

# UMA LEI DO ATRITO PARA ESCOAMENTOS TURBULENTOS SANGUÍNEOS: UTILIZANDO O MODELO REOLÓGICO DE CASSON

**Daniel Onofre de Almeida Cruz.**

**Jerson Rogério Pinheiro Vaz**

**Emanuel Negrão Macêdo**

Universidade Federal do Pará, Centro Tecnológico, Departamento de Engenharia Mecânica,  
66075-900, Belém, Pa, Brasil. E-mail: [doac@ufpa.br](mailto:doac@ufpa.br)

## **Resumo**

A análise de escoamentos turbulentos de fluidos não-Newtonianos permanece, ainda hoje, como um dos grandes problemas da mecânica dos fluidos. Apesar de sua importância, poucos trabalhos são encontrados na literatura que estudam detalhadamente os fenômenos relativos ao escoamento de fluidos não-Newtonianos em regime turbulento. Dentre os principais fenômenos envolvidos com esse tipo de análise, destaca-se o fluxo sanguíneo em veias e artérias. O estudo do fluxo de sangue é de grande importância não apenas do ponto de vista científico, como também na análise de questões mais práticas envolvendo o projeto e construção de órgãos artificiais e, o diagnóstico de enfermidades. Vários modelos reológicos são empregados na modelagem do escoamento de sangue, dentre eles podemos destacar o de Casson como estando entre os mais populares. No presente trabalho, uma extensão da equação do atrito para fluidos Newtonianos aplicável nos escoamentos turbulentos em dutos será desenvolvida para o caso do escoamento de sangue, utilizando o modelo reológico de Casson. O fator importante desta nova lei do atrito é a influência do escoamento empistonado no fator de atrito. Será mostrado, que a formulação proposta envolve uma relação logarítmica que contém a expressão clássica Newtoniana como um caso particular. Uma comparação com dados experimentais será feita apresentando boa concordância.

**Palavras-Chave:** Hemodinâmica, Turbulência, Lei do Atrito

## **1. INTRODUÇÃO**

A análise do escoamento turbulento de fluidos não-Newtonianos, apresenta um grande desafio a ciência da mecânica dos fluidos. Dentre os principais problemas relativos a esse tipo de fenômeno, está o escoamento de sangue em veias e artérias. A descrição adequada desse tipo de escoamento vem se tornando cada vez mais importante, principalmente na obtenção do diagnóstico de patologia e no dimensionamento e confecção de órgãos artificiais. Apesar dessa importância são poucos os trabalhos encontrados na literatura que tratam do fluxo sanguíneo, especialmente no caso turbulento. Uma grande dificuldade da análise do fluxo de

sangue turbulento, é devido a maioria dos parâmetros e relações características do escoamento turbulento, como por exemplo, a conhecida correlação de Colebrook (1938) para escoamento em dutos, terem sido obtidas utilizando a hipótese Newtoniana como modelo reológico. Vários resultados experimentais (Liesch 1986 Rodkiewicz, C.M 1990) indicam que o sangue deve se comportar como fluido não Newtoniano mesmo em largas artérias a que o fluxo sanguíneo somente pode ser tratado de modo semelhante ao caso Newtoniano quando submetido a elevadas tensões de cisalhamento (Caro, C. G. et al. 1978)

No presente trabalho será apresentada uma versão da lei da parede válida para escoamentos de sangue, deduzida utilizando o modelo reológico de Casson (1959) para a descrição das tensões moleculares. O modelo de Casson tem sido largamente utilizado nas simulações numéricas do fluxo sanguíneo mostrando bons resultados (S. Oka, 1965. A. Brasil *et al.* 1998). Na obtenção dessa lei será utilizada uma nova velocidade característica a qual contém a clássica velocidade de fricção como caso particular (Cruz & Vaz 1999). A dedução do resultado será feita sem a utilização de um modelo de turbulência para a descrição das tensões de Reynolds. Uma relação para o cálculo da perda de carga do escoamento turbulento de sangue no interior de dutos, fundamentada na lei da parede proposta, será mostrada, nessa nova relação os efeitos da região de escoamento empistonado no centro do duto serão considerados. Os resultados obtidos serão comparados com o caso Newtoniano visando analisar a influência do limite de escoamento do fluido sobre o escoamento.

