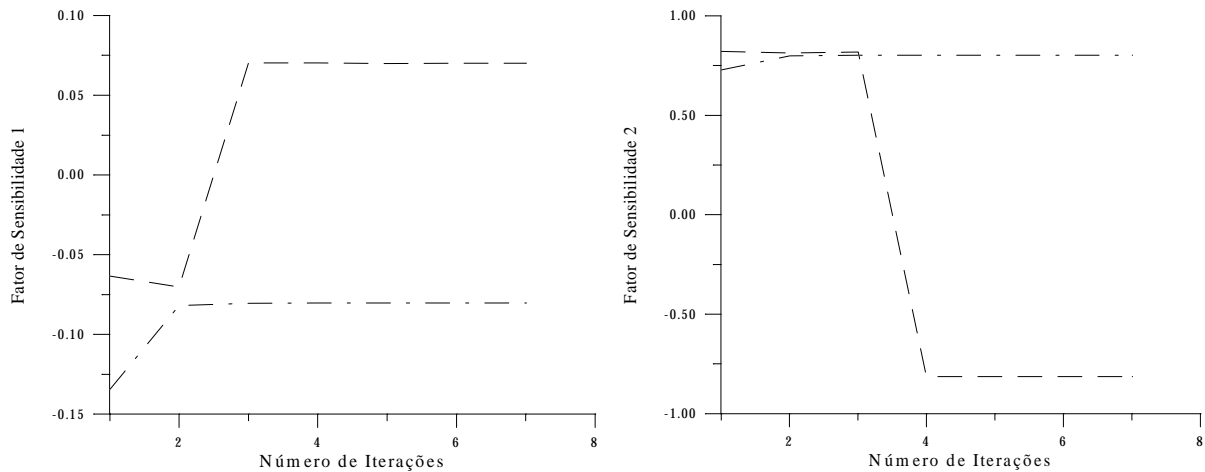


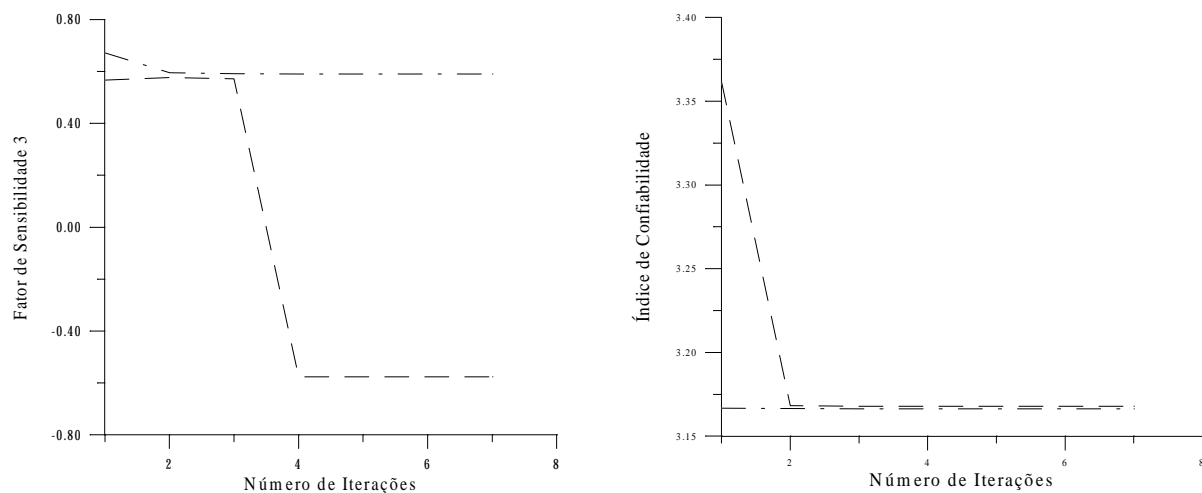
projeto. Deve-se ressaltar que ao utilizar os fatores de omissão de sensibilidade, independente do uso de qualquer esquema de superfície de reposta adaptativa estabelecido a qualidade dos resultados será menor.

