuseram uma formulação que modifica as funções de teste através da adição de uma perturbação. Este esquema é chamado de método de Petrov-Galerkin de linhas de corrente a montante (Streamline Upwind Petrov-Galerkin, SUPG). Uma vantagem do método de Petrov-Galerkin de linhas de corrente a montante é que o problema de falsa difusão é reduzido sensivelmente.

(Shaw, 1991) desenvolveu um esquema de solução segregada que tem por base o algoritmo SIMPLER (Patankar, 1980). Neste esquema as componentes da velocidade são calculadas pelas equações de quantidade de movimento e efetuam-se correções para velocidade e pressão, a fim de satisfazer a equação da continuidade. O esquema proposto por Shaw permite que se usem interpolações lineares para pressão e velocidades. O método se mostrou instável ao ser aplicado a problemas com números de Reynolds mais elevados levando assim à necessidade de se utilizarem técnicas ‘upwind’, tal como o SUPG ou o método de integração proposto por (Hughes, 1978).

O método proposto por (Sampaio, 1991) consiste em uma formulação de Petrov-Galerkin que é obtida a partir da aplicação da formulação de mínimos quadrados dos resíduos das equações (de quantidade de movimento e continuidade). A metodologia permite que interpolações lineares sejam usadas para velocidade e pressão. Uma desvantagem da metodologia proposta por Sampaio é que deve-se utilizar um método direto de solução de equações. Este trabalho tem por objetivo implementar e analisar duas alternativas de solução de problemas de escoamento incompressível, verificar a possibilidade de se utilizarem métodos diretos e segregados de solução quando do uso destas formulações e analisar a aplicabilidade das metodologias no que se refere ao uso de elementos que utilizam funções de interpolação de segunda ordem.

2. METODOLOGIA

As equações desenvolvidas nesta seção são formuladas considerando que o escoamento é em regime transiente, incompressível e axis-simétrico. As equações de quantidade de movimento e continuidade são escritas como :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + b_x \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \mu \frac{v}{r^2} + b_r \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (3)$$

em que u e v são as componentes da velocidade nas direções x e r respectivamente, p é a pressão, ρ é a densidade, μ é a viscosidade do fluido, t é o tempo e b_x e b_r são as componentes da força de corpo.

As equações de quantidade de movimento são discretizadas no tempo usando um esquema de diferenças centradas (conforme indica o índice $n+1/2$) :

$$F_x - b_x^{n+1/2} = 0 \quad (4)$$

$$F_r - b_r^{n+1/2} = 0 \quad (5)$$

com

$$F_x = \frac{\rho}{\Delta t} (u^{n+1} - u^n) + \rho u^n \frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial x} + \rho v^n \frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial r} - \mu \nabla^2 u^{n+1/2} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x} \quad (6)$$

$$F_r = \frac{\rho}{\Delta t} (v^{n+1} - v^n) + \rho u^n \frac{\partial v^{n+1/2}}{\partial x} + \rho v^n \frac{\partial v^{n+1/2}}{\partial r} - \mu \nabla^2 v^{n+1/2} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial r} + \mu \frac{v^{n+1/2}}{r^2} \quad (7)$$

A discretização das variáveis dependentes é feita por meio das interpolações quadráticas para velocidade e pressão:

$$\hat{u}^{n+1} = N_a u_a^{n+1} \quad \hat{v}^{n+1} = N_b v_b^{n+1} \quad \hat{p}^{n+1} = N_c p_c^{n+1} .$$

As equações de quantidade de movimento discretizadas podem ser escritas como :

$$\hat{F}_x = \frac{\rho}{\Delta t} (\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n) + \rho \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^{n+1/2}}{\partial x} + \rho \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^{n+1/2}}{\partial r} - \mu \nabla^2 \hat{u}^{n+1/2} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x}, \quad (8)$$

$$\hat{F}_r = \frac{\rho}{\Delta t} (\hat{v}^{n+1} - \hat{v}^n) + \rho \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^{n+1/2}}{\partial x} + \rho \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^{n+1/2}}{\partial r} - \mu \nabla^2 \hat{v}^{n+1/2} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial r} + \mu \frac{\hat{v}^{n+1/2}}{r^2}. \quad (9)$$