## 2. A LEI DA PAREDE SANGUÍNEA

O escoamento de sangue pode ser analisado como sendo uma suspensão de partículas (células) em um líquido (plasma). A descrição das tensões moleculares nesse tipo de fluxo é bastante complexa, tendo motivado a criação de vários modelos reológicos para a descrição do fenômeno. Dentre esses modelos a equação constitutiva proposta por Casson (1959) destaca-se como estando entre as mais populares. Nessa formulação as tensões moleculares são descritas, no presente caso, de acordo com a expressão:

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{\bar{\lambda} \frac{\partial u}{\partial y}} \quad (1)$$

onde  $\tau$  é a tensão na de cisalhamento,  $\tau_0$  é o limite de escoamento do fluido,  $\bar{\lambda}$  representa a viscosidade e  $u$  e  $y$  são a velocidade tangente a superfície sólida e a coordenada normal a essa superfície respectivamente. Será deduzido abaixo uma expressão para o perfil médio de velocidade do escoamento turbulento próximo a superfícies sólidas. No presente caso o escoamento ocorre de forma incompressível, obedecendo as condições de deslizamento e não penetrabilidade, atendendo as hipóteses de camada limite, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial y} \gg \frac{\partial}{\partial x} \quad (2)$$

Como primeiro passo para a obtenção da lei da parede deve-se, inicialmente, descobrir as variáveis características do escoamento próximo a superfície sólida. Isto pode ser feito analisando-se o perfil de velocidade do escoamento na subcamada viscosa, muito próximo a parede. Nessa região, o transporte de quantidade de movimento ocorre, causado principalmente pelas tensões moleculares, uma vez que o transporte de quantidade de movimento por convecção e pelas tensões turbulentas são desprezíveis devido as condições de

não deslizamento e não penetrabilidade. Portanto nessa região as equações da conservação da quantidade de movimento, podem ser escritas da seguinte forma, de acordo com a Eq.(2):

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Substituindo a Eq.(1) em (3) e resolvendo a integral, tem-se:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{\tau_o}{\rho} + 2\sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \lambda \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (4)$$

onde  $\tau_w$  é a tensão na parede,  $\rho$  é a massa específica e  $\lambda = \bar{\lambda}/\rho$ .  $\bar{u}$  representa o perfil de velocidade médio de escoamento. Desenvolvendo-se a Eq.(4) para o gradiente médio de velocidade obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\left( \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \right)^2}{\lambda} \quad (5)$$

A qual fornece após a integração e a aplicação da condição de não deslizamento, a seguinte relação para o perfil de velocidade na subcamada viscosa:

$$\bar{u} = \frac{\left( \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \right)^2}{\lambda} y \quad (6)$$

A Eq.(6) pode ser rescrita da seguinte forma adimensional:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}} = \frac{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}}{\lambda} y \quad (7)$$

A relação (7) mostra que a velocidade média do escoamento de sangue na subcamada viscosa varia linearmente, de modo semelhante ao caso Newtoniano. Contudo, a velocidade característica utilizada na adimensionalização do perfil médio de velocidade fica, neste caso, sendo descrita pela relação abaixo:

$$u_c = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \quad (8)$$

onde  $u_c$  representa a velocidade característica a qual se reduz à relação válida para o caso Newtoniano quando  $\tau_o = 0$ , ou seja:

$$u_c = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (9)$$

A mesma análise é válida para o caso do comprimento característico, utilizado na adimensionalização da coordenada normal à parede, o qual é dado por:

$$L_c = \frac{\lambda}{u_c} \quad (10)$$

Uma vez obtidos os parâmetros característicos do escoamento na subcamada viscosa, pode-se então, utilizando argumentos de análise dimensional, avaliar o comportamento do perfil médio de velocidade na região, onde as tensões turbulentas são as principais responsáveis pelo transporte de quantidade de movimento (Rosenhead, 1988) que a vorticidade média  $\bar{w}$  deve ser função dos seguintes parâmetros:

$$\bar{w} = f(\bar{w}_p, L_c, y) \quad (11)$$

onde  $\bar{w}_p$  é a vorticidade média na parede, isto implica que a vorticidade média na região completamente turbulenta junto à superfície sólida deve ser descrita por:

$$\bar{w} = \frac{1}{k} \frac{\bar{w}_p L_c}{y} \quad (12)$$

onde  $1/k$  é um coeficiente de proporcionalidade ( $k=0,41$ ) e utilizando a hipótese de camada limite podemos rescrever a relação (12) da forma:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{k} \frac{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}}{y} \quad (13)$$

Resolvendo a equação acima obtêm-se a seguinte relação para o perfil de velocidade:

$$\bar{u} = \frac{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} - \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}}}{k} \left[ \ln \left( \frac{y}{L_c} \right) + 2,2 \right] \quad (14)$$

Na expressão acima, a constante de integração foi obtida assumindo-se que a equação (14) deve descrever o caso Newtoniano quando  $\tau_o = 0$ .

