

GERADOR DE MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS BIDIMENSIONAIS: MALHAS COM SUB-REGIÕES, MISTAS E ANISOTRÓPICAS

Paulo R. M. Lyra¹

Darlan K. E. de Carvalho²

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Pernambuco,
Recife/PE, 50740-530, Brasil. E-MAILS: ¹*prmlyra@demec.ufpe.br* ² *darlan@demec.ufpe.br*

Resumo

Neste trabalho são descritos diversas estratégias que visam ampliar as flexibilidades de um gerador de malhas, triangulares e/ou quadrilaterais não-estruturadas, bidimensional. Dentre estas estratégias descreveremos: 1) Os procedimentos adotados para incorporar a possibilidade de definição de subregiões, bem como, de malhas mistas com elementos triangulares e quadrilaterais em subregiões distintas; 2) Os procedimentos necessários para a obtenção de malhas triangulares ou quadrilaterais com alongamento direcional dos elementos, i.e. malhas anisotrópicas, em função das características da função representada na malha; 3) Outros aspectos que dizem respeito ao acoplamento entre os módulos de geração de malhas, análise via método dos elementos finitos e análise de erros/adaptação. Finalmente, são apresentados alguns exemplos para demonstrar as flexibilidades do sistema de geração de malhas descrito, bem como, a qualidade dos elementos obtidos nas malhas.

Palavras-Chave: Geração de Malhas, Malhas Mistas e Anisotrópicas, Adaptação de Malhas

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos tempos observa-se uma tendência cada vez maior de se utilizar métodos numéricos adequados para o uso de malhas quaisquer (estruturadas ou não), tais como o método dos elementos finitos (MEF) ou o método dos volumes finitos (MVF)(AGARD, 1992). As principais vantagens da utilização de procedimentos adequados ao uso de malhas não-estruturadas são: flexibilidade para lidar com geometrias complexas e o fato destas se apresentarem como a forma natural para a incorporação da adaptatividade de malhas, que representa talvez a única esperança de resolução adequada de fenômenos de pequena escala (por ex. camada limite, propagação de ondas de choque, turbulência, etc.) em geometrias complexas. O primeiro passo para uma simulação computacional, após a etapa de modelagem geométrica, é a geração de malhas, e a qualidade das soluções obtidas está diretamente relacionada com a qualidade da malha empregada na análise. Em problemas típicos da dinâmica dos fluidos, usam-se malhas com dezenas e até centenas de milhares de elementos, o que, claramente, torna a geração manual de elementos totalmente inviável. Em geral se utilizam malhas triangulares devido ao baixo custo e flexibilidade geométrica destes elementos, porém determinadas formulações do método dos elementos finitos requerem e/ou apresentam melhor desempenho com o uso de elementos quadrilaterais e, em situações específicas (por ex. problemas acoplados, ou em problemas com certos fenômenos essencialmente unidimensionais), com o uso de malhas mistas. A melhoria da qualidade da solução encontrada através da análise numérica, pode ser alcançada através de estratégias que

refinam as malhas automaticamente nas regiões onde a solução apresenta grandes erros de discretização (aproximações grosseiras) e desrefinam em regiões onde os erros estão muito abaixo da precisão estabelecida. Ao lidarmos com fenômenos cujo comportamento apresenta uma direção preferencial, a estratégia de geração/adaptação de malhas se torna mais eficiente quando da possibilidade de se obter malhas com alongamento direcional (i.e. anisotrópicas). O desenvolvimento de um sistema computacional robusto e flexível de geração e adaptação de malhas bidimensionais resulta em uma ferramenta muito valiosa para simulação de problemas reais de interesse das Engenharias e Ciências.

Neste trabalho descrevemos algumas estratégias implementadas num sistema de geração de malhas triangulares e/ou quadrilaterais não-estruturadas bidimensional (Lyra *et al.*, 1998a; Lyra *et al.*, 1998b) visando ampliar as suas flexibilidades para lidar com sub-regiões, malhas mistas, malhas anisotrópicas, assim como apresentamos o procedimento adotado para o acoplamento do programa de análise com o de geração/adaptação de malhas via *remeshing*. Estes e outros pontos são ilustrados através de diversos exemplos.