## 5 REFERÊNCIAS

- Bucher C. G. and Bourgund U., A Fast And Efficient Response Surface Approach For Structural Reliability Problems, Journal of Engineering Mechanics (ASME), Vol. 115, No. 3, pp. 447-463, March, 1989.
- Der Kiureghian, Lin H. Z. and Hwang S. J., Second - Order Reliability Aproximations, Journal of Engineering Mechanics (ASME), Vol. 113, No. 8, pp 1208-1225, August, 1987.
- Ditlevsen O., Principle of Normal Tail Aproximation, Journal of the Engineering Mechanics (ASME), Vol. 107, No EM6, pp 1191-1207, December, 1981.
- Enevoldsen I., Sensitivity Analysis of Reliability - Based Optimal Solution, Journal of Engineering Mechanics (ASME), Vol. 120, No. 1, pp 198 - 205, January, 1994.
- Hasofer A. M. and Lind N. C., Exact and Invariant Second - Moment Code Format, Journal of the Engineering Mechanics (ASME), Vol. 100, No EM1, pp 111 -121, February, 1974.
- Hohenbichler M. and Rackwitz R., Non-Normal Dependet Vectors in Structural Safety, Journal of the Engineering Mechanics (ASME), Vol. 107, No EM6, pp 1227-1237, December, 1981.
- Kleiber M. and Hien T. D., The Stochastic Finite Element Method: Basic Pertubation Technique and Computer Implementation, John Wiley & Sons, 1992.
- Lumb P. and Li S. K., Reliability Analysis By Numerical Integration And Curve Fitting, Structural Safety, 3 (1985), pp. 29-36.
- Madsen O. H., Omission Sensitivity Factors, Structural Safety, Vol. 5, pp 35-45, 1988.
- Maymon G., Probability of Failure of Structures Without a Closed - Form Failure Function, Computers & Structures, Vol. 49, No. 2, pp. 301-313, 1993.
- Maymon G., Direct Computation of the Design Point of a Stochastic Structure Using a Finite Element Code, Structural Safety, Vol. 14, pp 185-202, 1994.
- Racwitz R. and Fiessler B., Structural Reliability Under Combined Random Load Sequences, Computers & Structures, Vol. 9, pp. 489-494, 1978.
- Shinozuka M., Basic Analysis of Structural Safety, Journal of Structural Engineering (ASME), Vol. 109, No 3, pp.700-740, March, 1983.



**Figura 2.** Comportamento dos fatores de sensibilidade das variáveis de projetos  $X_1$  e  $X_2$ , aplicando-se os esquemas adaptativo e não adaptativo.



**Figura 3.** Comportamento do fator de sensibilidade da variável de projeto  $X_3$  e do índice de confiabilidade, aplicando-se os esquemas adaptativo e não adaptativo.

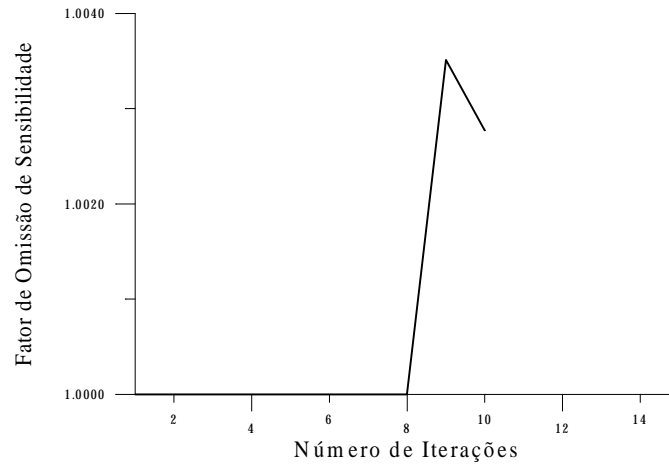
Na análise de confiabilidade realizada utilizou-se o algoritmo HL-RF. O número de iterações foi maior para o esquema adaptativo, porém o número de iterações utilizando as informações geradas pela superfície de estado limite real foi inferior ao esquema não adaptativo.

