

# COMPENSADOR CLÁSSICO APLICADO A UM SISTEMA DE ALAVANCA PARA ISOLAMENTO DE VIBRAÇÕES EM BAIXA FREQUÊNCIA

**Rodolfo de Sousa Santos**

**Clivaldo Silva de Araújo**

**Seyyed Said Dana**

Departamento de Tecnologia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba, Campus I, CEP 58.059-900, João Pessoa - Pb - Brasil - e-mail: rseng@bol.com.br

## Resumo

Este trabalho apresenta uma análise sobre o desempenho dinâmico de um compensador clássico, aplicado a um sistema de alavanca para o isolamento de vibrações, submetido a controle ativo em baixa frequência. Inicialmente é feita a modelagem do sistema sob a forma de função de transferência. Em seguida, controle ativo composto de um motor de CC, sensor e parafuso sem-fim é aplicado ao sistema, obtendo-se uma realimentação e conseqüentemente melhorando sua performance. Após a aplicação do controle ativo, acrescentou-se ao sistema um compensador em avanço de fase associado a dois integradores. O sistema projetado foi simulado para diversas situações acima, quando submetido a um sinal de referência e a um distúrbio e os resultados são comparados usando a teoria clássica de controle.

Palavras-chave: Isolamento, Vibração, Controle, Compensador

## 1. INTRODUÇÃO

As vibrações que ocorrem em máquinas e estruturas é indesejável, pois causa o desconforto e insegurança para o homem. Estas devem ser eliminadas ou reduzidas ao máximo, através do isolamento de vibrações. Isolar com precisão as vibrações de um equipamento tem sido um objeto de constantes estudos. O controle do tipo passivo foi o primeiro passo no sentido de isolar vibrações, porém suas aplicações são muito restritas, portanto se faz necessário utilizar o controle ativo, uma vez que os resultados alcançados costumam ser extremamente vantajosos. Ho (1990), apresentou uma plataforma de isolamento de vibrações sem contato utilizando um amortecedor magnético. Sievers et al. (1988) investigaram o isolamento ativo de vibrações em máquinas sobre um único eixo de uma estrutura flexível. Reed (1988) discutiu o uso de um elemento puramente magnético como controle ativo para reduzir a aceleração de plataformas. Ross (1988) analisou o isolamento ativo do maquinário de plataformas de navio. Lurie et al. (1991) realizaram um estudo de suspensão ativa para o isolamento de vibração na indústria automobilística. Zhou et al. (1995) apresentaram um sistema para isolamento ativo de vibrações de base, através de um atuador eletromagnético. Dana (1997) realizou um estudo sobre o controle de vibração passiva em baixa frequência utilizando um sistema de alavanca.

## 2. DESCRIÇÃO DO MODELO

O modelo do sistema, representado na figura 1, consiste de uma barra de comprimento  $l$ , massa  $m_B$  e momento de inércia angular  $J_B$ . A barra é bi-apoiada nos pontos **A** e **B** com sistemas dotados de rigidez e amortecimento  $k_A$ ,  $k_B$ ,  $c_A$ , e  $c_B$ . Na extremidade **A**, está localizada uma massa absorvedora  $m_A$ , a qual tem a finalidade de fazer o contrabalanço com a massa  $m_i$  que se encontra na extremidade **C** da alavanca, na qual deseja-se isolar as vibrações. A posição da alavanca será variada pelo atuador em função da vibração recebida pela base e transmitida para a barra de forma a obter uma configuração que propicie um melhor isolamento da massa  $m_i$ , com relação a vibração de base.

Contudo para início do estudo, faz-se algumas hipóteses simplificadoras como: considerar que a barra seja rígida com massa concentrada em seu centro de massa; que esteja submetida a uma rotação no ponto **B** em relação ao plano da figura; que esteja submetida a uma translação vertical no ponto **B**; e que sofra pequenas oscilações.

Inicialmente fez-se um estudo com relação a rigidez e amortecimento viscoso do sistema de alavanca. A rigidez  $k_B$  e o amortecimento viscoso  $c_B$  foram escolhidos de maneira que se tenha um apoio rígido. A escolha da rigidez ( $k_A = 1800$  N/m) foi obtida baseado na deflexão estática máxima ( $\delta_{max} = 0,54$  m).

