

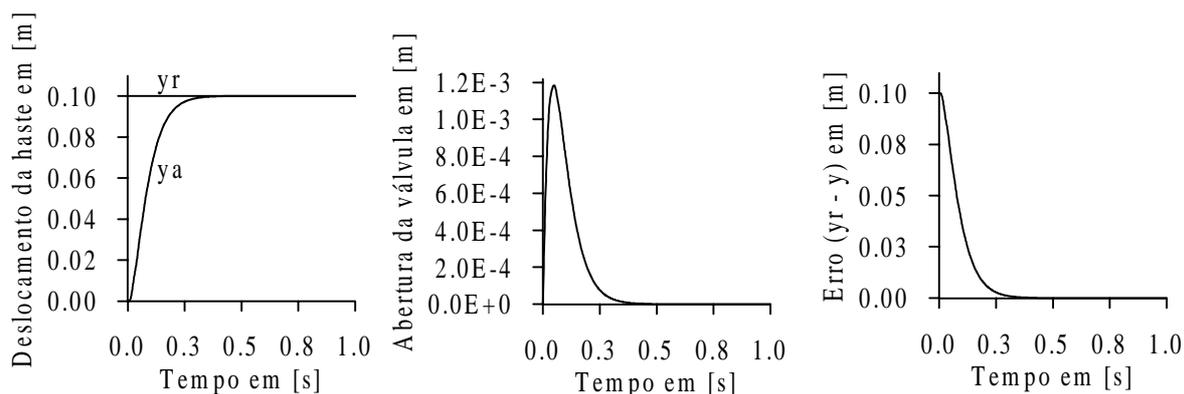
**Figura 6.** Deslocamento da haste do pistão, abertura da válvula e o erro de acompanhamento.

## 6. CONCLUSÕES

O controlador projetado pela técnica LQG em cascata com a planta resultou num sistema que apresentou bons resultados uma vez que as especificações de desempenhos no domínio do tempo e no domínio da frequência foram satisfeitas. Verificou-se que o sistema apresentou uma boa robustez com relação ao acompanhamento dos sinais de referência.

## 8. BIBLIOGRAFIA

- Ackermann, J., 1993, “Robust Control Systems With Uncertain Physical Parameters”, 3<sup>a</sup> Ed., Springer – Verlag London Limited.
- Basar, T., Bernhard, P.H., 1995, “Optimal Control and Related Minimax Design Problems”, 2<sup>a</sup> Ed., Birkhäuser Boston.
- Cruz, J.J., 1996, “Controle Robusto Multivariável”, Ed. Universidade de São Paulo, S. Paulo, Brasil.
- Feinstein, J., 1979, “Teoria dos Sistemas de Controle Enfoque por Variáveis de Estado”, Rio de Janeiro, Ed. Campus Ltda.
- Lewis F.L., Syrmos V. V., 1995, “Optimal Control”, 2<sup>a</sup> Ed, New York, Ed. John Wiley & Sons, Inc.
- Kuo, B.C., 1985, “Sistemas de Controle Automático”, 4<sup>a</sup> Ed., Rio de Janeiro, Ed. Prentice Hall do Brasil.
- Merrit, H. E, 1976, “Hydraulic Control Systems”, New York, Ed. John Wiley & Sons, Inc.
- Ogata, K., 1993, “Engenharia de Controle Moderno”, 2<sup>a</sup> Ed., Rio de Janeiro, Ed. Prentice Hall do Brasil.
- Paim, C.C., 1997, “Técnicas de Controle Aplicadas a um Atuador Hidráulico”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, S.C., Brasil.
- Shahian, B., Hassul, M., 1993, “Control System Design Using Matlab”, Rio de Janeiro, Ed. Prentice Hall.
- Skogestad, S., Postlethwai T.I., 1996, “Multivariable Feedback Control Analysis and Design”, New York, Ed. John Wiley & Sons, Inc.
- Zhou, K., Doyle, J.C., Glover, K, 1995, “Robust and Optimal Control”, New Jersey, Ed. Prentice Hall.