#### 4. CONCLUSÕES

A análise de sensibilidade aplicada ao problema de confiabilidade estrutural na determinação do índice de confiabilidade de *Hasofer-Lind* mostrou que o emprego das medidas de sensibilidade em problemas que apresentam a superfície de estado limite explícita em termos das variáveis de projeto possibilitou reduzir o custo computacional além de indicar a tendência do processo solução.

A utilização dos fatores de sensibilidade e omissão de sensibilidade não apresentou resultados relevantes, quando aplicada a uma superfície de estado limite aproximada, pois o ajuste conduz a resultados que podem apresentar um desvio significativo em função do grau de não linearidade do problema ou da regularidade da região onde encontra-se ponto de

O fator de omissão de sensibilidade utilizado nesse exemplo possibilitou estabelecer a solução com um número de iterações menor, conforme mostrado na figura 1 comparando-se com as soluções obtidas pelos outros métodos de busca. Isto implica a diminuição do número de avaliações da superfície de estado limite e do esforço computacional.



**Figura 1.** Fator de omissão de sensibilidade da variável de projeto  $X_1$ .

### 3.2 Exemplo 2

Uma haste de seção transversal  $X_2$  é solicitada por uma carga axial  $X_1$ . A falha é caracterizada quando a tensão axial atuante é maior que a tensão de escoamento  $X_3$ ,

$$g(\mathbf{X}) = X_3 - \frac{X_1}{X_2} \quad (17)$$

as variáveis de projeto são normais e correlacionadas,  $\mu_{\mathbf{X}} = \{1000 \ 2 \ 600\}$  e  $\sigma_{\mathbf{X}} = \{33 \ 0,1 \ 20\}$  cuja matriz dos coeficientes de correlação é dada por,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Tabela 2.** Resultados em termos do ponto de projeto e índice de confiabilidade.

Tipo de Análise	$X_1$ *(N)	$X_2$ *(m <sup>2</sup> )	$X_3$ *(MPa)	$\beta_{HL}$	$P_f$ ( $\times 10^{-3}$ )	$N_I$
Adaptativa (CRA)	1007,33	1,78771	563,515	3,16670	0,7780	16
Não Adaptativa (CRA)	1008,39	1,79246	562,573	3,16776	0,7682	10
Referência (Maymon, 1994)	1008,01	1,79354	562,014	3,16804	0,7674	16

Os fatores de sensibilidade não apresentam o mesmo comportamento para os esquemas adaptativo e não adaptativo, porém a resposta em termos de índice de confiabilidade apresenta resultados satisfatórios conforme pode ser observado nas figuras 2 e 3.

## 2.5 Análise de confiabilidade adaptativa

Quando o comportamento da superfície de estado limite é conhecido em termos das variáveis de projeto o índice de confiabilidade de *Hasofer-Lind* é determinado com eficiência. Porém na maioria das aplicações de engenharia não é possível estabelecer pelos processos analíticos conhecidos o comportamento estrutural em relação ao vetor de projeto.

A análise de confiabilidade adaptativa propõe que as informações obtidas nas simulações anteriores sejam utilizadas para realizar uma aproximação do comportamento da superfície de estado limite e do vetor gradiente. Estabelecido o processo adaptativo, as informações necessárias para a determinação do ponto de projeto são provenientes da superfície de estado limite aproximada.

Na análise de confiabilidade adaptativa foram empregadas as técnicas de superfície de resposta (Lumb & Li, 1985) sendo que os comportamentos da superfície de estado limite e do vetor gradiente, foram modelados por

$$\bar{g}(X) = a_0 + b_i X_i + c_i X_i^2 \quad (14)$$

$$\bar{g}_{,j}(X) = a_0 + b_i X_i + c_i X_i^2 \quad (15)$$

sendo,  $a_0$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  coeficientes da aproximação,  $\bar{g}(\cdot)$  e  $\bar{g}_{,j}(\cdot)$  a superfície de estado limite aproximado e a  $j$ -ésima componente do gradiente da superfície de estado limite. Foi utilizada a técnica dos mínimos quadrados (Bucher & Bourgund, 1989) para estabelecer os coeficientes das aproximações propostas. Conforme novos pontos de projeto são determinados, ocorre a atualização dos coeficientes das Equações (14) e (15).