2. GERADOR DE MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS BIDIMENSIONAIS

O processo de geração de malhas consiste basicamente na subdivisão do domínio de interesse em um conjunto consistente de sub-domínios (“ou elementos”). A consistência fica garantida uma vez que os elementos gerados cobrem todo o domínio, sendo as interseções entre os elementos apenas em pontos ou lados comuns.

2.1 Geração de Malhas Triangulares

O gerador de malhas triangulares, desenvolvido por Peraire *et al* (1987), e que se baseia na técnica do avanço de frente (*advancing front*), foi utilizado para efetuar as triangulações dos domínios apresentados neste trabalho. Este gerador permite um controle da densidade e gradação da malha e da forma dos elementos. Algumas modificações, que serão descritas no transcorrer deste artigo, foram efetuadas neste programa para permitir a incorporação da flexibilidade para lidar com sub-regiões, assim como para possibilitar que o módulo de geração de malhas quadrilaterais gere também malhas mistas e para auxiliar na definição automática de sub-regiões com malhas anisotrópicas quadrilaterais.

2.2 Geração de Malhas Quadrilaterais

O nosso gerador de malhas quadrilaterais não-estruturadas baseia-se na conversão de uma triangulação prévia do domínio de interesse (Lyra *et al.*, 1998a; Lyra *et al.*, 1998b). O procedimento consiste basicamente de três etapas: 1) União de dois triângulos adjacentes através da remoção criteriosa da aresta comum, levando a uma malha mista intermediária; 2) Obtenção de uma malha totalmente quadrilateral através da subdivisão da malha intermediária (subdividir triângulos remanescentes em três e quadriláteros em quatro quadriláteros respectivamente (ver figuras 7 e 8); 3) Otimização da malha através de estratégias que modificam a topologia ou a geometria da malha visando uma melhor qualidade dos elementos gerados. Uma síntese desta estratégia de geração de malhas quadrilaterais pode ser visto nas figuras 1 a 4.

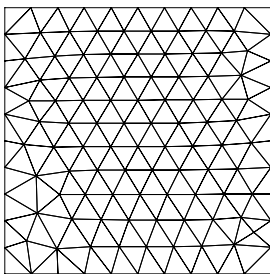


Figura 1: Triangulação inicial

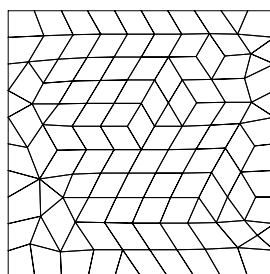


Figura 2: Malha intermediária

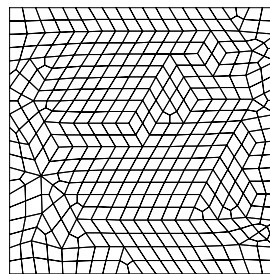


Figura 3: Malha sem otimização

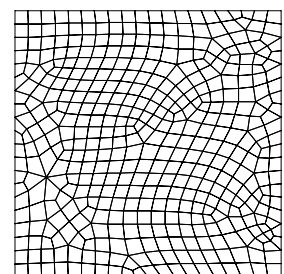


Figura 4: Malha quadrilateral final

As estratégias de otimização da malha adotadas são: (a) permutação de diagonais, (b) regularização Laplaciana, e (c) eliminação de nós com apenas três elementos conectados. A permutação de diagonais pode ser feita com dois objetivos: (a.1) visando um equilíbrio do número de elementos que ocorrem em cada nó da malha ou (a.2) visando a formação dos elementos com melhor qualidade (i.e. menor distorção). A otimização é então feita tomando-se a seguinte seqüência de estratégias: (a.1), (b), (c), (b) e (a.2). Para maiores detalhes em relação a estas estratégias ver (Lee & Lo., 1994) e (Lyra *et al.*, 1998a).

Uma idéia da qualidade das malhas triangulares e quadrilaterais típicas obtidas com o nosso sistema de geração de malhas (Lyra *et al.*, 1998b) pode ser vista nas figuras 5 e 6. Nestas figuras tem-se a triangulação inicial e malha quadrilateral correspondente do domínio que representa um protótipo da região frontal de um avião civil, cuja geometria foi modelada por funções *splines* cúbicas. Nestas figuras pode ser apreciada a boa qualidade dos elementos gerados.

