

SIMULAÇÃO NUMÉRICA APLICANDO UM MODELO DE TURBULÊNCIA $k-\varepsilon$ NÃO LINEAR EM COORDENADAS GENERALIZADAS

Marcelo Assato

Marcelo J.S. de Lemos

Departamento de Energia - IEME

Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

12228-900 - São José dos Campos - SP - Brasil

E-mail: delemos@mec.ita.br

Resumo

Os modelos não lineares de turbulência tem mostrado uma melhor capacidade em simular alguns tipos de escoamento em relação aos modelos de difusividade turbulenta clássica ($k-\varepsilon$ standard) mantendo, ainda, as mesmas vantagens numéricas apresentadas pelos $k-\varepsilon$ standard. Os modelos isotrópicos mostram grandes imprecisões em simular escoamentos que apresentam uma acentuada curvatura em suas linhas de corrente (problemas envolvendo recirculação). No presente trabalho é mostrado uma melhora significativa na predição do escoamento com expansão abrupta (“backward-facing-step”) utilizando o modelo de viscosidade turbulenta $k-\varepsilon$ não linear desenvolvido por Shih et al, 1993. Resultados indicam que o modelo $k-\varepsilon$ standard subprediz o comprimento de separação em 25 a 30% com relação a dados experimentais, enquanto que o modelo não linear subprediz em torno de 3 a 5%. Detalhes dos resultados para o escoamento completamente desenvolvido num tubo, também, são apresentados.

Palavras-chave: Turbulência, Não Linear, Anisotropia, volumes finitos

1. INTRODUÇÃO

Entre os vários modelos de turbulência existentes, os modelos $k-\varepsilon$ linear ($k-\varepsilon$ standard) são os mais amplamente usados por cientistas e engenheiros para resolver problemas práticos. Porém, para alguns tipos de escoamento turbulento onde as diferenças das tensões de Reynolds desempenham um importante papel (como em escoamentos secundários em dutos de seção não circular), os modelos lineares, por sua característica isotrópica, fornecem consideráveis imprecisões. Para suprir estas deficiências, muitos esforços foram direcionados na inclusão de efeitos anisotrópicos na modelagem das tensões de Reynolds. Estes efeitos são tratados através de termos não lineares na relação tensão x taxa de deformação.

Os modelos de viscosidade turbulenta não lineares tiveram origem numa proposta geral feita por Pope, 1975. Porém, somente na década de 80 tais modelos tiveram grandes avanços com os trabalhos de Speziale, 1987, que desenvolveu uma expressão para as tensões de Reynolds contendo termos similares às tensões laminares de fluidos não Newtonianos (Rivlin, 1957). Os trabalhos de Yoshizawa, 1987, Rubinstein & Barton, 1990, Myong & Kasagi,

1990, Taubee, 1992, Shih et al, 1993 introduziram produtos quadráticos envolvendo os tensores taxa de deformação e vorticidade, com diferentes derivações e calibrações.

Neste trabalho, a fim de analisar os problemas que apresentam escoamentos com recirculação, são apresentados comparações entre os resultados para o escoamento com expansão abrupta (“backward facing step”), utilizando o modelo não linear de Shih et al, 1993 e o modelo k - ε linear (k - ε standard). Comparações também são feitas entre os modelos linear e não linear em relação a dados experimentais para o escoamento desenvolvido em tubo.

2. EQUAÇÕES DE TRANSPORTE E CONSTITUTIVA

As equações de conservação, de massa, momentum e escalar que descrevem o escoamento de fluidos, podem ser escritas, respectivamente, como:

$$\operatorname{div}\left(\rho \vec{v}\right)=0, \quad \operatorname{div}\left(\rho \vec{v} U_i - \vec{t}_i\right)=s_{u_i}, \quad \operatorname{div}\left(\rho \vec{v} \phi - \vec{q}_\phi\right)=s_\phi \quad (1)$$