## 3. RESULTADOS

Com o objetivo de avaliar a eficiência da formulação apresentada, propõe-se a resolução de dois exemplos apresentados em (Maymon, 1993) e (Maymon, 1994), utilizando o código computacional desenvolvido.

### 3.1 Exemplo 1

Uma haste de seção transversal circular é tracionada por uma carga conhecida  $T = 5$  kN, tendo como variáveis randômicas o diâmetro ( $X_1$ ) e a tensão de escoamento ( $X_2$ ). As variáveis normais possuem comportamento probabilístico, gaussiano e não são correlacionadas. Admite-se que a falha, para caso estático, ocorre quando a tensão axial atinge a tensão de escoamento do material da haste.

$$g(X) = \frac{\pi X_1^2 X_2}{4} - T \quad (16)$$

**Tabela 1.** Ponto de projeto.

Ponto de projeto	CRA	Der Kiureghian, Lin & Hwang, 1987
$X_1^*$ (mm)	27,5881	28,0500
$X_2^*$ (MPa)	8,3647	8,0900

O tamanho do passo definido pela Equação (10) é determinado pelo comportamento da função de mérito e pelas restrições impostas no seu domínio de existência.

### 2.3 Determinação da probabilidade de falha

Na aproximação de primeira ordem, o comportamento da superfície de estado limite é modelado por hiperplanos, sendo que a probabilidade de falha depende apenas da norma do vetor de projeto no ponto de projeto (Hasofer & Lind, 1974),

$$P_f = \Phi(-\beta_{HL}) \quad (11)$$

sendo  $P_f$  a probabilidade de falha,  $\Phi(.)$  a função de probabilidade normal padrão acumulada. Essa aproximação fornece resultados satisfatórios quando a superfície de estado limite é topologicamente regular nas vizinhanças do ponto de projeto.

### 2.4 Análise de sensibilidade

Na análise de sensibilidade clássica as medidas de sensibilidade estão baseadas no comportamento do sistema em relação a uma variação dos parâmetros, em torno de seus valores nominais. Ao tratar o problema de confiabilidade estrutural o enfoque utilizado na metodologia convencional da análise de sensibilidade poderá inserir erros nas avaliações, por não comportar na sua estrutura o modelamento das dispersões inerentes às variáveis de projeto.

Geralmente nos problemas de confiabilidade estrutural somente algumas variáveis influenciam significativamente sobre o valor total da probabilidade de falha. Como a eficiência numérica decresce, com o aumento do número de variáveis, é importante diminuir esse número, sem causar perda da qualidade dos resultados.

As medidas de sensibilidade exprimem a tendência das variáveis de projeto sobre o comportamento da superfície de estado limite nas regiões investigadas pelo processo solução. Estas medidas possibilitam a redução do número de variáveis sem aumento o custo computacional, por serem estabelecidas, a partir das informações correntes.

O fator de sensibilidade representa a derivada do índice de confiabilidade, em relação às variáveis de projeto no espaço normal padrão,

$$\alpha_i = \frac{\partial \hat{a}}{\partial u_i} \quad (12)$$

é utilizado quando o nível de confiabilidade é especificado.

O fator de omissão de sensibilidade fornece o erro relativo no índice de confiabilidade de Hasofer-Lind, quando admite-se que uma ou um conjunto de variáveis de projeto modifica o seu comportamento de randômico para determinístico, (Madsen, 1993). Definindo-se o fator de omissão de sensibilidade como a razão entre os índices de confiabilidade de Hasofer-Lind,

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{\hat{a}_{HL}(u_i = k)}{\hat{a}_{HL}} \quad (13)$$

considerando-se que a variável de interesse possua comportamentos determinístico e randômico respectivamente.

sendo  $\Gamma$  uma matriz triangular inferior, obtida da decomposição de Choleski da matriz dos coeficientes de correlação e  $\Sigma_X$  a matriz de desvio padrão das variáveis de projeto.