**Figura 4.** Deslocamento da haste, abertura da válvula e o erro de acompanhamento para uma entrada degrau.

## 5. SIMULAÇÃO E RESULTADOS

Para avaliar o acompanhamento de sinais de referência utilizou-se uma função polinomial e uma senoidal, ambas com amplitude máxima de 0,1m, conforme abaixo:

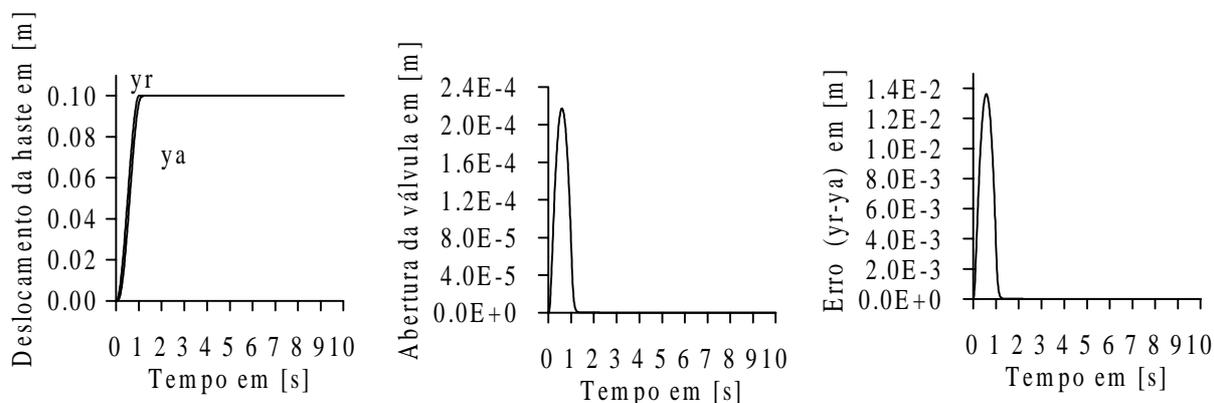
Função polinomial:

$$y_r(t) = \begin{cases} 0,3t^2 - 0,2t^3 & \text{para } 0 \leq t \leq 1s \\ 0,1 & \text{para } 1 < t \leq 10s \end{cases} \quad (15)$$

Função senoidal:

$$y_r(t) = 0,1 \cdot \text{sen}(0,5 \cdot \pi \cdot t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq 10s \quad (16)$$

A fig.(5) mostra os resultados para a entrada de referência polinomial definida pela eq.(15). A abertura da válvula máxima foi de  $2,2 \times 10^{-4}$  m com um erro máximo de acompanhamento de sinal igual a  $13,4 \times 10^{-3}$  m. A fig.(6) apresenta os resultados para a entrada de referência senoidal definida pela eq.(16). A abertura máxima da válvula foi igual a  $2,3 \times 10^{-4}$  m para um erro máximo de acompanhamento de sinal de  $14,1 \times 10^{-3}$  m.