Substituindo F_x , F_r por \hat{F}_x , \hat{F}_r e usando as equações (4) e (5) pode-se escrever a soma do quadrado dos resíduos das equações de quantidade de movimento.

$$S = \int_{\Omega} [\hat{F}_x - b_x^{n+1/2}]^2 d\Omega + \int_{\Omega} [\hat{F}_r - b_r^{n+1/2}]^2 d\Omega. \quad (10)$$

A equação acima pode ser minimizada com relação aos parâmetros u_i^{n+1} , v_k^{n+1} e p_l^{n+1} :

$$\frac{\partial S}{\partial u_i^{n+1}} = \int_{\Omega} 2[\hat{F}_x - b_x^{n+1/2}] \frac{\partial \hat{F}_x}{\partial u_i^{n+1}} d\Omega = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial S}{\partial v_k^{n+1}} = \int_{\Omega} 2[\hat{F}_r - b_r^{n+1/2}] \frac{\partial \hat{F}_r}{\partial v_k^{n+1}} d\Omega = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial S}{\partial p_l^{n+1}} = \int_{\Omega} 2[\hat{F}_x - b_x^{n+1/2}] \frac{\partial \hat{F}_x}{\partial p_l^{n+1}} d\Omega + \int_{\Omega} 2[\hat{F}_r - b_r^{n+1/2}] \frac{\partial \hat{F}_r}{\partial p_l^{n+1}} d\Omega = 0. \quad (13)$$

As equações (11) e (12) podem ser encaradas como o método de Petrov-Galerkin para as equações de quantidade de movimento.

$$\int_{\Omega} (N_i + W_i) [\hat{F}_x - b_x^{n+1/2}] d\Omega = 0, \quad (14)$$

$$\int_{\Omega} (N_k + W_k) [\hat{F}_r - b_r^{n+1/2}] d\Omega = 0, \quad (15)$$

onde

$$W_i = \frac{\Delta t}{2} \left(\hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) - \frac{\mu \Delta t}{2\rho} \nabla^2 N_i, \quad (16)$$

$$W_k = \frac{\Delta t}{2} \left(\hat{u}^n \frac{\partial N_k}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) - \frac{\mu \Delta t}{2\rho} \nabla^2 N_k + \frac{N_k \mu}{2r^2}. \quad (17)$$

O parâmetro Δt nas equações acima é calculado da seguinte maneira :

$$\Delta t = \frac{\alpha h}{|u|} \quad (18)$$

em que, $\alpha = \coth\left(\frac{Re}{2}\right) - \frac{2}{Re}$, $Re = \frac{\rho|u|h}{\mu}$ é o número de Reynolds do elemento e h é o comprimento característico do elemento.

W_i e W_k são descontínuas nos contornos dos elementos, e assim, os termos ponderados por estas funções deverão ser integrados apenas no interior dos elementos, como indicado por Brooks e Hughes (1982). Usando o teorema de Green nos termos viscosos, ponderados segundo Galerkin nas equações (14) e (15) e considerando o limite quando os valores de u , v e p avaliados no instante $n+1$ tendem aos valores de u , v e p avaliados no instante n , obtém-se as seguintes equações:

$$\int_{\Omega} (N_i + W_i) \left[\rho \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial x} + \rho \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial r} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1}}{\partial x} - b_x \right] d\Omega \quad (19)$$

