

# SISTEMA COMPUTACIONAL GRÁFICO PARA MODELAGEM BIDIMENSIONAL DE FRATURAMENTO COESIVO COM AMOLECIMENTOS LINEARES

**Estela M. R. Bueno**<sup>☆</sup>  
**Túlio N. Bittencourt**<sup>☆</sup>  
**Carlos V. A. Carvalho**<sup>\*</sup>  
**Luiz F. Martha**<sup>\*</sup>

<sup>☆</sup> Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações (PEF) e Laboratório de Mecânica Computacional (LMC) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP) – CEP 05508-900 – São Paulo – SP – Brasil

E-mail: {ebueno,tbitten}@usp.br, web page: <http://www.lmc.ep.usp.br/>

<sup>\*</sup> Departamento de Engenharia Civil e Grupo de Tecnologia de Computação Gráfica (TecGraf) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)

CEP 22453-900 – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

E-mail: {alencar,lfm}@tecgraf.puc-rio.br, web page: <http://www.tecgraf.puc-rio.br/>

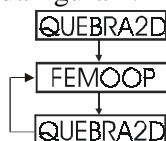
## Resumo

O processo de fraturamento em materiais quasi-frágeis com efeito de amolecimento do material e localização de deformações pode ser representado por meio do modelo de fissura coesiva. Neste trabalho foi implementado o sistema computacional QUEBRA2D-FEMOOP, que simula processos de fraturamento bidimensional de fissuras coesivas usando elementos finitos de interface de linha quadráticos com amolecimento linear e bi-linear. O modelo considera duas pontas de fissura, a real e a fictícia, entre as quais encontram-se os elementos de interface. O QUEBRA2D é um programa para modelamento de problemas bidimensionais de fraturamento, é responsável pela interface gráfica, entrada e saída de dados, geração de malhas adaptativas de elementos finitos e gerenciamento dos processos de mecânica da fratura. O FEMOOP (“*Finite Element Method Object-Oriented Program*”) é o programa utilizado para resolver o problema de elementos finitos. Serão apresentados exemplos de fraturamento coesivo, utilizando os dois modelos constitutivos de amolecimento linear e bi-linear, comparando os resultados numéricos com os experimentais, para ilustrar a utilização desta ferramenta computacional.

**Palavras-Chave** : fraturamento coesivo, elemento finito de interface, amolecimento linear e bi-linear.

## 1 INTRODUÇÃO

O sistema QUEBRA2D-FEMOOP constitui uma ferramenta computacional capaz de simular fraturamento bidimensional com interface gráfica moderna. O QUEBRA2D-FEMOOP (“*Finite Element Method – Object Oriented Programming*”) [Martha-1996] possui as rotinas computacionais necessárias para viabilizar a modelagem do fraturamento coesivo bidimensional. O funcionamento integrado do sistema QUEBRA2D-FEMOOP pode ser representado segundo o fluxograma da figura 1:

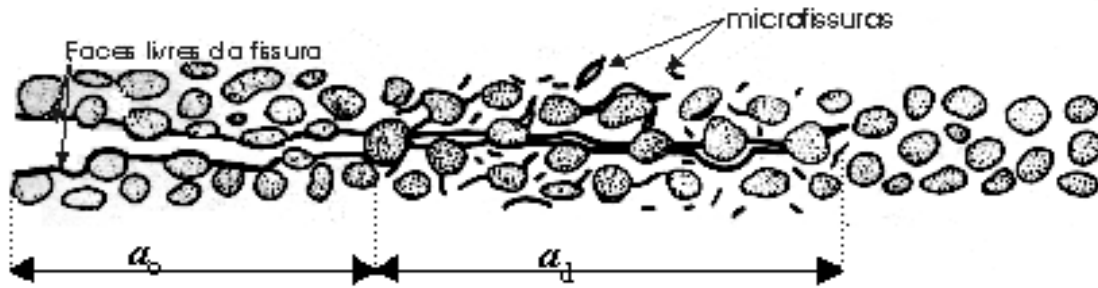


**Figura 1.** Fluxograma geral da integração QUEBRA2D-FEMOOP.

O QUEBRA2D possui interface gráfica bastante moderna e amigável, além de possuir recursos de geração automática e adaptativa de malhas. O gerenciamento de entrada e saída de dados, assim como o controle do processo de fraturamento, é feito pelo programa QUEBRA2D. O programa FEMOOP é desenvolvido em linguagem C++, utilizando os conceitos de programação orientada a objetos.