**Figura 5.** Deslocamento da haste do pistão, abertura da válvula e o erro de acompanhamento.

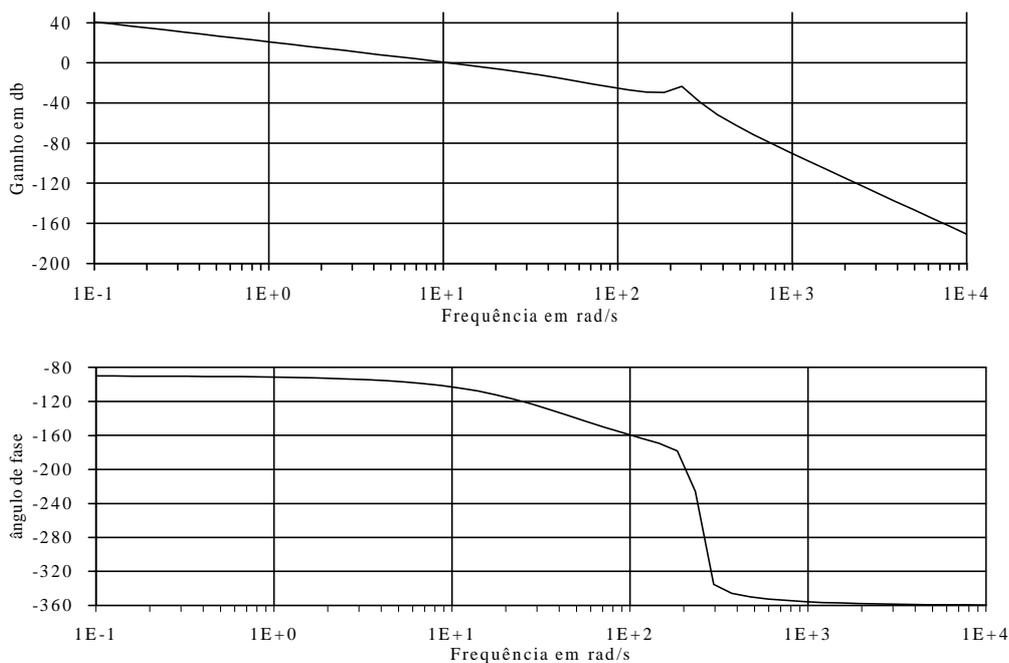
condições de desempenho e a variável de controle  $u$  não excedesse a  $1,2 \times 10^{-3}$  m. Os melhores resultados foram obtidos considerando-se  $Q = 1 \times 10^{-3} \times C^t \times C$  e  $R=0,9$ , onde  $C=[1 \ 0 \ 0]$ . A matriz de ganho de realimentação calculada foi:  $G = [3,3 \times 10^{-2} \ 2,8 \times 10^{-5} \ 7,2 \times 10^{-12}]$ .

Com esses resultados verificou-se que os zeros do controlador  $K(s)$  cancelam alguns pólos da planta  $G(s)$ , conforme quadro resumo apresentado na tabela(2).

**Tabela 2.** Pólos, zeros e ganho da planta, do controlador, do sistema de malha aberta e do sistema de malha fechada.

Sistema	Pólos	Zeros	Ganho
Modelo da planta " G(s) "	0 -8,32 ± 2,40e +02i	-----	3,91e +07
Controlador " K "	-4,43e +01 -1,40 ± 2,42e+02i	-8,32 ± 2,40e + 02i	7,33e - 01
Malha Aberta " GK "	0 -4,43e +01 -1,40 ± 2,42e +02i -8,32 ± 2,40e +02i	-8,32 ± 1,66e +02i	2,87e +07
Malha fechada GK / (1+GK)	-2,24e +01 -2,20e +01 -13,94 ± 2,41e +02i -8,32 ± 2,40e +02i	-8,32 ± 1,66e +02i	2,87e +07

O diagrama de Bode para o sistema compensado de malha aberta está mostrado na fig.(3). A margem de ganho, a margem de fase, a frequência de corte de fase e a frequência de corte foram respectivamente: 28,9db; 76°; 185,7rad e 10,8rad. A fig.(4) mostra o deslocamento do pistão, a abertura da válvula e o erro de acompanhamento de sinal para uma entrada de referência igual a um degrau unitário de amplitude 0.1m. Verifica-se que o tempo de subida igual a 0,15s com um tempo de acomodação foi igual 0,5s e não apresentou sobre elevação.