$$+ \int_{\Omega} \mu \nabla N_i \cdot \nabla \hat{u}^{n+1} d\Omega - \int_{\Omega} W_i \mu \nabla^2 \hat{u}^{n+1} d\Omega = \int_{\Gamma} N_i \mu \nabla \hat{u}^{n+1} \cdot n d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} (N_k + W_k) \left[\rho \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial x} + \rho \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial r} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1}}{\partial r} + \mu \frac{\hat{v}^{n+1}}{r^2} - b_r \right] d\Omega \quad (20)$$

$$+ \int_{\Omega} \mu \nabla N_k \cdot \nabla \hat{v}^{n+1} d\Omega - \int_{\Omega} W_k \mu \nabla^2 \hat{v}^{n+1} d\Omega = \int_{\Gamma} N_k \mu \nabla \hat{v}^{n+1} \cdot n d\Gamma$$

onde \mathbf{n} é o vetor unitário normal ao contorno.

A equação para pressão é obtida combinando-se a equação de continuidade, na sua forma discretizada, com a equação (13). Considerando o limite para regime permanente temos :

$$\int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial x} \left[\rho \hat{u}^{n+1} \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial x} + \rho \hat{v}^{n+1} \frac{\partial \hat{u}^{n+1}}{\partial r} - \mu \nabla^2 \hat{u}^{n+1} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1}}{\partial x} - b_x \right] d\Omega +$$

$$\int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial y} \left[\rho \hat{u}^{n+1} \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial x} + \rho \hat{v}^{n+1} \frac{\partial \hat{v}^{n+1}}{\partial r} - \mu \nabla^2 \hat{v}^{n+1} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1}}{\partial r} + \mu \frac{\hat{v}^{n+1}}{r^2} - b_r \right] d\Omega + \quad (21)$$

$$\int_{\Omega} N_i \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial r} + \frac{\hat{v}}{r} \right)^{n+1} d\Omega = 0$$

As equações de quantidade de movimento (19) e (20) e a equação de pressão-continuidade (21) constituem o sistema a ser resolvido. Pelo menos um valor de referência para pressão deve ser definido a fim de se obter um problema bem colocado.

Como na maioria dos problemas não-lineares, alguma forma de relaxação é necessária a fim de se obter uma solução convergida. No caso da metodologia segregada uma relaxação linear na forma

$$\phi_r = \alpha \phi_n + (1-\alpha) \phi_o \quad (22)$$

é aplicada às variáveis u , v e p . Na equação acima ϕ_r é o valor relaxado, ϕ_n é valor obtido na iteração atual e ϕ_o é o valor da iteração anterior.

A solução do sistema resultante de equações é realizada de duas formas. No caso da formulação segregada o sistema é resolvido conforme a seqüência mostrada abaixo.

1. Obtenção de u - equação (19)
2. Atualização de u - equação (23)
3. Obtenção de v - equação (20)
4. Atualização de v - equação (23)
5. Obtenção de p - equação (21)
6. Atualização de p - equação (23)
7. Se a solução convergiu pare, caso contrário retorne ao passo 1.

No caso da formulação direta (Sampaio) os passos (1), (3) e (5) são realizados simultaneamente e a equação 22 não é necessária ao longo do processo. O *solver* utilizado nas duas formulações é uma adequação, para um ou três graus de liberdade, do método de solução

frontal apresentado em (Taylor e Hughes, 1981). Nas duas metodologias a solução é considerada convergida quando $|\phi_r - \phi_{r \text{ anterior}}| \leq \epsilon$.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, serão apresentados problemas que ilustram a aplicação da formulação proposta. O primeiro problema a ser considerado é o escoamento plenamente desenvolvido no interior de um tubo. A figura 1 mostra a geometria considerada. Devido à simetria do problema somente metade da região foi discretizada. O número de Reynolds para o escoamento foi 56 (baseado na velocidade média e diâmetro do tubo).