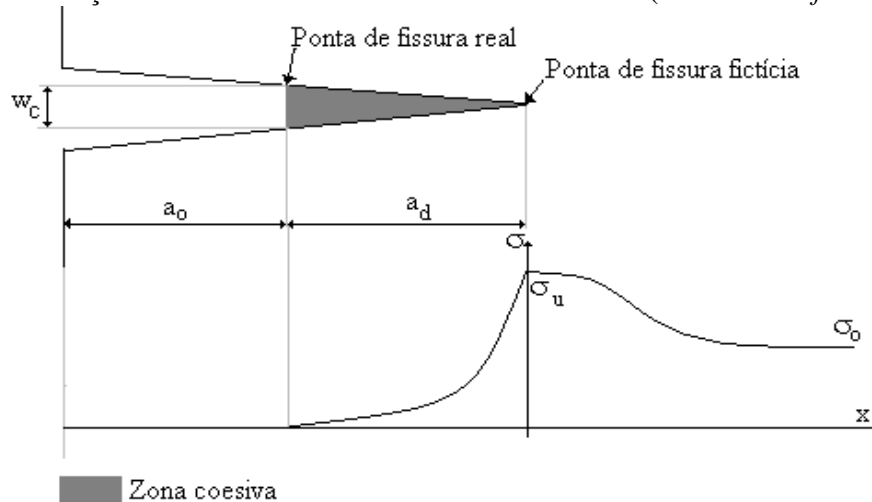
## 2 PROBLEMA COESIVO

O processo de fraturamento em materiais quasi-frágeis é caracterizado pela contribuição de resistência devida ao entrelaçamento de agregados, ligações por fibras, microfissuração e outros fenômenos inelásticos. A representação desses fenômenos inelásticos localizados pode ser feita satisfatoriamente por meio de modelos coesivos, os quais descrevem a região danificada próxima à ponta de fissura. Estes modelos propõem a representação dos fenômenos não-lineares considerando perda de resistência do material a medida que os deslocamentos das faces da fissura aumentam, caracterizando o efeito de amolecimento (“*strain-softening*”). Na figura 2, a região coesiva corresponde ao comprimento  $a_d$  da fissura (região na qual ocorre transmissão de esforços entre as faces da fissura) e a região de comprimento  $a_o$ , à parte da fissura sem nenhuma transmissão de esforços.



**Figura 2.** Zona de processo na ponta de fissura

A distribuição de tensão no modelo de fraturamento coesivo permite que o material atinja a tensão última de tração, e a partir deste ponto a tensão diminui progressivamente até o ponto que apresenta a condição de abertura crítica ( $w_c$ ), a partir do qual não há transferência de esforços entre as faces da fissura (figura 3). A curva que caracteriza a distribuição da tensão depende da relação constitutiva do amolecimento do material (curva de “*softening*”).



**Figura 3.** Distribuição de tensão no modelo coesivo

O modelo de fissura fictícia (“*Fictitious Crack Model*”) foi desenvolvido por Hillerborg [Hillerborg-1976] no final dos anos setenta. A partir de ensaios de tração uniaxial em corpos

de prova de concreto, foi possível observar que, após a carga máxima, a fissura inicial surgia numa região estreita de deformação localizada.

### 3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA COESIVO

Neste trabalho, foram utilizados elementos finitos de interface para representar o efeito das forças de coesão que atuam nas faces das fissura fictícia. Aplicando os conceitos do método dos elementos finitos (FEM), subdivide-se o domínio em diversos sub-domínios, permitindo que se escreva o vetor de deslocamentos como o produto de funções de forma e deslocamentos nodais. Pode-se escrever os problema coesivo na forma de elementos finitos:

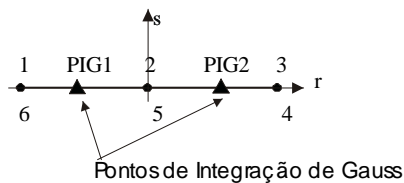
$$[K]\{u\} = \lambda\{P\} + \{R\} \quad (1)$$

onde:  $[K]$  = matrix de rigidez                       $\{u\}$  = vetor de deslocamentos  
 $\lambda$  = parâmetro de carga                       $\{P\}$  = vetor de forças externas  
 $\{R\}$  = vetor de forças desbalanceadas

O vetor de forças desbalanceadas está presente devido a contribuição do efeito dos elementos de interface, cuja configuração de equilíbrio é obtida através da condição de tensão última na ponta de fissura fictícia.

#### 3.1 Elemento de Interface

Para representar o efeito coesivo ao longo da fissura, foi utilizado neste trabalho o elemento de interface paramétrico de 6 nós com dois pontos de integração de Gauss [Schellekens-1990].



**Figura 4.** Elemento Finito de Interface de Linha INTERFACE6

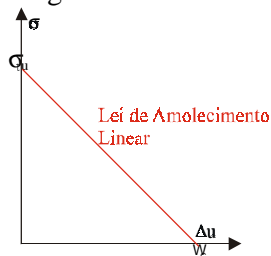
A matriz de propriedades do material [Bueno-1999] é definida como:

$$D = \begin{bmatrix} K_s & 0 \\ 0 & K_o \end{bmatrix} \quad (2)$$

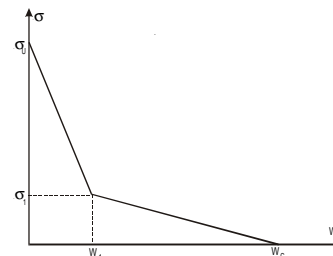
com :  $K_s = \sigma_r / \Delta u_r$  e  $K_o = \sigma_s / \Delta u_s$   
 (sendo  $r$  e  $s$  os eixos naturais da formulação paramétrica).