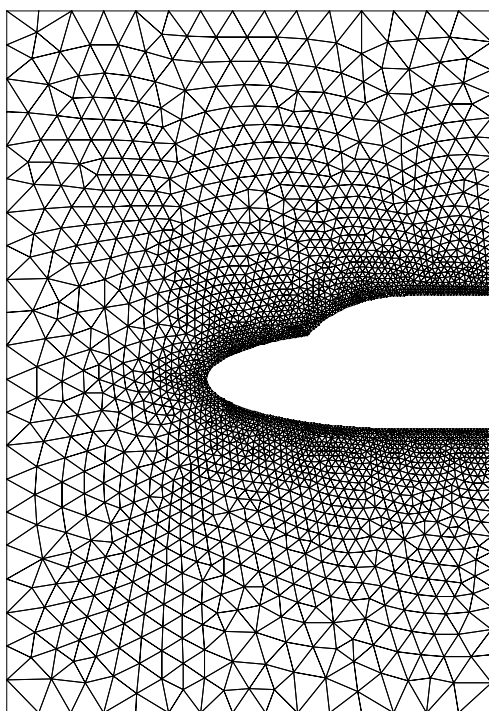


Figura 5: Malha Triangular

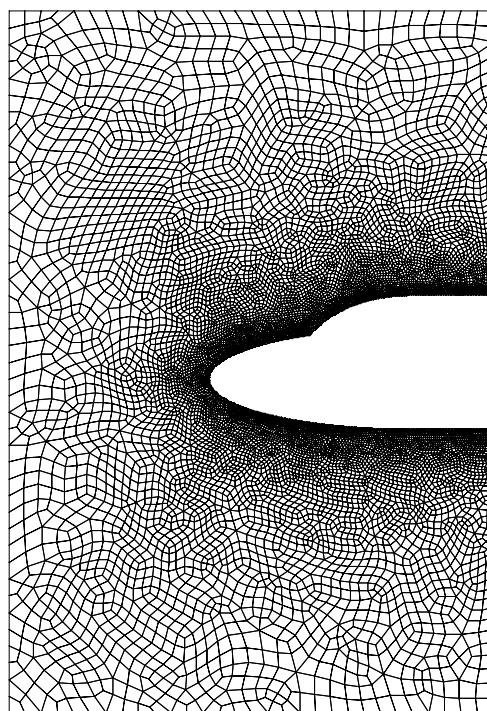


Figura 6: Malha Quadrilateral

Vale ressaltar que o tamanho dos elementos da triangulação inicial do domínio deve ser aproximadamente o dobro daquele desejado para os elementos quadrilaterais da malha final. A opção pela conversão de triângulos é extremamente atraente pois as malhas quadrilaterais geradas podem herdar as propriedades das malhas triangulares originais, as quais são obtidas através de qualquer técnica de triangularização já consolidada na literatura.

3. FLEXIBILIDADES INCORPORADAS AO SISTEMA DE GERAÇÃO

3.1 Considerações Iniciais

Para a implementação do procedimento de conversão de triângulos em quadriláteros se faz necessário a definição de algumas matrizes inteiras que fornecem os dados topológicos utilizados nos algoritmos, sem a necessidade de buscas constantes (ver detalhes em Lyra *et al* (1998a)). Quando desejamos gerar malhas mistas ou com sub-regiões, anisotrópicas ou não, utilizamos algumas estratégias e informações específicas do nosso gerador de malhas triangulares, que não são em geral encontradas em um programa de geração de malhas triangulares.