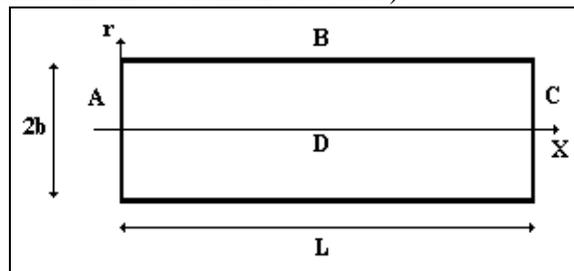


Figura 1. Geometria e dimensões características ($b=0,5\text{m}$ e $L=50\text{m}$)

A região foi discretizada utilizando uma malha uniforme com 5 elementos ao longo da direção x e 5 ao longo da direção y . As condições de contorno utilizadas foram :

Na entrada (A) : $p = 100 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

Na parede (B) : $u = 0 \quad v = 0$

Na saída (C) : $p = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

No plano de simetria (D) : $v = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0$

Na análise do problema o critério de convergência usado foi de (10^{-3}) e nenhuma relaxação foi necessária para obtenção dos campos de pressão e velocidade. A formulação de Sampaio necessitou de uma iteração para satisfazer o critério de convergência enquanto a segregada necessitou de duas iterações.

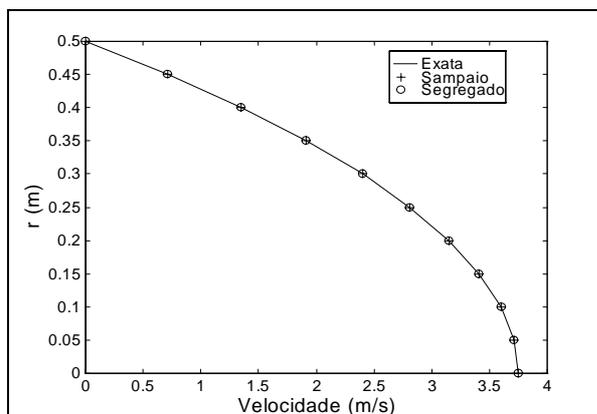


Figura 2. Perfil de velocidade na saída

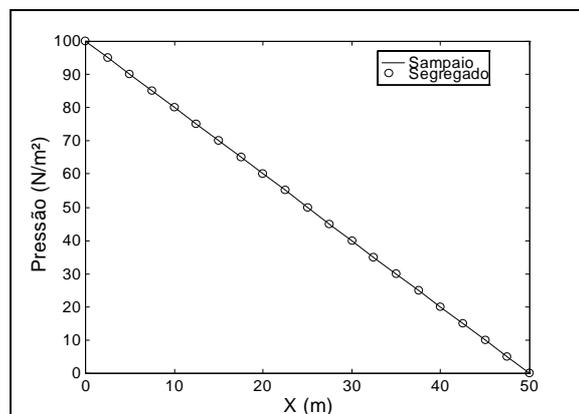


Figura 3. Perfil de pressão ao longo de x

A figura 2 mostra o perfil de velocidade na saída do domínio e pode-se observar que as soluções obtidas coincidem com a solução exata. A variação linear do perfil de pressão ao longo da direção x é mostrada na figura 3.

O segundo problema considerado foi o escoamento em desenvolvimento no interior de um duto circular. O domínio analisado apresenta a mesma geometria do problema anterior, exceto o comprimento do domínio (L) que passou a ser igual a 15. O número de Reynolds para o escoamento foi 100 (baseado na velocidade média e diâmetro do tubo).

As condições de contorno utilizadas foram :

Na entrada (lado A, figura 1) : $\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad u = 1 \quad v = 0$

Na parede (lado B, figura 1) : $u = 0 \quad v = 0$

Na saída (lado C, figura 1) : $p = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

No plano de simetria (lado D, figura 1) : $v = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0$

A figura 4 mostra a malha utilizada nas simulações.