#### 3.2 Modelo Constitutivo de Amolecimento Linear

O modelo constitutivo adotado para representar o efeito de coesivo por meio de elementos de interface é feito através de uma lei de amolecimento linear [Bueno-1999]. Baseando-se em estudos feitos por Carpinteri, Bocca e Valente [Carpinteri-1989], desprezou-se os efeitos coesivos tangenciais ( $K_s = \sigma_r / \Delta u_r = 0$ ) e simplificou-se a curva de resistência considerando que o material desde o início da sollicitação já começa a perder resistência, conforme a figura 5a.



**Figura 5.a** Amolecimento linear



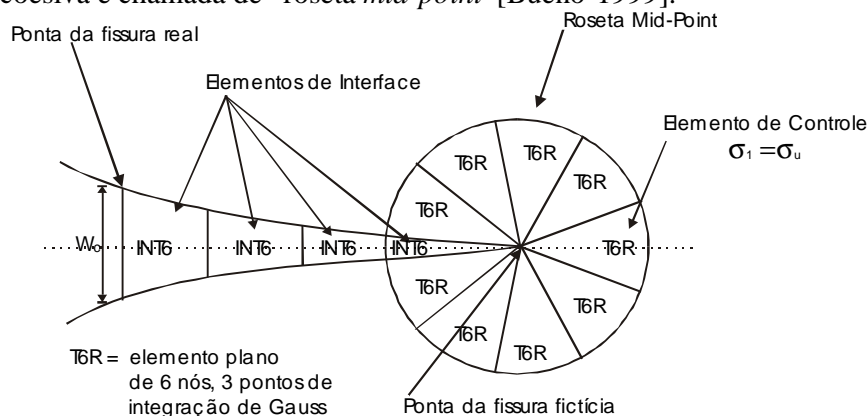
**Figura 5.b** Amolecimento Bi-linear

### 3.3 Modelo Constitutivo de Amolecimento Bi-Linear

O modelo constitutivo de amolecimento bi-linear [Bueno-1999] é caracterizado pela curva de resistência constituída por duas retas, desprezando a contribuição resistêcia de coesão dos efeitos tangenciais. Também foi considerado que o material desde o início da sollicitação já começa a perder resistência, conforme mostra a figura 5b.

### 3.4 Representação da fissura coesiva

A fissura coesiva é representada no sistema QUEBRA2D-FEMOOP através de elementos de interface com modelo constitutivo de amolecimento linear. O controle da condição de equilíbrio do modelo é feito por meio da verificação da tensão principal de tração no elemento de ponta de fissura. A figura 6 ilustra como uma fissura coesiva é modelada no QUEBRA2D-FEMOOP, utilizando elementos de interface e elementos planos triangulares de 6 nós e 3 pontos de integração de Gauss. A fissura coesiva não apresenta singularidade de tensão, portanto os elementos que formam a roseta de ponta de fissura têm seus nós intermediários não deslocados, no meio do lado do elemento, por isso a roseta de ponta de fissura coesiva é chamada de “roseta *mid-point*” [Bueno-1999].



**Figura 6.** Fissura fictícia com elementos de interface e ponta de fissura com roseta “*mid-point*”.

## 4 SOLUÇÃO E CONDIÇÃO DE PROPAGAÇÃO

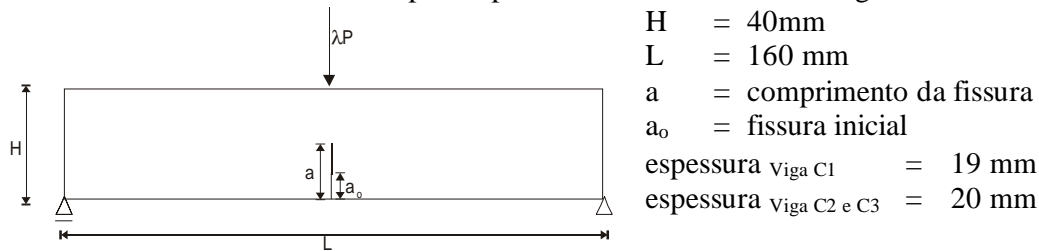
Para resolver o sistema de equações do problema coesivo da Eq. (1), com  $n$  equações lineares e  $n+1$  incógnitas ( $n$  deslocamentos e o fator de carga  $\lambda$ ), utiliza-se a restrição de que a tensão principal no elemento de ponta de fissura deve ser igual a tensão última do material. O sistema de equações resultante é não-linear, e optou-se por resolvê-lo através da associação do método de Comprimento de Arco de Cilindro com o Método da Relaxação. A condição de propagação da ponta de fissura fictícia é a tensão principal máxima se igualar à tensão última do material, a direção da propagação é perpendicular à da tensão principal máxima na ponta da fissura fictícia. A ponta de fissura real localiza-se no ponto onde a abertura da fissura se iguala à abertura crítica de fissura ( $w_c$ ), seguindo a trajetória traçada pela ponta de fissura fictícia [Bueno-1999].

## 5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

### 5.1 Amolecimento Linear

Foi modelada uma viga sujeita à flexão por 3 pontos (TPB - “*Three Point Bending*”), contendo uma fissura inicial como mostrado na figura 7. O objetivo deste exemplo é mostrar a semelhança entre os resultados numéricos fornecidos pelo sistema QUEBRA2D-FEMOOP e resultados experimentais obtidos da literatura por Bocca [Bocca-1991].