Onde: \vec{t}_i contém a tensão agindo no direção- i , e s_{u_i} representa todos os termos fonte, incluindo o termo de pressão e gravitacional. O símbolo ϕ representa uma quantidade escalar, \vec{q}_ϕ é seu fluxo difusivo e s_ϕ representa a fonte ou sumidouro de ϕ . As equações para \vec{t}_i , \vec{q}_ϕ e s_{u_i} são dadas, respectivamente, por:

$$\vec{t}_i = \tau_{ij} \cdot \vec{i}_j, \quad \vec{q}_\phi = \Gamma_\phi \operatorname{grad}\phi = \frac{\mu_t}{\sigma_\phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y^j} \vec{i}_j \right), \quad s_{u_i} = -\frac{\partial P}{\partial y^i} \quad (2)$$

onde, $P = p + \rho gh + \frac{2}{3} \rho k$, e a expressão para a difusão tem sido usado com a ajuda do coeficiente de transporte Γ_ϕ , formado pela viscosidade turbulenta μ_t , dada por:

$$\mu_t = c_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3)$$

onde, na equação (3) $k = \overline{u'_i u'_i} / 2$ é a energia cinética de turbulência por unidade de massa, ε a taxa de dissipação de k , c_μ é uma constante e σ_ϕ o número de Prandtl/Schmidt para ϕ . A equação (1) representa também a equação de transporte para k e ε quando $\phi = k, \varepsilon$. Para k o termo fonte é $S_k = P_k - \rho \varepsilon$, onde P_k é o termo de produção de turbulência dada por:

$$P_k = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (4)$$

A expressão das tensões de Reynolds apresentada por Shih et al, 1993 são escritas como:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = & -\left(\mu_t S_{ij}\right)^L + \left(c_{1NL} \mu_t \frac{k}{\varepsilon} \left[S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} S_{kl} S_{kl} \delta_{ij}\right]\right)^{NL1} + \\ & \left(c_{2NL} \mu_t \frac{k}{\varepsilon} \left[\Omega_{ik} S_{kj} + \Omega_{jk} S_{ki}\right]\right)^{NL2} + \left(c_{3NL} \mu_t \frac{k}{\varepsilon} \left[\Omega_{lk} \Omega_{jk} - \frac{1}{3} \Omega_{lk} \Omega_{lk} \delta_{ij}\right]\right)^{NL3} \end{aligned} \quad (5)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, os sobrescritos na equação (5) indicam contribuições **L**inear e **N**ão **L**inear, S_{ij} e Ω_{ij} representam os tensores deformação e vorticidade, respectivamente, dados por:

$$S_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \Omega_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

No modelo de Shih et al, 1993 os valores de c_{1NL} , c_{2NL} e c_{3NL} são calculados como:

$$c_{1NL} = \frac{0.75/c_\mu}{1000 + s^3} \quad c_{2NL} = \frac{3.8/c_\mu}{1000 + s^3} \quad c_{3NL} = \frac{4.8/c_\mu}{1000 + s^3} \quad (7)$$

onde,
$$c_\mu = \frac{2/3}{1.25 + s + 0.9\Omega} \quad s = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}} \quad \Omega = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \Omega_{ij} \Omega_{ij}} \quad (8)$$

2.1 Discretização das equações em coordenadas generalizadas

O método numérico empregado para a discretização das equações é o método dos volumes finitos num sistema de coordenadas não-ortogonal. O algoritmo SIMPLE é utilizado para correção do campo de pressão. A figura abaixo mostra um volume de controle genérico com suas notações, distâncias e índices usados na transformação das equações para o sistema de coordenadas $\eta - \xi$.