3.2 Subregiões

Quando, por exemplo, da análise de problemas da dinâmica dos fluidos tais como escoamentos multi-fásicos e não-miscíveis ou da análise de problema da mecânica dos sólidos envolvendo materiais com diferentes propriedades mecânicas em diferentes porções do domínio de interesse, tem-se a necessidade de malhas adequadas para cada sub-domínio (ou sub-região) consistentes entre si. Na geração de malhas triangulares consideramos cada sub-região independentemente com a definição topológica das sub-regiões e descrição da geometria do contorno, incluindo a interface entre sub-regiões. No processo de triangulação, através da técnica do avanço de frente, obtemos primeiramente a numeração dos nós do contorno e em seguida a geração de nós e triângulos simultaneamente em cada sub-região independentemente, porém os dados topológicos da malha final (numeração dos nós, elementos, arestas e faces do contorno) são consistentes e possuem uma numeração seqüencial. Isto é feito utilizando-se um vetor que informa os segmentos que descrevem cada região e um outro que fornece os nós pertencentes a cada segmento, quando este já foi discretizado. Tem-se desta forma malhas totalmente triangulares, consistentes e por sub-regiões. Para obter malhas totalmente quadrilaterais e por sub-regiões procedemos a quadrilateralização do domínio completo, conforme é feito no caso de uma única região, isto já garante ao final a consistência entre regiões sem a necessidade de tratá-las independentemente.

3.3 Malhas Mistas

Como conseqüência da flexibilidade da definição de sub-regiões com malhas consistentes entre si, tem-se a possibilidade de se gerar malhas com tipos de elementos distintos em cada sub-região. A definição do tipo de elemento para cada região pode ser feita apriori nos dados fornecidos ao gerador. Na matriz auxiliar denominada "ISIDE" (utilizada tanto no módulo de geração triangular como quadrilateral), e que originalmente listava o primeiro e último nó, assim como o elemento a direita e o elemento a esquerda de cada aresta da malha (com zero para o número do elemento correspondente no caso de arestas sobre o contorno), foi necessário acrescentar uma quinta informação com o número da região que contém a aresta ou zero no caso da aresta pertencer à interface entre duas sub-regiões. Assim como na geração de malhas quadrilaterais, a geração de malhas mistas segue três etapas: 1) União de dois triângulos adjacentes apenas nas regiões pré-definidas como quadrilaterais; 2) Subdivisão da malha intermediária obtida nas sub-regiões quadrilaterais conforme descrito no item 2.2 (figuras 7 e 8 e subdivisão das sub-regiões triangulares dividindo cada triângulo em quatro novos triângulos conforme figura 9, garantindo-se assim a consistência na interface entre sub-regiões; 3) Otimização das malhas nas sub-regiões quadrilaterais (Lyra *et al.*, 1998a; Lyra *et al.*, 1998b). Como os novos triângulos obtidos através do processo de subdivisão nas regiões triangulares herdam as características do triângulo original, que já passaram por um processo de otimização durante a triangulação inicial do domínio, a utilização de uma nova otimização não representa grandes melhorias na qualidade dos elementos e não foi efetivado.

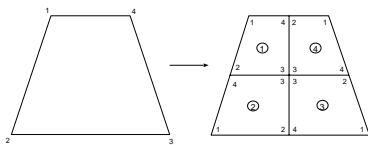


Figura 7: Subdivisão em sub-região quadrilateral

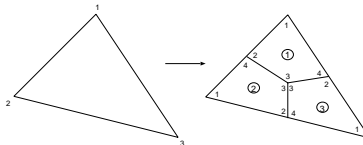


Figura 8: Subdivisão em sub-região quadrilateral

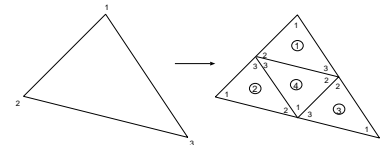


Figura 9: Subdivisão em sub-região triangular

Alguns exemplos, puramente acadêmicos, visando ilustrar a possibilidade de lidarmos com domínios onde tem-se sub-regiões distintas, podem ser vistos nas figuras 10 a 13. Nestas figuras temos malhas triangulares (figura 10), quadrilaterais (figura 11) ou mistas (figuras 12 e 13), todas malhas uniformes e com garantia da consistência entre diferentes sub-regiões.