Para modelar este problema no sistema QUEBRA2D-FEMOOP [Bueno-1999] foram utilizados elementos triangulares de 6 nós e 3 pontos de integração de Gauss (T6 e elementos de roseta mid-point -T6R) e elementos de interface de 6 nós e dois pontos de integração de Gauss (INTERFACE), em estado plano de tensão. Considerou-se a existência de uma fissura inicial sem elementos de interface para representar o chanfro feito na viga do ensaio.



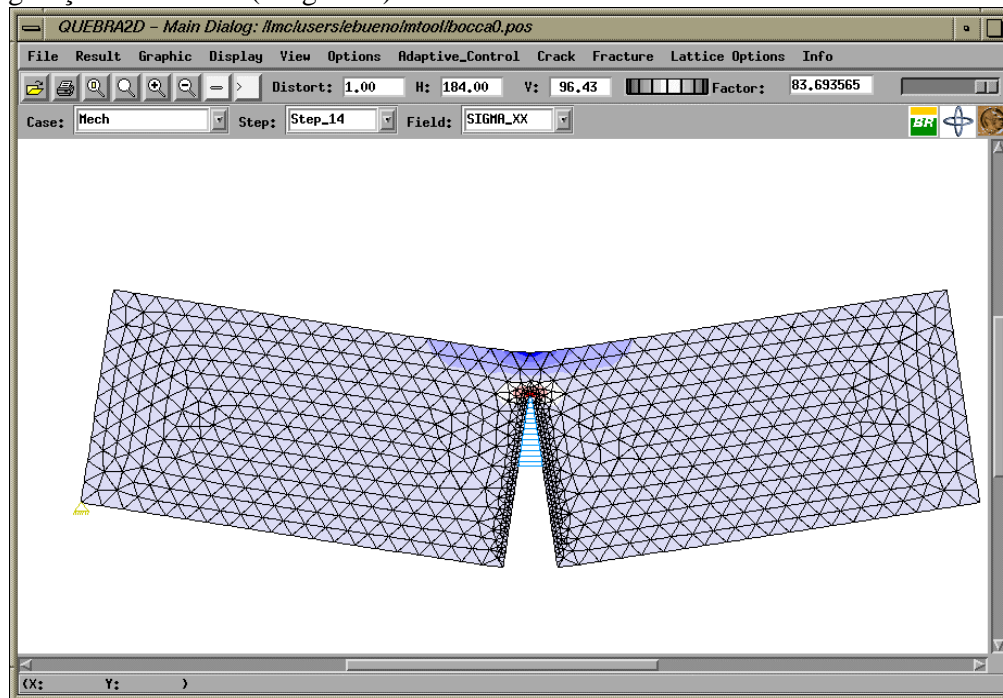
**Figura 7.** Geometria da viga.

As propriedades do material, com amolecimento linear, constam na tabela 1:

**Tabela 1.** Propriedades do material – Amolecimento Linear

$E$	= 4,9 GPa	$G_F$	= $52,1 \times 10^{-3} \text{ N/mm}$	$w_c$	= 10,42 $\mu\text{m}$
$\nu$	= 0,15	$G_{F\text{vigaC1}}$	= $59,5 \times 10^{-3} \text{ N/mm}$	$w_{c\text{vigaC1}}$	= 11,90 $\mu\text{m}$
$\sigma_u$	= 10 MPa	$G_{F\text{vigaC2}}$	= $50,2 \times 10^{-3} \text{ N/mm}$	$w_{c\text{vigaC2}}$	= 10,04 $\mu\text{m}$
		$G_{F\text{vigaC3}}$	= $49,6 \times 10^{-3} \text{ N/mm}$	$w_{c\text{vigaC3}}$	= 9,92 $\mu\text{m}$

Na figura 8 ilustra-se a simulação numérica feita no sistema QUEBRA2D-FEMOOP através de uma das malhas utilizadas na modelagem do problema deste exemplo, da configuração deformada (exagerada).