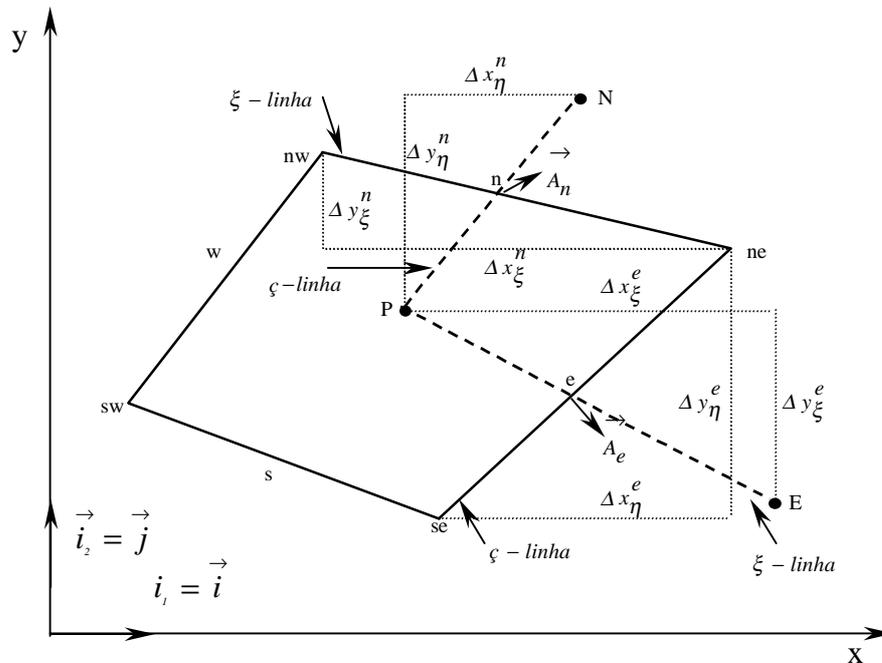


Figura (1) - Volume de controle e notações

Da Figura (1) é definido as seguintes distâncias geométricas usadas no processo de discretização:

$$\begin{aligned}\Delta x_{\eta}^e &= (x_{ne} - x_{se}), & \Delta x_{\xi}^e &= (x_E - x_P), & \Delta y_{\eta}^e &= (y_{ne} - y_{se}), & \Delta y_{\xi}^e &= (y_E - y_P), \\ \Delta x_{\xi}^n &= (x_{ne} - x_{nw}), & \Delta x_{\eta}^n &= (x_N - x_P), & \Delta y_{\xi}^n &= (y_{ne} - y_{nw}), & \Delta y_{\eta}^n &= (y_N - y_P) \\ \Delta x_{\xi}^P &= (x_e - x_w), & \Delta x_{\eta}^P &= (x_n - x_s), & \Delta y_{\xi}^P &= (y_e - y_w), & \Delta y_{\eta}^P &= (y_n - y_s).\end{aligned}\quad (9)$$

Todo o tratamento numérico e processo de discretização dos termos convectivo e difusivo linear e não linear, são mostrados em detalhes no trabalho feito por Assato & de Lemos, 1998. O tratamento numérico apresentado por Assato & de Lemos, 1998 para os termos difusivos não lineares referentes as equações de momento, foi totalmente explícito, determinados no termo fonte. Num subseqüente trabalho Assato & de Lemos, 1999 trataram os termos difusivos não lineares de forma implícita e explícita com a finalidade de melhorar a estabilidade numérica do código computacional.

Aplicando o modelo não linear, o termo de produção de turbulência P_k , na equação (4), também possui o termo linear acrescido dos termos não lineares:

$$P_k = (P_k)^L + (P_k)^{NL1} + (P_k)^{NL2} + (P_k)^{NL3} \quad (10)$$

O termo de produção de turbulência precisa ser discretizado no ponto central P do volume de controle. Assim, tem-se a seguinte forma final discretizada:

$$(P_k)^L = \frac{\mu_t^P}{(\Pi_P)^2} \left[2(\pi_a^P)^2 + 2(\pi_b^P)^2 + (\pi_c^P + \pi_d^P)^2 \right] \quad (11)$$

$$(P_k)^{NL1} = -c_{1NL} \mu_t^P \frac{k}{\varepsilon (\Pi_P)^3} \left\{ \frac{8}{3} (\pi_a^P)^3 + \frac{8}{3} (\pi_b^P)^3 + \frac{7}{3} (\pi_a^P + \pi_b^P) \left[(\pi_c^P + \pi_d^P)^2 - \frac{4}{7} (\pi_c^P \pi_d^P) \right] \right\} \quad (12)$$

$$(P_k)^{NL2} = 0 \quad (13)$$

$$(P_k)^{NL3} = -c_{3NL} \mu_t^P \frac{k}{\varepsilon (\Pi_P)^3} \left[\frac{1}{3} (\pi_a^P + \pi_b^P) (\pi_c^P - \pi_d^P)^2 \right] \quad (14)$$