**Figura 3.** Diagrama de bode para o sistema de malha aberta.

$$E[wx(t)] = 0 \text{ e } E[wy(t)] = 0 \quad (9.1)$$

$$E[wx(t)wx(t+\tau)] = Q_0 \delta(t-\tau) \quad (9.2)$$

$$E[wy(t)wy(t+\tau)] = R_0 \delta(t-\tau) \quad (10.1)$$

$$E[wx(t)wy(t+\tau)] = 0 \text{ para todo } t \text{ e } \tau \quad (10.2)$$

O problema consiste em estimar  $x$  de forma que a variância do erro  $e_x = x - \hat{x}$  seja minimizado. Este problema consiste em se determinar um estimador ótimo (Filtro de Kalman) e requer que o par  $(A, C)$  seja observável.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(y - c\hat{x}) \quad (11.1)$$

$$H = \Psi C^t R^{-1} \quad (11.2)$$

a matriz  $\Psi$  é determinada da solução da equação de Riccati abaixo:

$$A\Psi + \Psi A^t + \Gamma Q_0 \Gamma^t - \Psi C^t R_0^{-1} C \Psi = 0 \quad (12)$$

onde a matriz  $Q_0$  é positiva semi-definida e a matriz  $R_0$  é positiva definida. Para iniciar a estimativa, a princípio pode-se considerar  $Q_0 = I$ ,  $\Gamma = B$ , e variar  $R_0$  até que uma matriz  $H$ , que minimize o erro  $e_x$ , seja obtida de forma satisfatória. No ramo direto, a relação entre  $y$  e  $u$  é:  $u(s) = K(s).y$ , onde  $K(s)$  é matriz de transferência do controlador

$$K(s) = G(sI - A + BG + HC)^{-1} H \quad (13)$$

Para uma entrada de referência  $y_r \neq 0$ , sugere-se que na fig.(2) que os estados estimados  $\hat{x}$  sejam substituídos pelas variáveis  $z$ , que possuem as mesmas dimensões de  $x$  do modelo nominal. Fazendo-se uma transformação de similaridade da forma  $\Omega = x - z$ , a equação de estado do sistema definida pelas eq's(5) resulta na seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\Omega} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - BG) & BG \\ 0 & (A - HC) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \Omega \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Gamma \\ \Gamma \end{Bmatrix} wx + \begin{Bmatrix} 0 \\ -H \end{Bmatrix} wy + \begin{Bmatrix} 0 \\ H \end{Bmatrix} y_r \quad (14.1)$$

$$\begin{Bmatrix} y \\ u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ -G & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \Omega \end{Bmatrix} \quad (14.2)$$

A estabilidade do sistema nominal consiste em garantir que:  $\text{Re} [\lambda_i (A - BG)] < 0$  e  $\text{Re} [\lambda_i (A - HC)] < 0$ .

#### 4. PROJETO DO CONTROLADOR

No projeto do controlador foram estimadas inicialmente as variáveis de estado para determinar a matriz  $H$  adequada, considerando-se a entrada de referência  $y_r = 0$ , e os ruídos brancos gaussianos  $w_x$  e  $w_y$  gerados no MATLAB. A matriz  $Q$  foi considerada igual a matriz identidade e  $R=1$ . Os valores ótimos para  $H$  foram obtidos com as seguintes matrizes:  $R_0 = 12$ ,  $\Gamma = [1 \ 0 \ 0]^t$  e  $Q_0 = 58 \times 10^2 I_{3 \times 3}$ . Com esses valores obteve-se a seguinte matriz:  $H = [2,2 \times 10^2 \ 8,1 \times 10^{-26} \ 3,3 \times 10^{-19}]^t$ .

Para determinar a matriz  $G$ , foram desprezados os ruídos e considerou-se  $y_r$  como sendo um degrau de amplitude 0.1m e as matrizes  $Q_0$  e  $R_0$  mantiveram-se fixas. As matrizes  $Q$  e  $R$  foram ajustadas de forma que, no domínio do tempo, o sistema compensado atendesse as