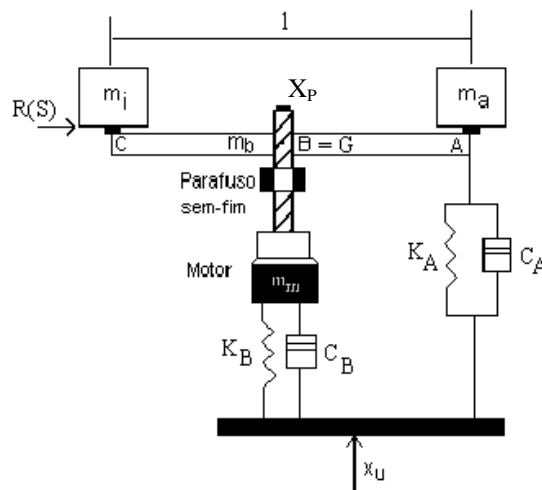


Figura 1. Sistema de alavanca

## 3. MODELAMENTO MATEMÁTICO

As equações do movimento (Thomsom, 1978), de translação  $x(t)$  e rotação  $\theta(t)$ , aplicadas ao sistema de alavanca representado na figura 1, são:

Somatório das forças na barra:

$$m\ddot{x}_G + k_A(x_A - x_U) + c_A(\dot{x}_A - \dot{x}_U) + k_B(x - x_U) + c_B(\dot{x} - \dot{x}_U) = 0 \quad (1)$$

Somatório dos momentos em relação ao ponto G:

$$J\ddot{\theta} + \left(\frac{1}{2}\right)c_A\dot{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^2c_A\dot{\theta} + \left(\frac{1}{2}\right)k_Ax + \left(\frac{1}{2}\right)^2k_A\theta = \left(\frac{1}{2}\right)c_A\dot{x}_U + \left(\frac{1}{2}\right)k_Ax_U - \left(\frac{1}{2}\right)c_A\dot{x}_P - \left(\frac{1}{2}\right)k_Ax_P \quad (2)$$

onde:

$$\begin{aligned} x_A &= x + x_P + \left(\frac{1}{2}\right)\theta \\ x_C &= x + x_P - \left(\frac{1}{2}\right)\theta \end{aligned} \quad (3)$$

$$x_G = x + x_P$$

$x_P$  = Deslocamento vertical imposto ao ponto B da barra pelo controle ativo

$x_A$  = Deslocamento vertical do ponto A da barra

$x_C$  = Deslocamento vertical do ponto C da barra

$x_G$  = Deslocamento do centro de gravidade da barra

$x$  = Deslocamento vertical do motor

$\theta$  = Deslocamento angular da barra no ponto B.

$J$  = Momento de inércia do sistema de alavanca

$m$  = Massa total do sistema de alavanca

$x_U$  = Distúrbio aplicada à base do sistema de alavanca

Fazendo a substituição das Eqs. (3), na Eq. (1) e Eq. (2) encontraremos a seguinte equação na forma matricial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_A + c_B) & \left(\frac{1}{2}\right)c_A \\ \left(\frac{1}{2}\right)c_A & \left(\frac{1}{2}\right)^2c_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_A + K_B) & \left(\frac{1}{2}\right)k_A \\ \left(\frac{1}{2}\right)k_A & \left(\frac{1}{2}\right)^2k_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} (c_A + c_B) & (k_A + K_B) & -m & -c_A & -k_A \\ \left(\frac{1}{2}\right)c_A & \left(\frac{1}{2}\right)k_A & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)c_A & -\left(\frac{1}{2}\right)k_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_U \\ x_U \\ \ddot{x}_P \\ \dot{x}_P \\ x_P \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