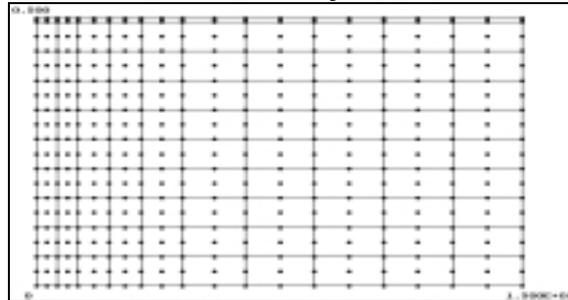


Figura 4. Discretização da região

Na análise do problema o critério de convergência usado foi de (10^{-3}) . As velocidades não foram relaxadas e a pressão foi relaxada por um fator igual a 5×10^{-3} . A formulação de Sampaio convergiu em 5 iterações e a segregada exigiu 188 iterações.

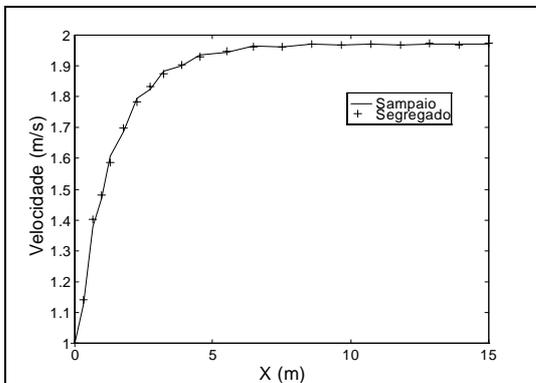


Figura 5. Variação de u na linha de centro

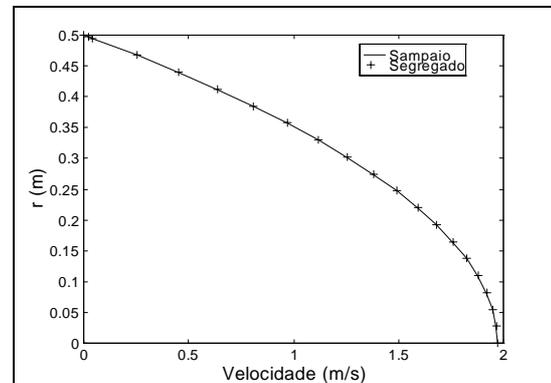


Figura 6. Perfis de velocidade na saída

A figura 5 mostra a variação da velocidade u ao longo da linha de centro. O comportamento da curva mostra que o comprimento de entrada se aproxima bem do valor de 5,65 m citado por Ward-Smith (1980). A figura 6 mostra que os perfis de velocidade obtidos se aproximam bem do perfil de velocidade de um escoamento completamente desenvolvido na região de saída. O campo de pressão obtido utilizando-se a metodologia segregada é mostrado na figura 7 (fora de escala). Nota-se que o campo não apresenta oscilações apesar do uso de interpolações de mesma ordem para velocidade e pressão. A figura 8 (fora de escala) mostra as linhas de corrente do escoamento ao se utilizar a formulação de Sampaio.