### 3. A EQUAÇÃO DO ATRITO

Uma relação para o coeficiente de atrito do fluxo sanguíneo no interior de um duto de raio  $R$  pode ser obtida utilizando-se a equação (14) na sua forma adimensional, a qual é mostrada abaixo para  $y = R - a$ :

$$\frac{1}{\sqrt{f} - \sqrt{\frac{2Y}{Re}}} = 4,0743 \log \left[ (1 - \tilde{a}) \left( \sqrt{\frac{Re^2 f}{8}} - \sqrt{\frac{Re Y}{4}} \right) \right] + \frac{5,5}{\sqrt{2}} - \frac{(1 - \tilde{a})(3 + \tilde{a})}{k\sqrt{8}} \quad (15)$$

onde,  $f$  é o fator de atrito de Fanning,  $\tilde{a}$  é o raio adimensional da região de escoamento empistonado,  $Y$  é o limite de escoamento adimensional e  $Re$  é o número de Reynolds, baseado no diâmetro do duto ( $D$ ) e na velocidade média  $V$ . A obtenção da equação (15) foi feita de modo semelhante a dedução da equação de Nikuradse para tubos lisos e fluidos Newtonianos. Sendo que neste caso uma nova velocidade característica foi introduzida a qual depende do limite de escoamento do fluido. Além disso, a equação (15) leva em consideração o efeito da região de escoamento empistonado representada por  $\tilde{a}$ , onde este parâmetro é função de o limite de escoamento adimensional  $Y$  do fluido.

$$\tilde{a} = \frac{2Y}{f Re} \quad (16)$$

onde, o limite de escoamento adimensional é dado por:

$$Y = \frac{\tau_o D}{\lambda V} \quad (17)$$

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

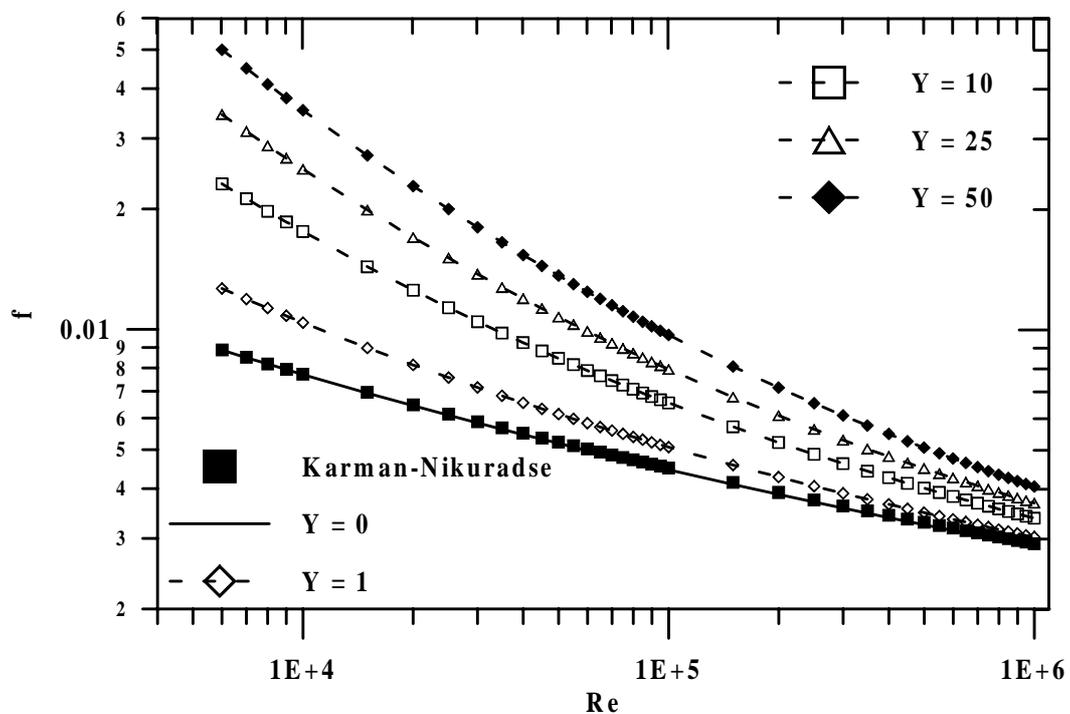
Nesta fase, será feita uma análise da influência do limite de escoamento do fluido sobre a tensão na parede e no perfil de velocidade da equação (14). Na tabela 1 é mostrada a variação do fator de atrito de Fanning para vários valores do número de Reynolds e do limite de escoamento adimensional  $Y$ .