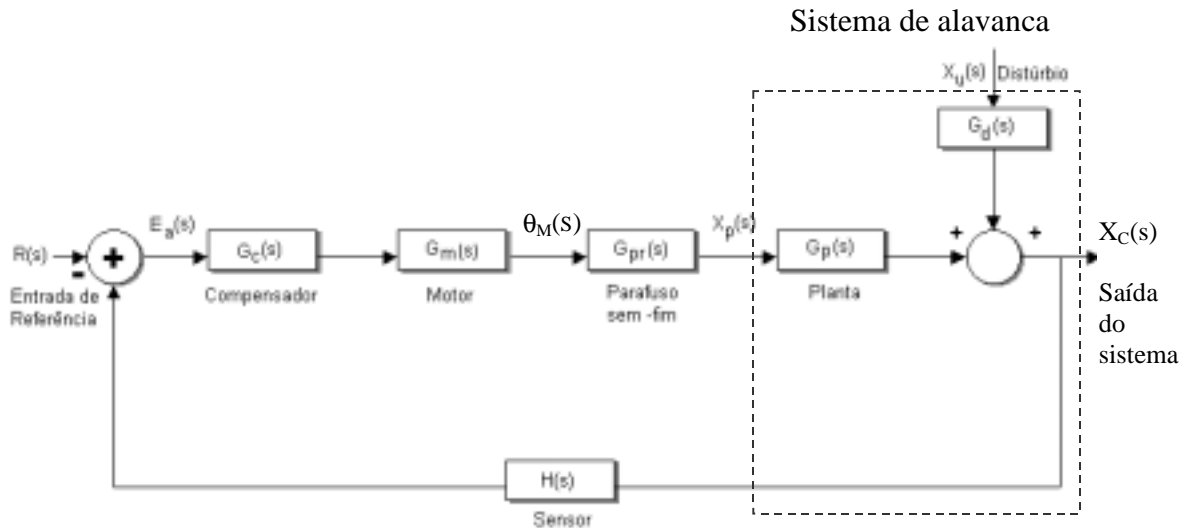
Tendo como saída  $x_C$  e como entradas  $x_U$  e  $x_P$  considerando todas as condições iniciais nulas, aplicando a transformada de Laplace (Ogata, 1993) na Eq. (4), encontraremos as seguintes funções de transferências para o sistema de alavanca submetido a um distúrbio,  $x_U$ , e a um deslocamento imposto ao ponto **B** da barra pelo controle ativo,  $x_P$ . As equações referentes aos valores de  $\alpha$ 's e  $\beta$ 's foram obtidas em Santos (1999).

$$Gr(s) = \frac{\beta_{20}s^4 + \beta_{21}s^3 + \beta_{22}s^2 + \beta_{23}s + \beta_{24}}{s^4 + \alpha_1s^3 + \alpha_2s^2 + \alpha_3s + \alpha_4} \quad (5)$$

$$G_d(s) = \frac{\beta_{11}s^3 + \beta_{12}s^2 + \beta_{13}s + \beta_{14}}{s^4 + \alpha_1s^3 + \alpha_2s^2 + \alpha_3s + \alpha_4} \quad (6)$$

#### 4. O SISTEMA DE CONTROLE

A figura 2, mostra a configuração do sistema completo, formado pelo sistema de alavanca, controle ativo (motor, parafuso sem-fim, sensor) e compensador.



**Figura 2.** Diagrama de blocos do sistema de alavanca completo

Utilizamos um motor de CC, funcionando como servo motor de imã permanente controlado por armadura cuja função de transferência (Kuo, 1995) é dada por:

$$G_M(s) = \frac{\Theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{\beta}{s^3 + \alpha_{m1}s^2 + \alpha_{m2}s} \quad (7)$$

onde:

$$\beta = \frac{K_m}{L_a J_{MC}}; \quad \alpha_{m1} = \frac{L_a c_{MC} + R_a J_{MC}}{L_a J_{MC}}; \quad \alpha_{m2} = \frac{R_a c_{MC} + K_m K_b}{L_a J_{MC}}$$

$K_m$  = Constante de torque do motor

$K_b$  = Constante de força contra-eletromotriz

$R_a$  = Resistência da armadura

$L_a$  = Indutância da Armadura

$J_{mc}$  = Momento de inércia do motor e da carga com relação ao eixo do motor

$c_{MC}$  = Atrito viscoso do motor e da carga em relação ao eixo do motor

O parafuso sem-fim converte o deslocamento angular  $\theta_m$  do eixo do motor em deslocamento longitudinal. Esta relação que é proporcional, é dada pelo passo de hélice do parafuso,  $L_p$ , cuja função de transferência é dada por:

$$G_p(s) = L_p \quad (8)$$

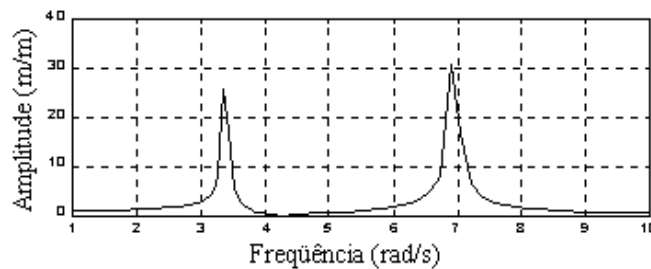
Para o sistema em análise, utilizamos um compensador *lead* associado a dois integradores, cuja função de transferência é dada por:

$$G_c(s) = K_c \frac{(s + a)}{(s + b)} * \frac{1}{s^2} \quad (9)$$

onde:

$K_c$  = Ganho do compensador;  $a$  = zero do sistema;  $b$  = pólo do sistema

## 5. ANÁLISE E RESULTADOS



**Figura 3.** Resposta em frequência do sistema de alavanca sem amortecimento

Os resultados obtidos foram realizados através de simulações numéricas, utilizando o programa Simulink do **MATLAB**.

A figura 3, mostra que o sistema de alavanca possui duas frequências naturais:  $\omega_1=3,3782$  rad/s e  $\omega_2=6,8222$  rad/s. Através do gráfico verifica-se que é necessário isolar a vibração de base do sistema de alavanca na faixa de frequência de [1 a 8] rad/s, pois deseja-se reduzir os picos de vibração nas frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .

O resultado apresentado na figura 4, mostra um amortecimento nas amplitudes de vibração causados pelo distúrbio movimento de base, admitindo que o sistema tenha referência zero. Analisando a figura 4, verifica-se que o sistema possui um tempo acomodação de 4,6 segundos e erro de estado permanente de 100%. Uma vez que os valores obtidos são considerados insatisfatórios para o isolamento de vibração, se faz necessário a implementação de um compensador, com o objetivo de melhorar a resposta do sistema.

O sistema de alavanca representado na figura 1, foi analisado utilizando os seguintes dados, aplicando degrau unitário na base do sistema.

$$m_A = 100 \text{ Kg}$$

$$k_A = 1800 \text{ N/m}$$

$$c_A = 250 \text{ N*m/s}$$

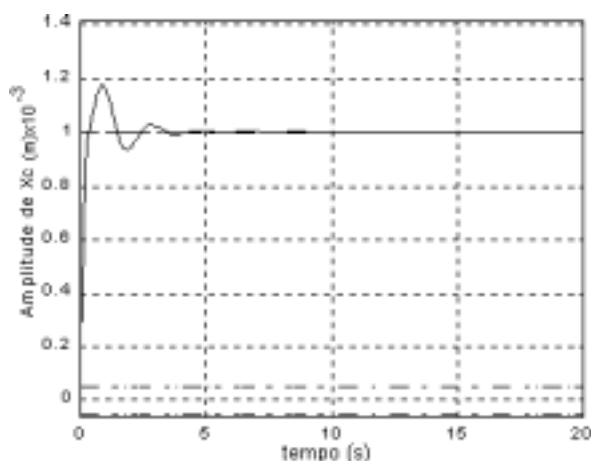
$$l = 2 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}
m_I &= 100 \text{ Kg} \\
m_B &= 40 \text{ Kg} \\
m_m &= 10 \text{ Kg} \\
J_{mc} &= 0,0019 \text{ Kg}\cdot\text{m}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_B &= 5\cdot k_A \\
J &= 122 \text{ Kg}\cdot\text{m}^2 \\
L_a &= 1,22 \times 10^{-3} \text{ Henry} \\
K_m &= 0,0621 \text{ N}\cdot\text{m/A}
\end{aligned}$$