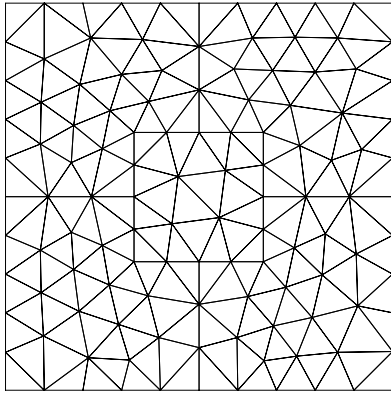


Figura 10: Subregião - malha triangular

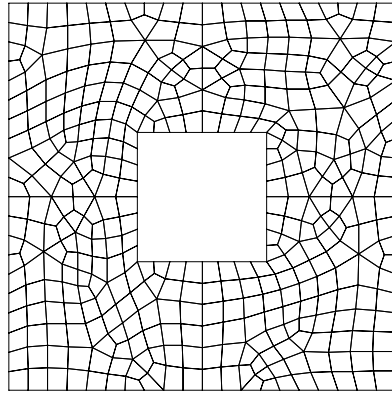


Figura 11: Subregião - malha quadrilateral

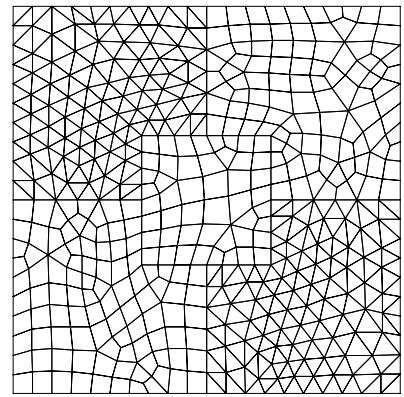


Figura 12: Subregião - malha mista

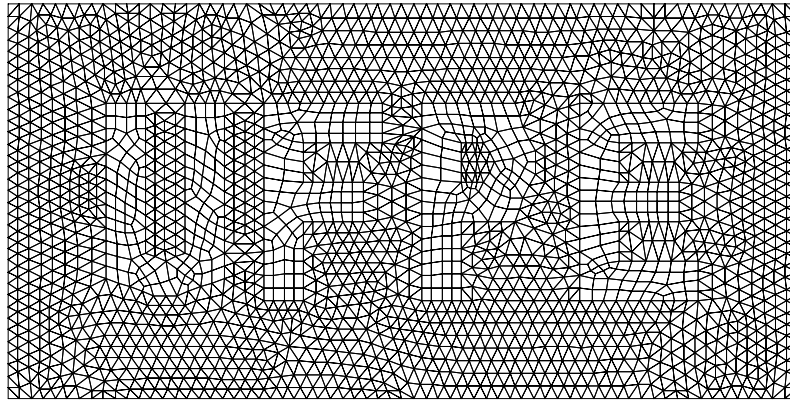


Figura 13: Subregião - malha mista

3.4 Alongamento Direcional

Na solução de problemas que envolvem fenômenos onde em certas regiões do domínio tem-se um comportamento eminentemente unidimensional (i.e. em apenas uma direção tem-se variações acentuadas do comportamento da solução do problema) torna-se pouco eficiente a utilização de malhas com elemento equilaterais e sem direção preferencial, i.e. malhas isotrópicas. Nestes casos é de extrema importância a possibilidade de se definir uma direção e fator de alongamento para os elementos nas proximidades das referidas regiões, levando-se assim a obtenção de malhas anisotrópicas. Tem-se desta forma uma maior eficiência já que concentramos graus de liberdade ao longo das direções com variação acentuada da solução representada pela malha. Aliadas a isto, existem evidências numéricas e matemáticas (Rippa, 1992) de que, pelo menos para elementos triangulares lineares, tem-se uma melhor aproximação da solução.

No gerador de malhas triangulares utilizado temos a flexibilidade de gerarmos malhas anisotrópicas fornecendo-se a direção e o fator de alongamento em cada nó da malha de fundo (ou *background*) (ver Peraire *et al* (1987)). Visando uma automatização necessária no processo de geração/adaptação (via *remeshing*) de malhas anisotrópicas em determinadas sub-regiões, procedemos da seguinte forma: 1) Definimos uma razão de alongamento, ou *stretching ratio*, (St_{min}) a partir da qual os triângulos são considerados “alongados”, definimos ainda um percentual mínimo (P_{min}) de triângulos com fator de alongamento superior a St_{min} para que consideremos a sub-região como anisotrópica; 2) calculamos a razão de alongamento (maior lado sobre altura correspondente) de cada triângulo pertencente à sub-região, e o percentual de triângulos “alongados” (Pe_{lem}), considerando que a sub-região é anisotrópica sempre que $Pe_{lem} > P_{min}$.