A transformação aplicada às variáveis de projeto deve ser atualizada a cada iteração, pela modificação dos parâmetros das funções densidade de probabilidade normal equivalente das variáveis de projeto.

## 2.2 Processo de busca do ponto de projeto

A escolha da técnica de otimização dependerá de critérios baseados nas propriedades de convergência local e global, na capacidade de resolver problemas não convexos e da taxa de convergência. O algoritmo HL-RF, proposto inicialmente por (Rackwitz & Fiessler, 1978), tem mostrado-se eficiente em relação aos critérios de seleção, além de comportar na sua estrutura informações probabilísticas das variáveis de projeto. A seqüência de pontos é estabelecida por,

$$\mathbf{u}^{k+1} = \frac{[\nabla g(\mathbf{u}^k)\mathbf{u}^k - g(\mathbf{u}^k)]\nabla g(\mathbf{u}^k)^T}{|\nabla g(\mathbf{u}^k)|^2} \quad (5)$$

Com a finalidade de aumentar a convergência global do algoritmo se introduziu uma função mérito para monitorar a seqüência de convergência do método, passando a ser conhecido como HL-RFM (Der Kiureghian & Liu, 1991).

$$m(\mathbf{u}^{k+1}) = \frac{1}{2} \left| \mathbf{u}^{k+1} - \frac{\nabla g(\mathbf{u}^k)\mathbf{u}^k}{|\nabla g(\mathbf{u}^k)|^2} \right|^2 + \frac{1}{2} g(\mathbf{u}^k)^2 \quad (6)$$

No HL-RFM, a atualização do vetor de projeto, é dada pela seguinte expressão

$$\mathbf{u}_f^{k+1} = \mathbf{u}^{k+1} + p\mathbf{d}^k \quad (7)$$

sendo  $\mathbf{d}^k$  o vetor que determina a direção de pesquisa, definido por

$$\mathbf{d}^k = \frac{[\nabla g(\mathbf{u}^k)\mathbf{u}^k - g(\mathbf{u}^k)]\nabla g(\mathbf{u}^k)^T - \mathbf{u}^k}{|\nabla g(\mathbf{u}^k)|^2} \quad (8)$$

onde,  $p$  é o parâmetro que determina o tamanho do passo

$$p = \{p \in \mathbb{R}^n / 0 \leq p \leq 1\} \quad (9)$$

Ao utilizar o HL-RFM coloca-se como opção o ajuste do tamanho do passo é definido por

$$p = 1 - \frac{1}{\exp \left( \left| \frac{-g(\mathbf{u}^k)}{\nabla g(\mathbf{u}^k)} \right| \right)} \quad (10)$$

análise de confiabilidade adaptativa (Madsen, 1988). Para avaliar a formulação e a metodologia empregada desenvolveu-se um código computacional, **CRA** – Component Reliability Analysis.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL PELO MÉTODO DOS MOMENTOS

O problema de confiabilidade estrutural pelo método dos momentos consiste em minimizar a distância entre o ponto de projeto, sobre a superfície de estado limite e a origem do espaço normal padrão. O ponto de projeto é a configuração que o vetor de projeto assume na qual está associada a maior probabilidade de falha, segundo um critério de falha estabelecido. A determinação do índice de confiabilidade de *Hasofer-Lind* pode ser formulada como um problema de otimização, cuja a função objetivo

$$\min \|\beta_{HL}\| \quad (1)$$

sujeito a

$$g(u^*) = 0 \quad (2)$$

onde  $\beta_{HL}$  índice de confiabilidade de *Hasofer-Lind* e  $g(.)$  representa o critério de falha utilizado para avaliar o estado de falha de um componente segundo determinado modo de falha e  $u^*$  o ponto de projeto.

Pela análise dos trabalhos de (Ang & Tang, 1984), (Bjerager, 1990), (Der Kiureghian, Lin & Hwang, 1987), (Enevoldsen, 1994) e (Shinozuka, 1983) pode-se constatar que a abordagem pelo método dos momentos envolve a transformação das variáveis de projeto, processo de busca do ponto de projeto, determinação da probabilidade de falha, análise de sensibilidade e análise de confiabilidade adaptativa.