onde,

$$\Pi_P = \Delta y_{\eta}^P \cdot \Delta x_{\xi}^P - \Delta y_{\xi}^P \cdot \Delta x_{\eta}^P$$

$$\pi_a^P = \Delta y_{\eta}^P (U_e - U_w) - \Delta y_{\xi}^P (U_n - U_s) \quad \pi_b^P = \Delta x_{\xi}^P (U_n - U_s) - \Delta x_{\eta}^P (U_e - U_w)$$

$$\pi_c^P = \Delta y_{\eta}^P (V_e - V_w) - \Delta y_{\xi}^P (V_n - V_s) \quad \pi_d^P = \Delta x_{\xi}^P (V_n - V_s) - \Delta x_{\eta}^P (V_e - V_w) \quad (15)$$

Os Δx^P 's e Δy^P 's são dados pela equação (9), e os c_{NL} 's não lineares do modelo de Shih et al, 1993 são calculados de acordo com as equações (7) e (8), sendo que as expressões discretizadas para s e Ω são as seguintes:

$$s = \frac{k}{\varepsilon \Pi_p} \sqrt{2(\pi_a^P)^2 + 2(\pi_d^P)^2 + (\pi_b^P + \pi_c^P)^2}, \quad \Omega = \frac{k}{\varepsilon \Pi_p} (\pi_b^P - \pi_c^P) \quad (16)$$

3. RESULTADOS

3.1 Escoamento turbulento em um canal com expansão abrupta

O escoamento turbulento num canal com expansão abrupta tem sido usado como um caso teste padrão para quantificar a performance de modelos de turbulência. Muitas vezes toma-se como referência a predição da localização do ponto de recolagem (“reattachment”) do escoamento após a expansão. A figura a seguir ilustra o tipo de escoamento.

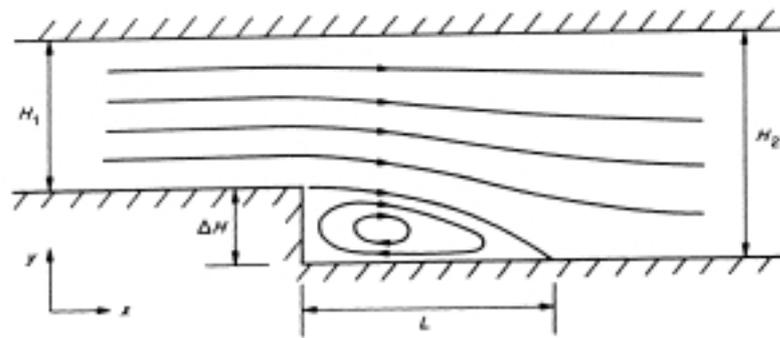


Figura (2) - Canal com expansão abrupta

Onde $\Delta H = H_2 - H_1$ representa a altura do degrau e L é o comprimento de separação do escoamento. No presente trabalho, o número de Reynolds de entrada igual a 132000, e a taxa de expansão $H_2 / H_1 = 1,5$ com $H_2 = 3$ e $H_1 = 2$. Para todas as malhas utilizadas (malhas ortogonais: 120x30, 220x30 e uma malha não-ortogonal: 120x30) foi notado os mesmos resultados. O modelo $k-\varepsilon$ linear produziu um comprimento de separação de $L / \Delta H = 5,1$, enquanto que o modelo $k-\varepsilon$ não linear de Shih et al, 1993 forneceu um comprimento de separação de $L / \Delta H = 6,8$. Valores experimentais apresentados por Kim et al, 1980 indicam que $L / \Delta H = 7$. Nota-se, portanto, uma grande melhora, de 27% de desvio com modelo isotrópico para 3% com o modelo anisotrópico. A seguir é mostrado o campo da velocidade média \bar{U} / U_0 em várias seções do canal. A velocidade U_0 é a velocidade média de entrada.

Da Figura (3), pode-se notar também que ocorre uma melhor concordância do campo da velocidade média aplicando o modelo não linear. O mesmo ocorre para o campo da intensidade turbulenta adimensional $(\overline{u'u'})^{1/2}$ mostrada na Figura (4).