Na estratégia de obtenção de malhas quadrilaterais pelo processo de conversão de malhas

triangulares tem-se que os quadriláteros herdam certas características dos triângulos da malha inicial. Além disto, num quadrilátero qualquer não é tão evidente definir se este é ou não alongado. Diante deste fato, a informação, se devemos ter malha quadrilateral anisotrópica numa dada sub-região, é determinada na malha triangular inicial, conforme descrito no parágrafo anterior.

Quando do processo de conversão da malha triangular inicial, na etapa de união de dois triângulos adjacentes através da remoção da aresta comum para formar a malha intermediária, utilizamos normalmente um critério que só permite remover a aresta caso o quadrilátero a ser formado satisfaça critérios que garantam uma boa qualidade do mesmo (Lyra *et al.*, 1998a). Já no caso de malhas anisotrópicas, só removemos uma aresta caso esta seja simultaneamente o maior lado dos dois triângulos adjacentes à mesma, isto claro desde que o quadrilátero a ser formado satisfaça critérios mínimos de qualidade. A etapa de subdivisão dos elementos é a mesma tanto para malhas isotrópicas como anisotrópicas. A terceira etapa, tanto no caso de triângulos como quadriláteros, é feita com uma otimização seletiva da malha, i.e. nas regiões anisotrópicas apenas a estratégia de eliminação de nós onde concorrem três elementos é adotada. A utilização das estratégias de regularização Laplaciana e da permutação de diagonais formada por dois elementos adjacentes levariam a destruir a natureza anisotrópica da malha e só podem ser usadas nas sub-regiões isotrópicas. Na figura 14(a) temos uma malha triangular com direção preferencial (30°) e fator de alongamento (8). Na figura 14(b) temos a malha quadrilateral correspondente, onde os quadriláteros são alongados na direção desejada. Não temos, no entanto, um controle muito bom da qualidade dos elementos uma vez que não podemos utilizar de todas as estratégias de otimização da malha. Este problema pode ser minimizado com o uso de malhas mistas.

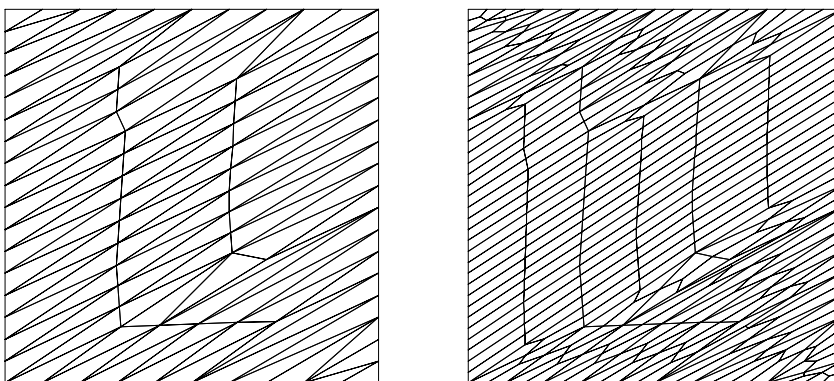


Figura 14: Malhas anisotrópicas com alongamento: a) Triangular; b) Quadrilateral

Na figura 15 o domínio considerado foi utilizado na simulação de um escoamento compressível e não-viscoso, regido pelo sistema de equações de Euler, onde temos um escoamento supersônico ($M= 2.0$) incidindo numa parede sólida horizontal, com ângulo de ataque de 10° (Lyra & Almeida, 2000). Na solução deste problema tem-se a formação de um choque oblíquo, cujo ângulo teórico é de $29,3^\circ$. A malha apresentada foi obtida fazendo uso do conhecimento teórico da solução. Uma idéia da solução deste problema, em termos da distribuição da densidade, encontrada utilizando-se a formulação estabilizada do MEF denominada de CAU (Almeida *et al.*, 2000), pode ser vista na figura 16. Um estudo detalhado do desempenho da formulação CAU na solução de problemas da dinâmica dos fluidos, utilizando-se malhas não-estruturadas triangulares, quadrilaterais e mistas, com ou sem direção e alongamento, será apresentado no trabalho de Lyra e Almeida (2000).