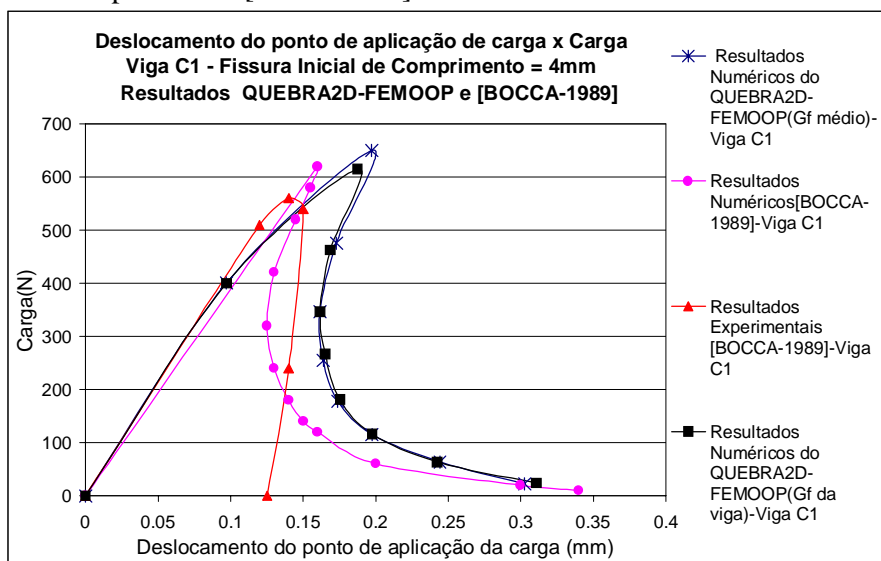


**Figura 8.** Tela do QUEBRA2D - Viga com chanfro inicial de 19mm.

Foram analisados três modelos de vigas (3PB- “Three Point-Bending”) com as mesmas dimensões, mas com chanfro inicial (fissuras iniciais) de três tamanhos diferentes:  $a_0 = 4\text{ mm}$  (viga C1),  $a_0 = 11\text{ mm}$  (viga C2) e  $a_0 = 19\text{ mm}$  (viga C3). Os resultados fornecidos pelo sistema QUEBRA2D-FEMOOP foram comparados com resultados experimentais e numéricos obtidos da literatura [Bocca-1991]. Na viga ensaiada a abertura do chanfro (CMOD) antes do carregamento é de 1,0 mm, esta abertura não foi considerada no modelo numérico.

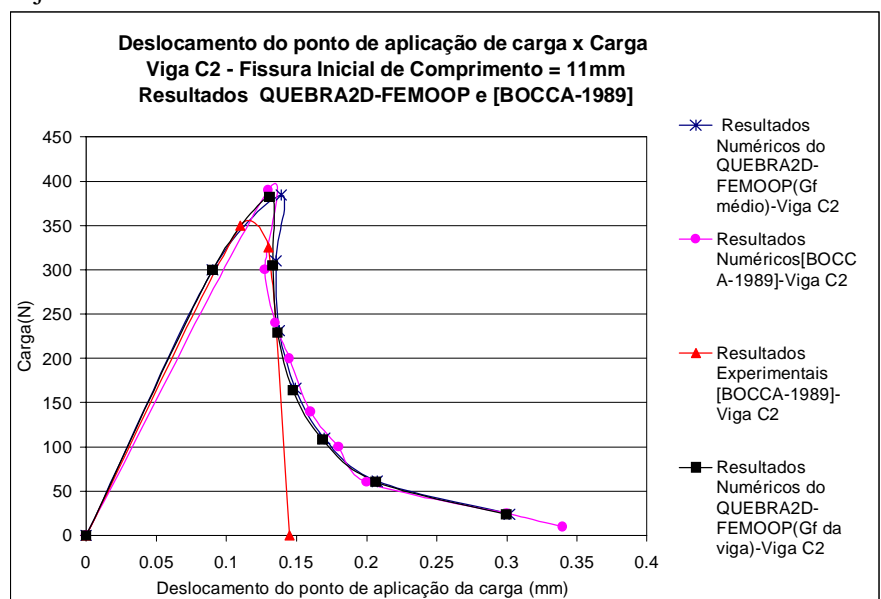
### 5.1.1 Resultados

Nas figuras 9, 10 e 11 são mostrados os resultados para as vigas analisadas, considerando a carga e a flecha do ponto de aplicação de carga. Para cada uma das três vigas modeladas são apresentadas duas curvas de resultados, uma referente a análise que utilizou um valor de energia de fraturamento média do material, igual para todas as vigas ( $G_F = 52,1 \times 10^{-3}$  N/mm), e a outra análise utilizando a energia de fraturamento obtida para cada viga nos ensaios experimentais ( $G_{F-Viga C1} = 59,50 \times 10^{-3}$  N/mm,  $G_{F-Viga C2} = 50,20 \times 10^{-3}$  N/mm e  $G_{F-Viga C3} = 46,70 \times 10^{-3}$  N/mm). São apresentados também os resultados experimentais e numéricos obtidos por Bocca [Bocca-1991].