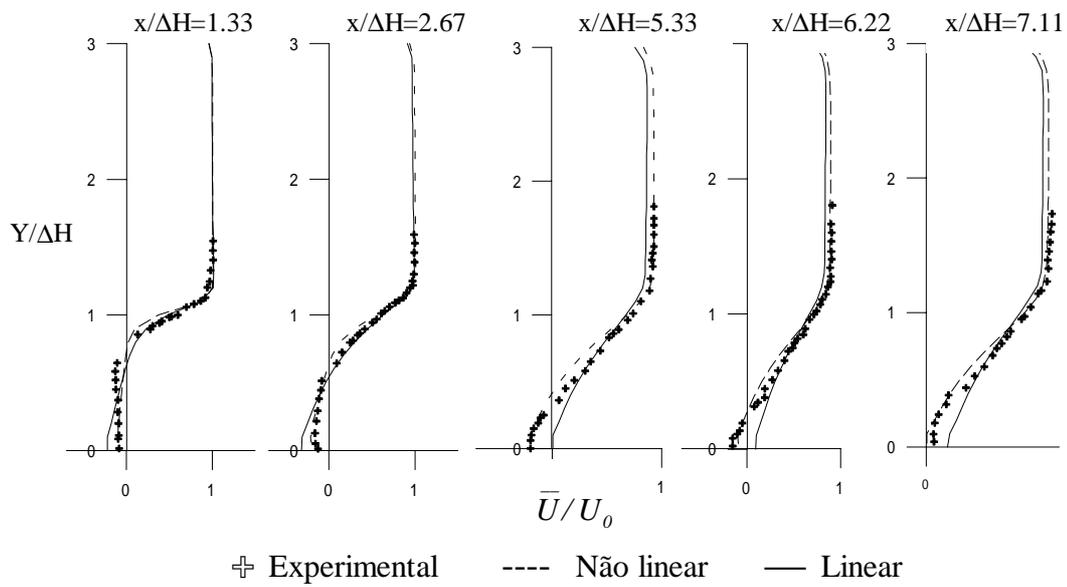


Figura (3) – Campo de velocidade média

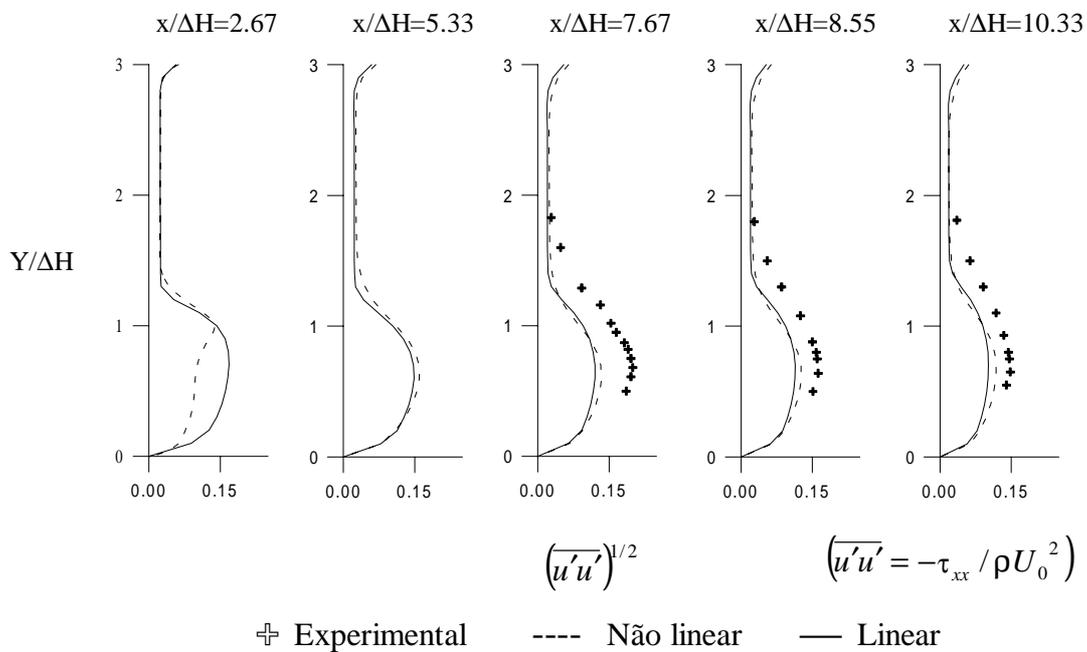


Figura (4) – Intensidade turbulenta adimensional

3.2 Escoamento turbulento completamente desenvolvido em tubo

Aqui o problema do escoamento completamente desenvolvido em tubo é analisado. As principais influências dos termos não lineares na predição de algumas características do escoamento são abordadas. Por exemplo, em escoamento completamente desenvolvido em tubo, o modelo linear prediz que as tensões de Reynolds são todas iguais, isto é:

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} , \quad (17)$$

o que contradiz o experimento de Laufer, 1951 que indica:

$$\frac{\|\tau_{yy} - \tau_{xx}\|}{\|\tau_{xx}\|} \approx 0.5, \quad \frac{\|\tau_{yy} - \tau_{xx}\|}{\|\tau_{xy}\|} \approx 2.5 \quad (18)$$

Tais erros no cálculo da diferença das tensões normais $(\tau_{yy} - \tau_{xx})$ podem produzir altas imprecisões em escoamento com recirculação, e na incapacidade de simular escoamentos secundários presentes em dutos de seção não-circular. Na Figura (5) pode-se notar a comparação dos valores computados da diferença das tensões normais de Reynolds obtido do modelo não linear de Shih et al, 1993 com os dados experimentais de Laufer, 1951. É interessante ressaltar que o modelo $k-\varepsilon$ standard prediz uma diferença das tensões normais de Reynolds nula.

Os resultados para este caso, foram obtidos considerando $Re=50000$, $L=165R$, sendo L o comprimento do tubo e $R=0.05$ o raio do tubo. A malha utilizada foi de 165×20 .

A Figura (6)(a) mostra o campo da energia cinética turbulenta e a Figura (6)(b) o campo da taxa de dissipação da energia cinética turbulenta, ambas mostrando a comparação entre os valores calculados pelos modelos linear e não linear. Nota-se uma pequena melhora na predição na região central do tubo usando o modelo não linear, divergindo em relação aos dados experimentais próximo a parede.