3.5 Acoplamento dos Módulos de Geração/Adaptação e Análise

A adaptação de malhas é imprescindível quando da simulação de problemas complexos e de grande porte. O procedimento para adaptação de malhas triangulares via *remeshing* que havia sido estendido para malhas quadrilaterais via uma estratégia em três etapas (Lyra *et al.*, 1998a) é inteiramente válido também para malhas com sub-regiões e mistas. Em linhas gerais a estratégia consiste em: 1) Transformar as sub-regiões quadrilaterais do domínio em malhas triangulares, subdividindo cada elemento em dois através de uma diagonal; 2) Gerar nova malha triangular

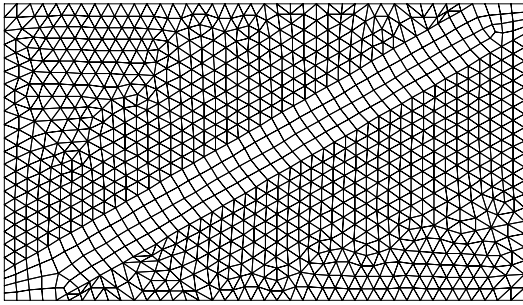


Figura 15: Malha Mista direcional e sem Alongamento

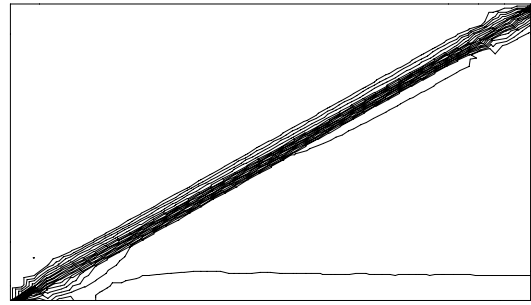


Figura 16: Isolinhas de densidade, obtidas utilizando-se a formulação CAU

de acordo com parâmetros ditados pela análise de erros; 3) Converter a malha triangular em malha quadrilateral nas sub-regiões correspondentes e subdivisão dos triângulos em quatro nas regiões triangulares. Na análise adaptativa via MEF utilizando-se *remeshing* tem-se um módulo de análise de erros que fornece ao módulo de geração/adaptação de malhas indicadores de erros e estimativas da densidade de malha, direção e taxa de alongamento desejada para os elementos em cada porção do domínio em estudo. O módulo de geração/adaptação fornece então uma nova malha para o módulo da análise, que consiste dos dados topológicos da malha e coordenadas dos nós da mesma. Isto, no entanto, não é suficiente, devemos garantir que as malhas adaptadas representem de forma adequada o problema em questão, i.e. a geometria, os carregamentos e condições de contorno necessárias ao programa de análise. No nosso gerador de malhas associamos todas as entidades topológicas da malha (nós, arestas, elementos) ao tipo e número da entidade geométrica (ponto, curva ou sub-região) a que pertence (ver tabela 1). Isto representa uma estrutura adequada para que a geometria, os carregamentos e condições de contorno, que são normalmente associados diretamente às entidades topológicas da malha fiquem indiretamente associados ao modelo geométrico do problema em estudo e não à malha inicial adotada. Utilizando-se das informações fornecidas, conforme descrito, o módulo de adaptação pode fornecer um novo modelo do MEF consistente com o modelo original.

Tabela 1: Relação entre entidades topológicas da malha e entidades geométricas do domínio

Entidade da malha	Entidade Geométrica Associada
Nó	Ponto
	Curva
	Sub-região
Aresta	Curva
	Sub-região
Elemento	Sub-região

Uma etapa fundamental no procedimento adaptativo via *remeshing* se refere à interpolação dos dados entre duas malhas não-estruturadas. Para tal precisamos de um algoritmo de busca eficiente para descobrir em que elemento da malha antiga se encontra cada nó da nova malha. Em seguida efetuamos a interpolação utilizando os valores da solução nos nós deste elemento para obter o valor no novo nó. Foi utilizado um algoritmo de busca baseado em uma estrutura de dados em árvore binária (Bonet & Peraire, 1990), que foi adequado para malhas triangulares, quadrilaterais e mistas. Associado à interpolação temos um erro que pode vir a desqualificar a solução principalmente no caso de análise adaptativa transiente onde o número de malhas geradas é portanto o número de interpolações entre malhas é muito grande. Diante disto, estendemos para quadriláteros lineares a possibilidade de se interpolar não apenas linearmente mas quadraticamente conforme descrito em De Sampaio *et al* (1993), para triângulos lineares.