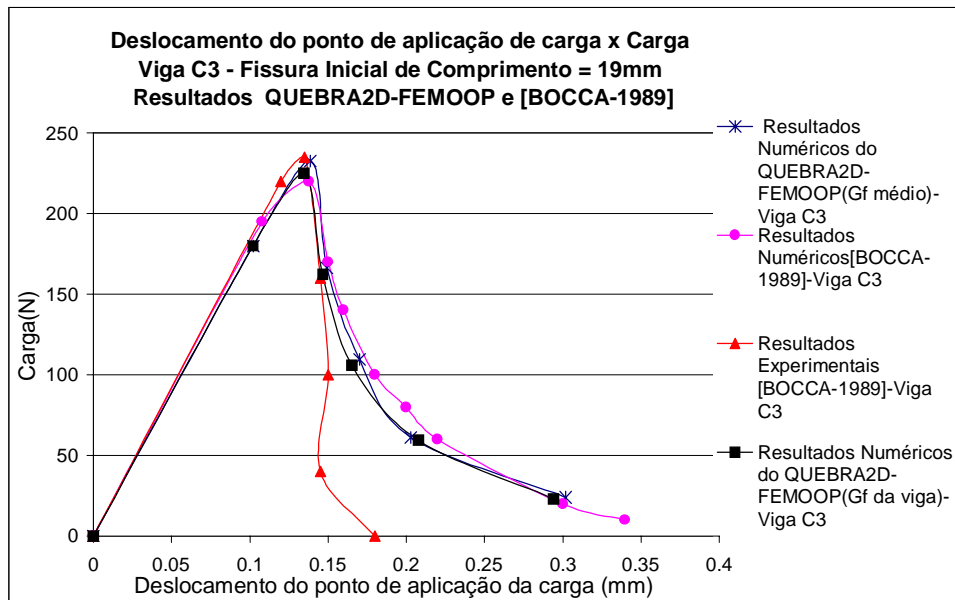


**Figura 9.** Curva deslocamento do ponto de aplicação de carga (flecha)  $\times$  carga – Viga C1.

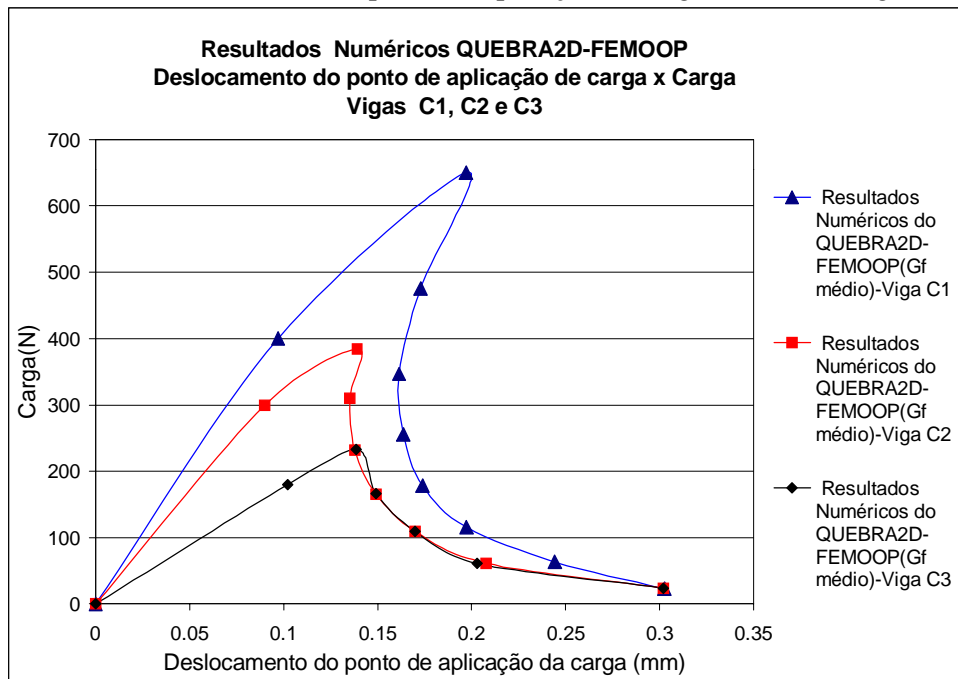
Observando os gráficos das figuras 9, 10 e 11 nota-se que os resultados obtidos através da análise que utiliza os valores de energia de fraturamento obtidos através do ensaio de cada viga aproximam-se mais dos resultados experimentais do que aqueles em que se utilizou um valor médio de energia de fraturamento do material, para as vigas C1e C2, embora os resultados sejam bastante semelhantes entre si.



**Figura 10.** Curva deslocamento do ponto de aplicação de carga (flecha)  $\times$  carga – Viga C2.



**Figura 11.** Curva deslocamento do ponto de aplicação de carga (flecha) × carga – Viga C3.



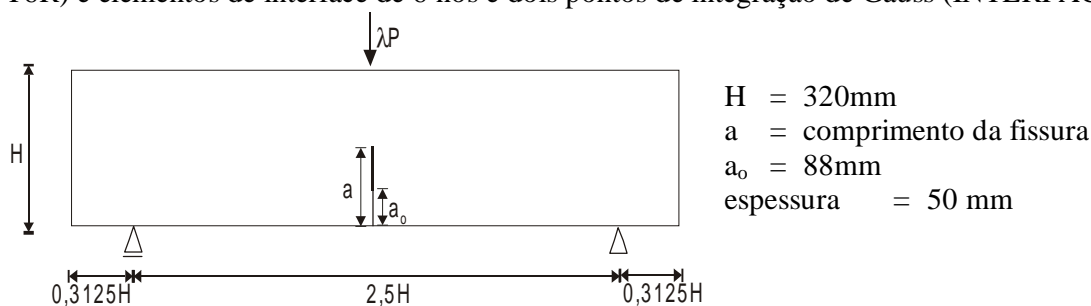
**Figura 12.** Comparação das curvas de equilíbrio das vigas C1, C2 e C3.