Nota-se o crescimento do fator de atrito provocado pelo aumento do limite de escoamento causando uma maior dificuldade do escoamento do sangue. Este fato indica que para valores elevados do limite de escoamento o trabalho desenvolvido por uma bomba (coração) para proporcionar o escoamento do sangue deve também ser elevado principalmente em dutos de pequenos diâmetros ou baixos números de Reynolds como pode ser visto na tabela 1. Outra importante consequência, seria os danos causados pelo aumento de pressão necessário para permitir o escoamento de sangue com grandes fatores de atrito. Este fato poderia causar o rompimento de veias ou artérias levando a graves consequências. Neste caso a equação (15) poderia ser utilizada para a obtenção de valores ou intervalos aceitáveis do limite de escoamento relacionando-se a pressão necessária para o escoamento com os valores máximos de tensão suportáveis pelas paredes das artérias.

**Tabela 1.** Fator de atrito de Fanning em função do número de Reynolds (  $Re$  ) e do limite de escoamento adimensional (  $Y$  )

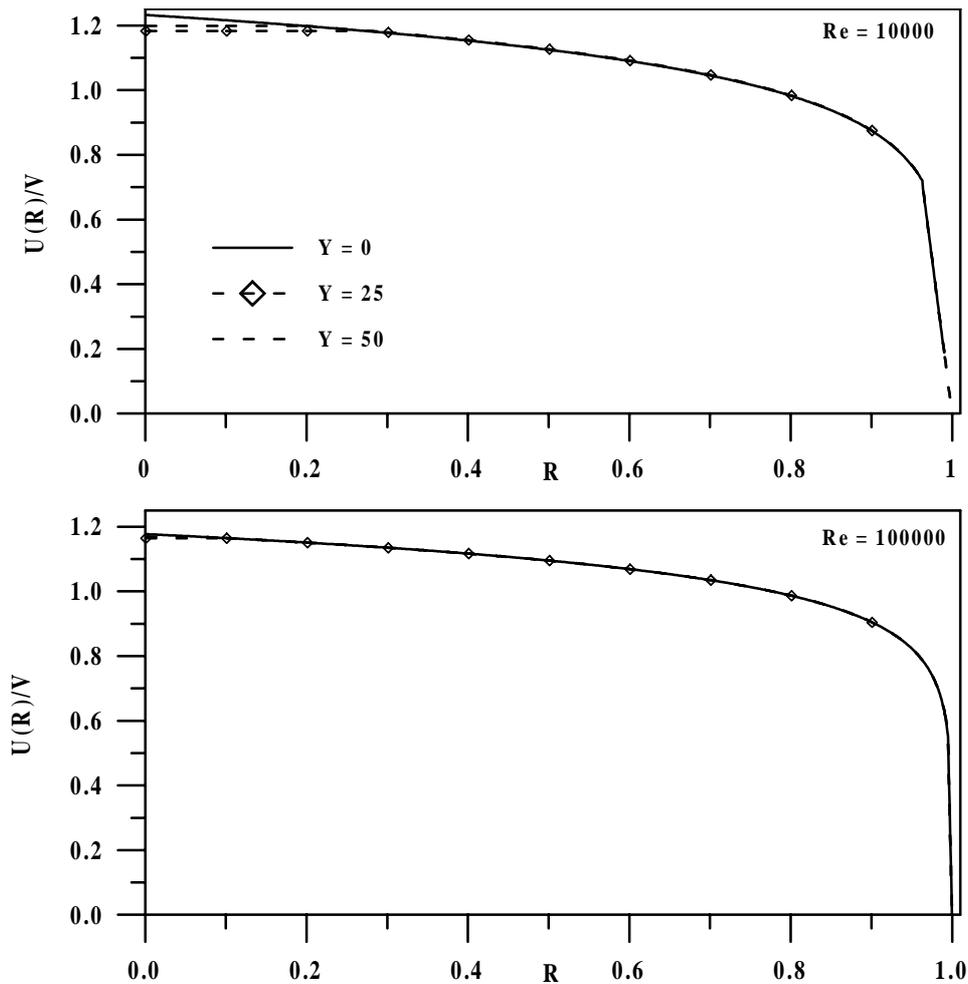
Y					
Re	0	1.	10	25	50
10000	7.7078E-3	1.0391E-2	1.7562E-2	2.5136E-2	3.5311E-2
50000	5.1851E-3	6.1360E-3	8.4656E-3	1.0740E-2	1.3628E-2
100000	4.4564E-3	5.0735E-3	6.5446E-3	7.9420E-3	9.6792E-3