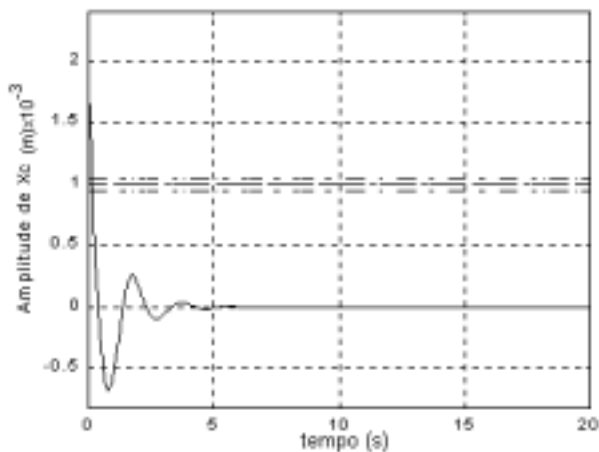
$$\begin{aligned}
c_B &= 10\cdot c_A \\
K_b &= 0,0783 \text{ v}\cdot\text{s} \\
R_a &= 0,13 \text{ ohms} \\
c_{MC} &= 0,01 \text{ N}\cdot\text{s/m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_s &= 1 \\
L_p &= 0,01
\end{aligned}$$



**Figura 4.** Resposta do sistema de alavanca a um distúrbio[Xu] do tipo degrau

Da figura 5, observamos que o sistema submetido a uma entrada degrau unitário na referência e admitindo que o distúrbio é zero, apresenta um tempo de acomodação de 4,6 s e um erro de estado permanente de 100%.



**Figura 5.** Resposta do sistema de alavanca a uma entrada de referência R(s) do tipo degrau

Para o projeto do compensador em avanço de fase com dois integradores, foi escolhido a frequência  $\omega_n = 7,67 \text{ rad/s}$ , pois desejou-se eliminar os picos de vibração abaixo dessa frequência para obter um bom isolamento de vibração.

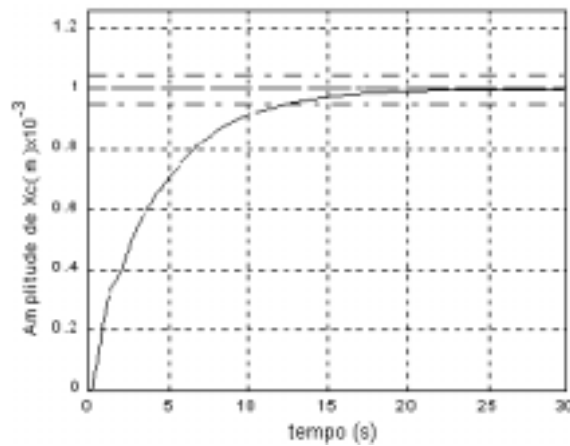
As especificações de projeto para a implementação do compensador em avanço de fase associado a dois integradores foram as seguintes:  $\omega_n = 7,67 \text{ rad/s}$  ;  $\zeta = 0,6$

Através das especificações da frequência natural do sistema e fator de amortecimento, selecionou-se o ponto  $S_1 = -4,6+6i$ . Após a determinação do ponto  $S_1$ , encontrou-se o ganho do compensador, os pólos e os zeros, os quais foram obtidos através do método *root-locus* geométrico (Shahian et. Al, 1993).

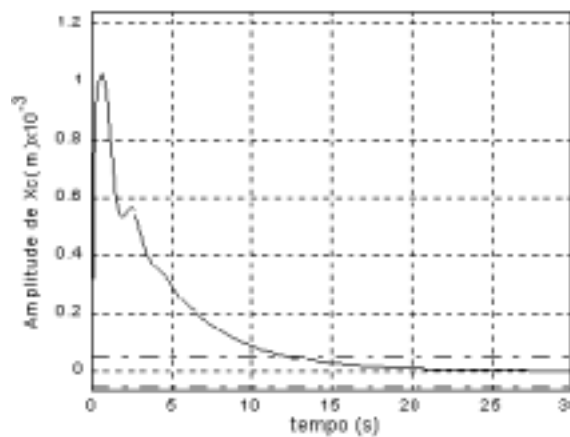
A função de transferência para este compensador é:

$$K(s) = 114 \left( \frac{s + 2,83}{s + 20,14} \right) * \frac{1}{s^2}$$

As figuras 6 e 7, mostram que a associação do compensador *lead* + dois integradores no sistema de alavanca, resultou numa melhora satisfatória com relação ao erro de estado em regime permanente (0%), porém ocorreu um aumento no tempo de acomodação para 12 segundos.