### 3. A TÉCNICA DE PROJETO DO CONTROLADOR LQG.

Esta técnica é baseada na formulação de um problema de controle ótimo estocástico, e foi introduzida na década de sessenta considerando-se a planta de um sistema linear na forma de espaço de estado, cujo objetivo é determinar uma lei de controle que minimize o valor esperado de um índice de desempenho quadrático através de uma realimentação de estados. Considera-se que tanto os estados quanto a saída estão afetadas por ruídos brancos gaussianos, de média nula e não correlacionados entre si (Cruz, 1996). O regulador LQG tem a estrutura como apresentada na fig.(2) e as equações que definem o problema são:

$$\dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w_x \quad (5.1)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + Hv \quad (5.2)$$

$$y = Cx \quad (5.3)$$

$$e_y = y + \Phi w_y \quad (5.4)$$

$$v = -e_y - C\hat{x} \quad (5.5)$$

$$u = -G\hat{x} \quad (5.6)$$

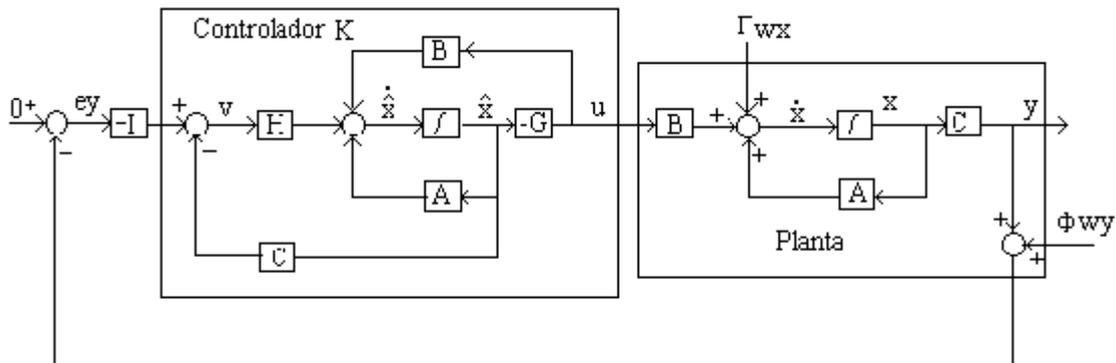


Figura 2. Controlador e planta

As variáveis  $\hat{x}$  são as variáveis estimadas dos estados  $x$  da planta. A matriz  $G$  é obtida a partir da solução da equação de Riccati da forma:

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (6)$$

onde a matriz  $Q$  é positiva semi-definida e a matriz  $R$  positiva definida. A matriz  $Q$  pode ser selecionada a princípio como sendo igual a:

$$Q = C^t.C \quad (7)$$

A matriz  $R$  pode ser escolhida para atender as especificações de projeto. A matriz de ganho  $G$  é determinada pela seguinte equação:

$$G = R^{-1}B^T P \quad (8)$$

Desta forma obtém-se um regulador linear quadrático, RLQ, com realimentação dos estados  $\hat{x}$  no controlador. Esta solução requer que o par  $(A, B)$  seja controlável.

A matriz  $H$  é determinada de forma similar, porém deve-se considerar que os ruídos  $w_x$ , nos estados e  $w_y$  na saída da planta como sendo ruídos brancos gaussianos, de média zero e não correlacionados entre si (Shahian & Hassul, 1993). Ou seja:

$K_c \rightarrow$  Coeficiente de vazão-pressão para o ponto central de operação em  $[m^5 / Ns]$ .

As equações (1 e 2) podem ser escritas em termos de variáveis de estado. Neste caso considera-se as seguintes variáveis:  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$ ,  $x_3 = P_L$ . O sistema linearizado na forma de espaço de estado é representado pela seguinte equação:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{B} & 0 \\ 0 & \frac{M}{4\beta A} & \frac{M}{4\beta K_c} \\ 0 & -\frac{M}{V_t} & -\frac{M}{V_t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4\beta K_q}{V_t} \end{Bmatrix} u + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M} \\ 0 \end{Bmatrix} F_P \quad (3)$$

### 2.3 Parâmetros e critérios de desempenho do sistema

Os parâmetros utilizados na concepção do problema são os propostos pela IFAC, conforme citado por Paim (1997). Todo o projeto foi baseado nos valores nominais destes parâmetros e apresentados na tabela (1).