4. CONCLUSÕES

O sistema computacional para geração de malhas apresentado é robusto e versátil permitindo lidar malhas triangulares, quadrilaterais ou mistas consistentes e em geometrias quaisquer. A geração de malhas quadrilaterais e mistas herda todas as flexibilidades da técnica de triangulação via avanço de frente, possibilitando um controle da densidade, gradação, forma dos elementos, assim como da direção e do fator de alongamento quando malhas anisotrópicas forem indicadas. O módulo de geração pode ser acoplado a um módulo de análise de erros permitindo assim uma redefinição automática da malha e do modelo do MEF. No presente, encontra-se em fase de desenvolvimento a incorporação da flexibilidade da definição automática de sub-regiões para possibilitar adaptação de malhas via *remeshing* local, i.e. sem a necessidade de geração de nova malha sobre todo o domínio, quando os parâmetros da malha só se modificarem apreciavelmente em sub-regiões do domínio. Este aspecto pode representar grande economia na simulação adaptativa de problemas transientes, bem como reduzir o erro de interpolação da solução entre malhas que é inerente a este processo adaptativo.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem: O. Hassan, K. Morgan and J. Peraire por disponibilizarem o gerador de malhas triangular utilizado. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) (processo 305263/88-9(RE)) e pela Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) através do contrato 77.97.0469.00.

6. REFERÊNCIAS

AGARD. 1992. *Special Course on Unstructured Grid Methods for Advection Dominated Flows*. Tech. rept. 787. AGARD, France.

ALMEIDA, R. C., FEIJÓO, R., GALEÃO, A. C., PRATA, C., & SILVA, R. S. 2000. Adaptive Finite Element Computational Fluid Dynamics Using an Anisotropic Error Estimator. *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, **182**, 379–400.

BONET, J., & PERAIRE, J. 1990. An Alternating Digital Tree (ADT) Algorithm for 3–D Geometric Searching and Intersection Problems. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **31**, 1–17.

DE SAMPAIO, P. A. B., LYRA, P. R. M., MORGAN, K., & WEATHERILL, N. P. 1993. Petrov–Galerkin Solutions of Incompressible Navier–Stokes Equations in Primitive Variables with Adaptive Remeshing. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **106**, 143–178.

LEE, C. K., & LO., S. H. 1994. A New Scheme for the Generation of Graded Quadrilateral Mesh. *Computers and Structures*, **52**, 847–857.

LYRA, P. R. M., & ALMEIDA, R. C. 2000. A Preliminary Study on the Performance of Stabilized Finite Element CFD Methods on Triangular, Quadrilateral and Mixed Unstructured Meshes. *In: Finite Elements in Flow Problems 2000 (FEF 2000)*. Trabalho aceito e a ser apresentado.

LYRA, P. R. M., DE CARVALHO, D. K. E., & WILLMERSDORF. 1998a. Adaptive Triangular, Quadrilateral and Hybrid Unstructured Mesh Generation with Classical Resequencing Techniques. *In: Proc. of the 4th World Conference on Comput. Mechanics (WCCM'98)*. In CD rom.

LYRA, P. R. M., DE CARVALHO, D. K. E., & WILLMERSDORF. 1998b. Geração de Malhas Não-Estruturadas Triangulares, Quadrilaterais e Mistas com a Incorporação de Técnicas de Re-Ordeção Clássicas. *Pages 19–16 of: Anais do V Congresso de Engenharia Mecânica do Norte-Nordeste (V CEM-NNE/98)*, vol. 3.

PERAIRE, J., VAHDATI, M., MORGAN, K., & ZIENKIEWICZ, O. C. 1987. Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations. *J. Comp. Phys.*, **72**, 449–466.

RIPPA, S. 1992. Long and Thin Triangles Can Be Good for Linear Interpolation. *SIAM J. Numer. Anal.*, **29**, 257–270.