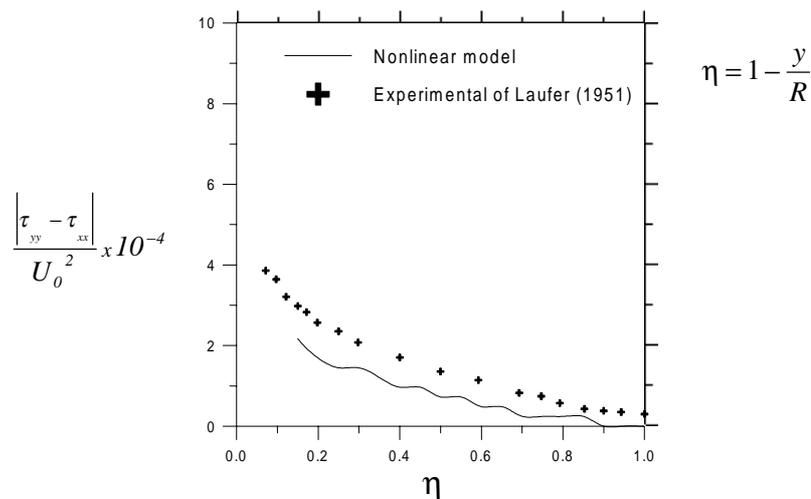


Figura (5): Diferença das tensões normais de Reynolds

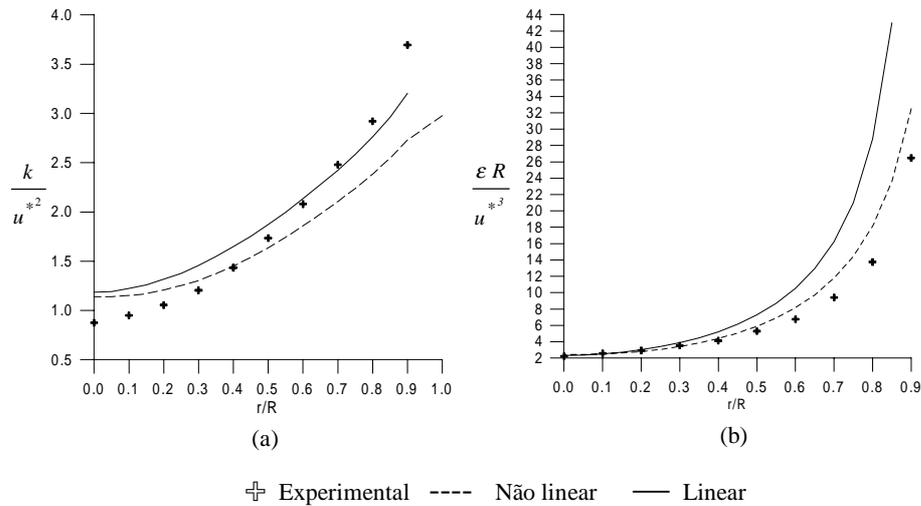


Figura (6): (a) Campo de k adimensional, (b) Campo de ε adimensional.

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado melhorias na predição de escoamentos turbulentos onde as tensões normais de Reynolds desempenham um importante papel, como o caso do back-step analisado utilizando um modelo de turbulência não linear. Foi notado que o modelo não linear de Shih et al, 1993, prediz o ponto de separação com um desvio em torno de 3% em relação a dados experimentais de Kim et al, 1980, enquanto que o modelo linear apresenta um desvio em torno de 25 a 30%. Também foi notado uma melhor concordância dos resultados em relação ao experimental, para o escoamento completamente desenvolvido em tubo, usando o modelo não linear, sendo possível determinar a diferença das tensões normais de Reynolds.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq a ajuda financeira durante a preparação deste trabalho.

5. REFERÊNCIAS

- Assato, M. & de Lemos, M.J.S., 1998, “Development of a non-linear turbulence model for recirculating flows using generalized coordinates”, 7th Encit – Brazilian Congress of Engineering and Thermal Sciences, vol. 2, Rio de Janeiro, pp. 1386-1391.
- Assato, M. & de Lemos, M.J.S., 1999, “Tratamento Numérico Implícito para a Implementação de um Modelo Não Linear de Turbulência em Coordenadas Generalizadas”, XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Águas de Lindóia, SP.
- Kim, J., Kline, S.J. & Johnston, J.P., 1980, “Investigation of a reattaching turbulent shear layer: flow over a backward-facing step”, ASME J.Fluids Engng, 102, pp. 302-308.
- Laufer, J., 1951, “Investigation of turbulent flow in two-dimensional channel”, NACA TN 1053.

- Myong, H.K. & Kasagi, N., 1990, "Prediction of anisotropy of the near wall turbulence with an anisotropic low-Reynolds-number $K-\epsilon$ turbulence model", J. Fluids Eng., 112, pp. 512-524.
- Pope, S. B., 1975, "A more general effective-viscosity hypothesis", J. Fluid Mech., 72, pp.331-340.
- Rivlin, R.S., 1957, "The relation between the flow of non-Newtonian fluids and turbulent Newtonian fluids", Q. Appl. Maths 15, 212.
- Rubinstein, R. & Barton, J.M., 1990, "Renormalization group analysis of the stress transport equation", Phys Fluids A 2, pp. 1472.
- Shih, T.H., Zhu, J. & Lumley, J.L., 1993, "A realisable Reynolds stress algebraic equation model", NASA TM-105993.
- Speziale, C.G., 1987, "On nonlinear $k-l$ and $k-\epsilon$ models of turbulence", J. Fluid Mech., vol. 176, pp. 459-475.
- Taubee, D.B., 1992, "An improved algebraic Reynolds stress model and corresponding nonlinear stress model", Phys. Fluids A 4, pp. 2555-2561.
- Yoshizawa, A., 1987, "Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy viscosity representation", Phys. Fluids, 27, pp. 1377-1387.

Abstract:

This work presents numerical results for simulating turbulent recirculating flows. The so-called non-linear models are used as they perform better than the eddy-diffusivity models. Flow over a backward-facing step is chosen for comparing different cases. Results with the standard $k-\epsilon$ model underestimates the reattachment length in about 25 to 30%. The non-linear model reduces such uncertainty to less than 5%. Detailed results for fully developed flow in a circular pipe are also reported.