É possível observar na figura 12 que o efeito coesivo se mostra atuante quando o comprimento de fissura fictícia é maior, aumentando o comportamento dúctil. Isto ocorre na viga C3, decrescendo na viga C2, e sendo a viga C1 a mais frágil das três, que se traduz através do efeito acentuado de “snap-back” na sua curva de equilíbrio. A maior diferença entre resultados ocorreu na viga C1. Isto porque, sendo a viga C1 a mais frágil das três analisadas, há maior concentração de tensão na região da fissura, pequeno comprimento de fissura fictícia e por isso grande variação de tensão na região coesiva, além de uma maior variação de tensão dentro do elemento de ponta de fissura onde se faz o controle de tensão. Comparando-se as curvas de resultado obtidas pelo sistema QUEBRA2D-FEMOOP, demonstram que o programa fornece resultados satisfatórios, em comparação com resultados experimentais.

## 5.2 Amolecimento Bi-Linear

Neste exemplo também foi analisada uma de viga sujeita à flexão por três pontos TPB (“Three Point Bending”) (figura 10) com fissura alinhada à carga no vão central é tipicamente um modelo de fraturamento no Modo I. Neste modelo considerou-se o modelo constitutivo de amolecimento bi-linear e estado plano de tensão. Esta viga foi analisada experimentalmente por Jamet et al. [Jamet-1995].

A modelagem no sistema QUEBRA2D-FEMOOP também foi feita utilizando elementos triangulares de 6 nós e 3 pontos de integração de Gauss (T6 e elementos de roseta mid-point - T6R) e elementos de interface de 6 nós e dois pontos de integração de Gauss (INTERFACE).



**Figura 13.** Geometria da viga.

**Tabela 2.** Propriedades dos materiais – Amolecimento Bi-linear

E = 30,7 Gpa		ν = 0,15	
Material 1:		Material 2:	
G <sub>F</sub> = 60,0×10 <sup>-3</sup> N/mm		G <sub>F</sub> = 60,0×10 <sup>-3</sup> N/mm	
σ <sub>u</sub> = 4,0 MPa	w <sub>c</sub> = 77,33 μm	σ <sub>u</sub> = 4,0 Mpa	w <sub>c</sub> = 46,67 μm
σ <sub>1</sub> = 0,6 MPa	w <sub>1</sub> = 16,0 μm	σ <sub>1</sub> = 0,6 Mpa	w <sub>1</sub> = 20,0 μm

Foram feitas análises da viga com mesma geometria, mas com duas leis de amolecimento linear diferentes (material 1 e 2 da tabela 2). As duas leis de amolecimento consideradas têm a mesma energia de fraturamento e a mesma tensão última de tração, mas consideram-se dois diferentes limites de abertura da fissura para mudança da lei de amolecimento ( $w_{1V\text{viga } 1} \neq w_{1V\text{viga } 2}$ ), conseqüentemente, tem-se  $w_{cV\text{viga } 1} \neq w_{cV\text{viga } 2}$ . Na referência [Jamet-1995], a abertura do chanfro (CMOD) anterior ao carregamento é de 3,0 mm. Esta abertura foi desconsiderada na modelagem numérica.

### 5.2.1 Resultados

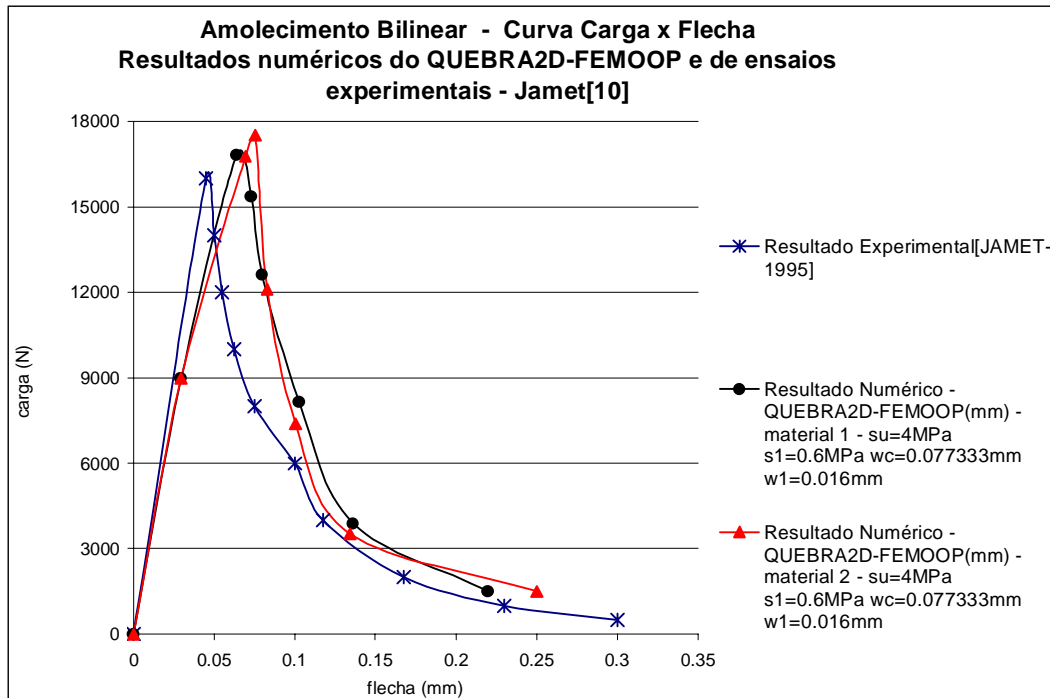
Os resultados obtidos das duas vigas modeladas foram comparadas com resultados experimentais obtidos da literatura [Jamet-1995] e [Álvarez-1997]. Na figura 14 consta curva do deslocamento vertical do ponto de aplicação de carga (flecha) × carga máxima das vigas modeladas, mostrando que os resultados do sistema QUEBRA2D-FEMOOP estão próximos dos experimentais.