Na figura 1 é mostrada a distribuição do fator de atrito de Fanning em função do número de Reynolds para vários valores do limite de escoamento adimensional (  $Y$  ), assim como a comparação com os resultados da equação de Karman-Nikuradse. Pode-se observar uma excelente concordância dos resultados para  $Y = 0$  com os de Karman-Nikuradse. É notado uma forte influência do parâmetro  $Y$  no fator de atrito.



**Figura 1.** Fator de Atrito de Fanning em função do número de Reynolds (  $Re$  ) e do Limite de Escoamento Adimensional do Fluido (  $Y$  ).

Na figura 2 é mostrada uma comparação entre os perfis de velocidade. Pode-se notar que a influencia da região de escoamento empistonado no centro do duto é menos efetiva para grandes números de Reynolds. Este fato pode ser também notado observando-se a equação (16) na qual aparece claramente a relação inversa entre o parâmetro  $\tilde{a}$  e o número de Reynolds.



**Figura 2.** Perfis de Velocidade para  $Re = 10000$  e  $100000$  e  $Y = 0, 25$  e  $50$ .

## 5. CONCLUSÃO

No presente trabalho uma análise do escoamento turbulento de sangue próximo a superfícies sólidas foi apresentada, utilizando o modelo reológico de Casson para descrever o comportamento das tensões viscosas. Foi deduzida uma expressão para descrever a variação da velocidade média na região completamente turbulenta, sem a utilização de um modelo de turbulência para descrever as tensões turbulentas. Através dessa equação, foi deduzida uma relação para o fator de atrito de Fanning válida para o escoamento turbulento de sangue em dutos a qual considera os efeitos da região de escoamento empistonado no centro do duto. Foi mostrado que o acréscimo da tensão inicial provoca um aumento do fator de atrito o que pode causar diversas patologias.

A Eq. (16) pode ser utilizada em diversas aplicações, desde condição de contorno para escoamentos turbulentos complexos como os que ocorrem no interior do coração e através de válvulas, artificiais ou não, até casos mais simples como o cálculo da queda de pressão provocada pelo escoamento de sangue no interior de dutos. Vale ressaltar que uma comparação detalhada com dados experimentais deve ser feita, principalmente para a determinação do limite de escoamento.

## REFERÊNCIAS

- Colebrook, C. F., 1938, Turbulent flow in Pipes, vol. 11, pp. 133-156, London.
- Casson, N., 1959, In rheology of disperse systems, P. 84, ed. Pergamon Press C. C. Mill, New York.
- Oka, S., 1965, In Proc. of the Fourth International Congress on Rheology, ed. AL. Copley, part. 4, PP. 81-92, Wiley, New York.
- Brasil, A. C. P. J., Rosa, O. L. S. e Severo, C. A., 1998, Simulação por elementos finitos de escoamento de sangue, V Congresso Norte Nordeste de Engenharia Mecânica, Ceará.
- Rosenhead, L., 1988, Laminar boundary layers, ed. Dover Publications, Inc., New York.
- Stoltz, J.F., Strelfe, F Largan, A., 1970 Étude des courbes d'écoulement pour un fluide obéissant à l'équation de Casson. Application au sang, Vol.9, N 1 Journal de Mécanique.
- Rodkiewicz, C.M., Sinha, P. And Kennedy, J.S., 1990 On the Application of a Constitutive Equation for whole human blood, vol. 112, Journal of Biomechanical Engineering ASME.
- Liepsch, D. W., 1986 Flow in Tubes and Arteries A comparison, Biorheology, vol 23, p. 395.
- Caro, C. G., Pedley, T.J., Schroter, R.C. and Seed, W. A. 1978 The Mechanics of Circulation Chapter 10, p. 177 Oxford University Press Oxford.