**Tabela 1.** Parâmetros padrão.

Parâmetro	Mínimo	Máximo	Nominal
Módulo de elasticidade volumétrico: $\beta$ $[N / m^2]$	$9 \times 10^8$	$16 \times 10^8$	$14 \times 10^8$
Massa: $M$ $[kg]$	50	300	128,7
Coeficiente de atrito: $\bar{B}$ $[Ns / m]$	50	564	163
Volume total do fluido: $V_t$ $[m^3]$	-----	-----	$0,874 \times 10^{-3}$
Área do pistão: $A_p$ $[m^2]$	$1,05 \times 10^{-3}$	$1,11 \times 10^{-3}$	$1,075 \times 10^{-3}$
Força arbitrária no pistão: $F_L$ $[N]$	0	$8 \times 10^3$	$3 \times 10^3$
Máxima vazão na servoválvula: $Q_{m\acute{a}x}$ $[m^3 / s]$	-----	$8,66 \times 10^{-4}$	-----
Pressão de suprimento: $P_s$ $[N / m^2]$	-----	-----	$6,9 \times 10^6$
Coeficiente de vazão – pressão: $K_c$ $[m^5 / Ns]$	$1 \times 10^{-14}$	$1,5 \times 10^{-10}$	$2,4 \times 10^{-12}$

Com os dados acima citados o modelo representado através das variáveis de estado é da seguinte forma:

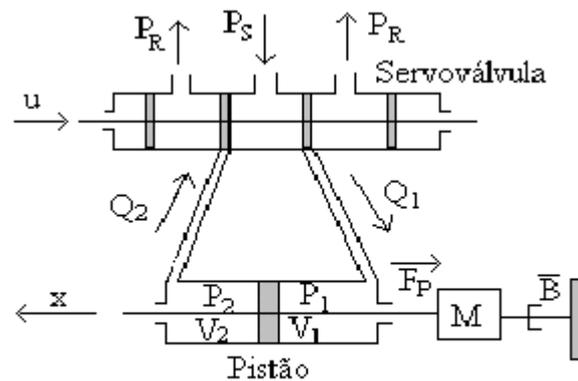
$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1,27 & 8,35 \times 10^{-6} \\ 0 & -6,9 \times 10^9 & -15,38 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4,74 \times 10^{12} \end{Bmatrix} u + \begin{Bmatrix} 0 \\ 7,77 \times 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix} F_P \quad (4)$$

O valor nominal do ganho de vazão para o ponto central de operação foi calculado como sendo  $K_q = 0,73 m^2/s$ . Devido a limitações físicas, o deslocamento para a abertura da válvula está limitada em  $\pm 1,2 \times 10^{-3} m$  e o deslocamento máximo do pistão é de 0,1m. As especificações de desempenho no domínio do tempo para o projeto do controlador são: Sobre-sinal de no máximo 10%, com um tempo de acomodação de 1s para um critério de 2%. No domínio da frequência o sistema deve apresentar uma margem de fase superior a  $65^\circ$ .

Se  $u$  é deslocado no sentido negativo, a haste desloca-se no sentido negativo. Os símbolos usados neste atuador são os seguintes:

- a)  $P_S$  → pressão de suprimento da bomba ao sistema;
- b)  $P_R$  → pressão de retorno ao reservatório;
- c)  $P_1$  e  $P_2$  → pressão nas câmaras 1 e 2;
- d)  $Q_1$  e  $Q_2$  → vazão do fluido nas câmaras 1 e 2 respectivamente;
- e)  $V_1$  e  $V_2$  → volume das câmaras 1 e 2;
- f)  $u$  → deslocamento do carretel da servoválvula, ( entrada );
- g)  $y$  → deslocamento da haste do pistão, (saída);
- h)  $F_P$  → força perturbadora no pistão;
- i)  $\bar{B}$  → coeficiente de atrito;
- j)  $M$  → massa da carga a ser deslocada.

Para o sistema acima descrito será desenvolvido um controlador para controlar a entrada  $u$  do sistema de forma que o mesmo acompanhe saídas de referências  $y_r$ , obedecendo alguns critérios de projeto preestabelecidos dentro das limitações físicas que o problema apresenta tais como: limites máximos dos deslocamentos  $u$  e  $y$ ; de carga  $M$  e  $F_P$ .