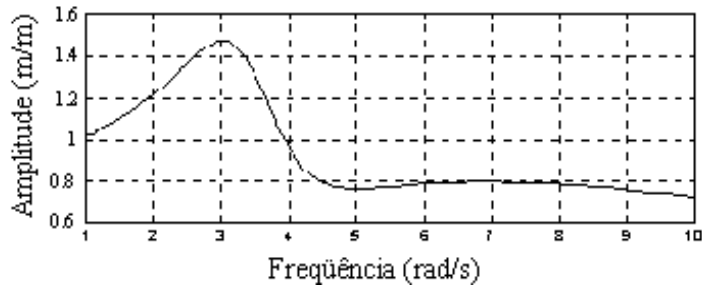


**Figura 6.** Resposta do sistema de alavanca com um compensador *lead* + dois integradores a uma entrada de referência  $R(s)$  do tipo degrau



**Figura 7.** Resposta do sistema de alavanca com compensador em *lead*+ dois integradores a um distúrbio  $[X_u]$  do tipo degrau

Através da análise do gráfico apresentada na figura 8, verifica-se que a inserção deste tipo de compensador proporcionou um bom isolamento de vibração na frequência de 7,67 rad/s, pois conseguiu-se reduzir o maior pico de vibração do sistema de alavanca.



**Figura 8.** Resposta em frequência do sistema de alavanca amortecido com controle ativo e compensador *lead* + dois integradores a um distúrbio [Xu]

## 6. CONCLUSÃO

A implementação do compensador *lead* associado a dois integradores promoveu um bom comportamento dinâmico. Pode-se constatar que a implementação do compensador *lead* associado a dois integradores, proporcionou uma resposta suficientemente rápida e amortecida com uma redução no erro de estado permanente para zero. Através das análises feitas com relação a este tipo de compensador empregado no sistema de alavanca, concluiu-se que o mesmo apresentou uma resposta satisfatória, pois com a inserção deste compensador no sistema de alavanca conseguiu-se a redução do pico de vibração na maior frequência conforme a figura 8, caracterizando assim uma melhor redução do nível de vibração da massa  $m_i$ .

## 7. REFERÊNCIAS

- Dana, S. S., 1997, Preliminary considerations on active vibration control of low frequency systems using a lever, 7<sup>a</sup> International Conference on Dynamics Problems in Mechanics, ABCM, pp. IV-VI, Angra dos Reis, Rio de Janeiro.
- Ho, Forward V. K., 1990, Magf float (Vibration isolation platform), Proceeding of 36<sup>th</sup> International Instrumentation Symposium, pp. 311-312.
- Kuo, B. C., 1995, Automatic control systems, Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs, Seventh Edition.
- Lurie, B.J., Franson, J.L. & Laslcin, R., 1991, Active suspensions for vibration isolation Proceedings of 32nd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, AA/ASME/ASCE/AHS/ASC, Baltimore, MD, pp. 2256-2260.
- Ogata, K., Engenharia de controle moderno, 1993, Prentice/Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 2<sup>a</sup> Edição.
- Reed, R. S., 1998, Shock isolation using an active magnetostrictive element, The 59<sup>th</sup> Shock and Vibration Symposium, Albuquerque, New México.
- Ross, C., 1988, Active isolation of ship machinery platform, Proceeding of 27<sup>th</sup> Conference on Decision and Control, Austin, Texas, pp. 2045-2046.



- Santos, R. S., 1999, Técnicas de Controle Aplicadas a um Sistema de Alavanca para Isolamento de Vibrações em Baixa Frequência, dissertação de mestrado, Universidade Federal da Paraíba-CAMPUS I, João Pessoa, Paraíba.
- Shahian, B., Hassul, M., 1993, Control System Design Using Matlab., Prentice/Hall international Inc.
- Sievers, L. A., Von F. & Andreas H., 1988, Linear control design for active vibration isolation of narrow band disturbance, Proceedings of 27th conference on Decision and Control, Austin, Texas, pp. 1032-1037.
- Thomson, W. T., 1978, Teoria da vibração com aplicações, Editora Interciência Ltda., Rio de Janeiro, RJ.
- Zhou, S. W., Dana S.S. & Rogers, C. A., 1995, An active magnetroctive mount for isolating base vibration – Part I, Anais em CD-ROM do XIII COBEM.