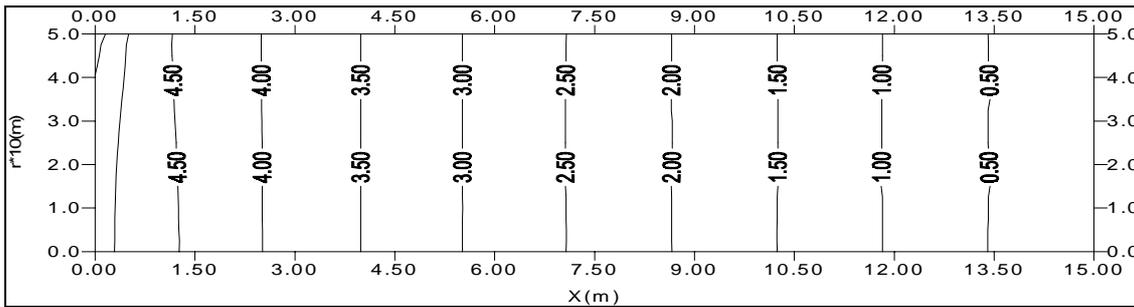


Figura 7. Campo de pressão obtido com a metodologia segregada

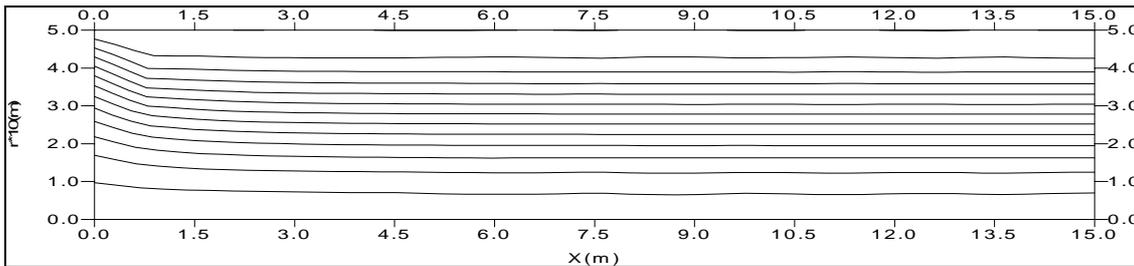


Figura 8. Linhas de corrente obtidas com a formulação de Sampaio

O último problema a ser considerado é o escoamento laminar em uma expansão abrupta. A figura 9 mostra a geometria do domínio analisado.

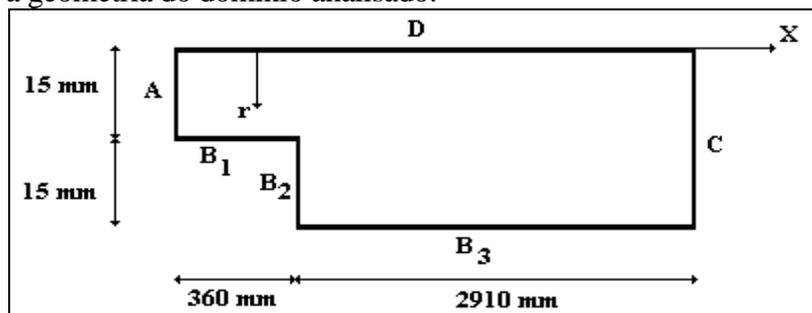


Figura 9. Geometria do domínio

As condições de contorno utilizadas foram :

Na entrada (A) :
$$u(r) = -\frac{8 \cdot 10^4}{9} (r - 0,015) * (r + 0,015) ; v = 0 ; \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Nas paredes (B₁, B₂ e B₃) :
$$u = 0 ; v = 0$$

Na saída (C) :
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial v}{\partial x} = 0 ; p = 0$$

No plano de simetria (D) :
$$v = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

O número de Reynolds foi 100 (baseado na velocidade média na entrada e no menor diâmetro da expansão). A malha utilizada é mostrada na figura 10. O critério de convergência utilizado foi igual a 10^{-3} . As velocidades foram relaxadas por um fator igual a 0.5 e a pressão por um fator igual a 10^{-3} . A formulação de Sampaio convergiu em 9 iterações e a segregada exigiu 172 iterações. A figura 11 (fora de escala) mostra as linhas de corrente numa região próxima ao degrau ao se utilizar a metodologia direta. O centro do vórtice e seu tamanho se aproximam bem dos valores sugeridos por Ward-Smith (1980). Na figura 12 observa-se o campo de pressão obtido pela metodologia segregada, numa região próxima ao degrau, nota-se que o mesmo é fisicamente consistente não apresentando qualquer tipo de oscilação.