**Figura 1.** Atuador hidráulico

## 2.2 Modelo matemático

A modelagem matemática do sistema é obtida utilizando-se das equações da vazão na servoválvula; da equação da continuidade aplicada no cilindro hidráulico e da segunda lei de Newton aplicada na carga considerando-se as forças aplicadas no pistão. O modelo linearizado está representado pelas seguintes equações:

$$M \frac{d^2 y}{dt} + \bar{B} \frac{dy}{dt} + F_P = A_p P_L \quad (1)$$

$$\frac{dP_L}{dt} = -\frac{4\beta}{V_t} \left[ A_p \frac{dy}{dt} + K_q u - K_c P_L \right] \quad (2)$$

onde :

$\beta$  → Módulo de elasticidade volumétrica em [ N/ m<sup>2</sup> ]

$A_p$  → Área do pistão em [m<sup>2</sup>]

$K_q$  → Ganho de vazão para o ponto central de operação em [m<sup>3</sup> / s]

# PROJETO DE UM CONTROLADOR EM CASCATA UTILIZANDO A TÉCNICA LQG PARA UM ATUADOR HIDRÁULICO.

**Benedito Santana de Oliveira**

**Clivaldo Silva Araújo**

UFPB – CT – DTM – Campus I – E –mail: bso@openline.com.br - clivaldo@ct.ufpb.br

## Resumo

Este trabalho tem como objetivo o projeto de um controlador para operar em cascata com a planta representada por um atuador hidráulico, de forma que o sistema compensado atenda aos critérios de projeto estabelecidos. A técnica de projeto é baseada na teoria de controle ótimo denominada de LQG. O modelo linearizado da planta será utilizado. Um breve histórico sobre a técnica será apresentado e posteriormente o controlador será projetado. O sistema compensado será analisado através de simulação onde observaremos se os propósitos do projeto foram satisfatoriamente atendidos.

**Palavras-chave:** Atuador, Controlador, Linear Quadratic Gaussian.

## 1. INTRODUÇÃO

A partir de 1960 quando a corrida espacial tornou-se mais competitiva entre o Estados Unidos da América e a União Soviética, houve a necessidade de se projetar máquinas com desempenhos que obedecessem a determinados critérios de projeto cujas técnicas baseadas na teoria de controle clássico eram insuficientes para solucionar os problemas. Este desafio motivou o desenvolvimento de pesquisas utilizando técnicas baseadas na teoria de controle ótimo, que foram iniciadas em 1940 por Wiener, citado por (Skogestad *et al.*, 1996). Destas pesquisas surgiu um procedimento de projeto denominado de LQG, “*Linear Quadratic Gaussian*”, como uma técnica alternativa de projeto, que muito contribuiu para o desenvolvimento da engenharia das aeronaves. Este trabalho tem como objetivo a análise e projeto de um controlador para um atuador hidráulico, utilizando a técnica LQG. Na primeira etapa descreve-se o modelo dinâmico do sistema, na segunda apresenta-se a técnica LQG e finalmente, projeta-se o controlador e faz-se uma análise dos resultados.

## 2. ANÁLISE DO PROBLEMA

### 2.1 O atuador hidráulico

Para a implementação do procedimento LQG, foi elaborado um modelo matemático de um atuador hidráulico, composto de uma servoválvula de 4 vias com centro crítico e um cilindro de ação dupla com haste dupla, como mostra a fig.(1). Este sistema funciona da seguinte forma:

Uma bomba injeta fluido com pressão elevada  $P_S$  na válvula. Para um deslocamento  $u$  positivo do carretel da válvula, o fluido é injetado na câmara 1 do cilindro com uma vazão  $Q_1$  que fica submetida a uma pressão  $P_1$  maior que a pressão  $P_2$  da câmara 2, provocando uma diferença de pressão  $P_L = P_1 - P_2$  capaz de deslocar a haste do cilindro no sentido positivo.