Baseando-se nos resultados numéricos obtidos, é possível observar que a curva de amolecimento bi-linear do material 1 se mostrou mais adequada ao comportamento da interface do material ensaiado, pois o material 1 apresentou resultados mais semelhantes aos experimentais do que o material 2. Mesmo assim, ambos superestimam a carga máxima em relação aos resultados experimentais.

Os valores de máximos de carga obtidos nas simulações numéricas do QUEBRA2D-FEMOOP foram superiores ao valor máximo experimental. Esta diferença se deve a diversos fatores, tais como a influência da posição do ponto no qual se faz o controle de tensão. Além disso, a diferença de inclinação entre as curvas numéricas e experimentais na parte superior trecho ascendente deve-se ao fato das curvas numéricas terem sido construídas considerando



o resultado de um único ponto em regime elástico linear, sendo imediatamente conectado a um ponto já em regime não-linear, com efeitos coesivos.



**Figura 14.** Curva flecha × carga–amolecimento bi-linear.

Os resultados fornecidos pelo sistema computacional QUEBRA2D-FEMOOP para amolecimento bi-linear mostram-se bastante animadores quanto ao seu potencial de simulação. Algumas adaptações na parte de controle de tensão podem melhorar significativamente estes resultados.

## 6 CONCLUSÃO

A simulação do fraturamento coesivo por meio do Método dos Elementos Finitos utilizando elementos de interface com modelo constitutivo de amolecimento linear tem se mostrado eficiente. A implementação do fraturamento coesivo no sistema QUEBRA2D-FEMOOP torna-o uma ferramenta computacional muito poderosa para análise de fraturamento de materiais de comportamento quasi-frágil, possibilitando a análise de estruturas de concreto que apresentam fissuras.

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Álvarez, V. Ó. G. : *Estudio de la Fractura en Modo Mixto de los Materiales cuasifrágiles: Aplicación al Hórmigon Convencional y al Hórmigon de Alta Resistencia*, Tesis Doctoral, Departament D'Enginyeria del Terreny i Cartogràfica, Escola Técnica Superior D'Engenyers de Camins, Canals i Ports, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Espanha, (1997).
- Bittencourt, T. N.: *Computer Simulation of Linear and Nonlinear Crack Propagation in Cementious Materials*, Ph.D. Thesis, Cornell University, (1993).
- Bocca, P. , Carpinteri, A. e Valente, S.: *Mixed mode fracture of concrete*, Int. J. Solids Structures, vol. 27, n°9, pág. 1139-1153, (1991).

- Bueno, E.M.R.: *Simulação Bidimensional de Fraturamento Coesivo por meio do Método dos Elementos Finitos*, Dissertação de Mestrado, Dep. de Engenharia de Estruturas e Fundações (PEF), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil, (1999)
- Carpinteri, A., Valente, S. e Bocca, P. : *Mixed mode cohesive crack propagation*, 7<sup>th</sup> International Conference on Fracture(ICF7), 20-24 March 1989, Pergamon Press, Oxford, pág. 2243-2257.(1989)
- Carpinteri, A; Valente, S; Ferrara, G.; Melchiori, G.: *Is mode II fracture energy a real material property?* , Computers and Structures, vol.48, n° 3, pp. 397-413, (1993)
- Crisfield, M.A.: *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Editora John Wiley & Sons, Vol.1, pág. 252-327,(1990).
- Fujji, G.: *Análise de Estruturas Tridimensionais: Desenvolvimento de uma Ferramenta Computacional Orientada para Objetos*, Dissertação de Mestrado, Dep. de Engenharia de Estruturas e Fundações (PEF), Escola Politécnica, USP, (1997).
- Hillerborg, A., Modéer, M., e Petersson, P.E. : *Analysis of a crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements*, Cement and Concrete Research, vol. 6, pág.773-782, (1976).
- Jamet, D., Gettu, R., Gopalaratnam, V. S. e Aguado, A. : *Toughness of fiber reinforced high-strength concrete from notched beam test*, Testing of fiber reinforced concrete, SP-155, D. J. Stevens et al., ACI, Detroit, USA, pág.23-29, (1995).
- Martha, L.F., Menezes, I.F.M., Lages, E.N., Parente Jr, E. and Pitangueira, R.L.S., “*An OOP Class Organization for Materially Nonlinear Finite Element Analysis*”, Join Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering, pp. 229-232, University of Padova, Padova, Italy, (1996).
- Planas, J., Guinea, G. V., Elices, M. : *Rupture modulus and fracture properties of concrete*, *Fracture Mechanics of Structures*, Vol. 1, F. H. Wittmann, eds. , Aedificatio Publishers, Freiburg, Alemanha, pág. 95-110, (1995).
- Schellekens, J. C. J.: *Interface Elements in Finite Elements Analysis*, TNO-BI-90-165, (1990).