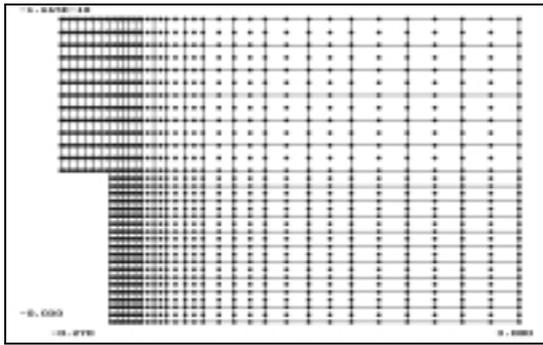


Figura 10. Malha utilizada na discretização

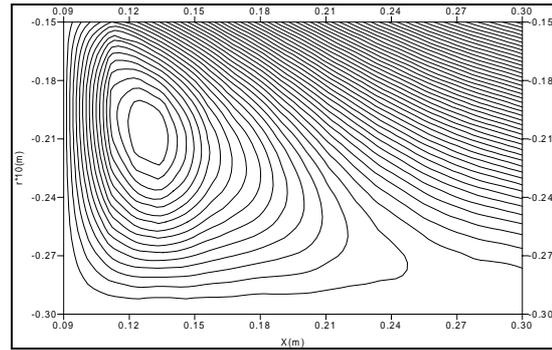


Figura 11. Linhas de corrente

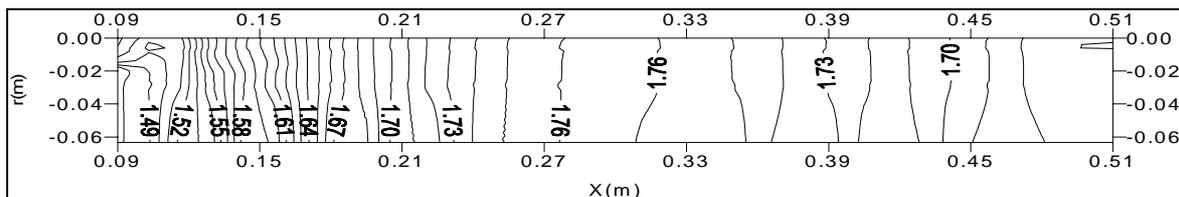


Figura 12. Campo de pressão obtido com a metodologia segregada

4. CONCLUSÕES

Os resultados mostram que a formulação originalmente proposta por Sampaio (1991) admite um esquema de solução na forma segregada e que ambas podem ser empregadas utilizando-se elementos quadráticos. Os resultados obtidos pelas duas formulações apresentam campos de pressões e velocidades consistentes apesar das ordens de interpolação utilizadas. O esquema segregado requer um número maior de iterações para convergir entretanto o esforço computacional envolvido em cada iteração é menor.

5. REFERÊNCIAS

- Brooks, A.N. & Hughes, T.J.R., 1982, "Streamline upwind Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes Equations", Computer Methods in Applied Mec. and Engng.
- Hughes, T.J.R., 1978, "A simple scheme for developing "upwind" finite elements", Int. J. Num. Methods in Engng. 12: 1359-1365.
- Patankar, S.V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Ed. Hemisphere, New York, 168p.
- Rice, J.G. & Schnipke, R.J., 1986, "An equal-order velocity-pressure formulation that does not exhibit spurious pressure modes", Comp. Methods Appl. Mech. Engng., 58: 135-149.
- Sampaio, P.A.B. de, 1990, "A Petrov-Galerkin modified operator formulation for convection-difusion problems", Int. J. Num. Methods in Engng. 30: 331-347.
- Sampaio, P.A.B. de, 1991, "A Petrov-Galerkin formulation for the incompressible Navier-Stokes equations using equal order interpolation for velocity and pressure", Int. J. Num. Methods in Engng. 31: 1135-1149.
- Shaw, C.T., 1991, "Using a segregated finite element scheme to solve the incompressible Navier-Stokes equations", Int. J. Num. Methods in Fluids 12: 81-92.
- Taylor, C. & Hughes, T.G., 1981, "Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations", Ed. Pineridge Press Ltd., Swansea, 244p.
- Ward-Smith, A.J, 1980, "Internal Fluid Flow", Ed. Clarendon Press, Oxford,, 566p.