### 2.1 Transformação das variáveis de projeto

As variáveis de projeto representam as características geométricas do componente, propriedades mecânicas dos materiais e a intensidade do carregamento. O comportamento probabilístico desses parâmetros pode ser caracterizado por funções densidade de probabilidade objetivando melhorar a representação das dispersões do vetor de projeto.

A solução do problema de confiabilidade estrutural é estabelecida num espaço onde o comportamento probabilístico das variáveis de projeto é caracterizado por uma função densidade de probabilidade normal padrão conjunta. As transformações aplicadas nas variáveis de projeto permitem operar com um vetor randômico de projeto normal com componentes correlacionadas (Der Kiureghian & Liu, 1986) e (Ditlevsen, 1981). A transformação aplicada às variáveis no espaço de projeto é representada da seguinte forma,

$$U = J\{X - \mu_x\} \quad (3)$$

$U$  é vetor de projeto no espaço normal padrão,  $\{X - \mu_x\}$  é o vetor que representa a translação no espaço normal padrão,  $\mu_x$  é o vetor média equivalente e  $J$  é a matriz jacobiano, que realiza a rotação dos eixos no espaço normal equivalente, sendo definida por

$$J = \Gamma \Sigma_X^{-1} \quad (4)$$

# EMPREGO DAS MEDIDAS DE SENSIBILIDADE NA DETERMINAÇÃO DA PROBABILIDADE DE FALHA DE COMPONENTES MECÂNICOS

**Cláudio Roberto Ávila da Silva Júnior, M. Sc.**

Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná (CEFET/PR), Av. Sete de Setembro n° 3165, CEP: 80230-901, Curitiba, Paraná, Núcleo de Pesquisa em Engenharia Simultânea (NuPES), e-mail: claudio@damec.cefetpr.br

## Resumo

O trabalho propõe o emprego da análise de sensibilidade na determinação do índice de confiabilidade de Hasofer Lind para componentes mecânicos. Os fatores de sensibilidade e omissão de sensibilidade são empregados para indicar as variáveis de projeto significativas e as direções factíveis do processo solução. Na determinação da probabilidade de falha emprega-se o método dos momentos, com aproximação de primeira ordem aliado às técnicas de superfície de resposta, análise de sensibilidade e a análise de confiabilidade adaptativa. As medidas de sensibilidade são discutidas quando empregadas conjuntamente com o processo adaptativo. Um código computacional foi desenvolvido, onde estão implementadas as transformações das variáveis de projeto, os métodos HLRF e HLRFM e um interpretador simbólico para leitura da função de falha nas aplicações propostas.

**Palavras chaves:** Confiabilidade estrutural, Análise de sensibilidade, Confiabilidade adaptativa

## 1. INTRODUÇÃO

A análise de sensibilidade é uma ferramenta de aplicação crescente no desenvolvimento e avaliação de sistemas. Uma das aplicações usuais da análise de sensibilidade na tarefa de projeto está na indicação da influência das variáveis de projeto em relação ao fenômeno observado. Esta observação é determinada por medidas de sensibilidade baseadas no comportamento do sistema em relação a variações das componentes do vetor de projeto, em torno de seus valores nominais. Essa a definição para as medidas de sensibilidade não é adequada quando aplicada à estrutura da análise de confiabilidade estrutural. Isto se deve por esta não comportar, na sua metodologia o modelamento das dispersões inerentes das variáveis de projeto. Para eliminar esta fonte de erro propõe-se que análise de sensibilidade realizada, trate adequadamente as variabilidades presentes no vetor de projeto.

O objetivo desse trabalho é a determinação da confiabilidade em termos da probabilidade de falha e do índice de confiabilidade de *Hasofer-Lind* (Hohenbichler & Rackwitz, 1981) para componentes mecânicos. Foi necessário o desenvolvimento de uma formulação para tratar o problema de confiabilidade estrutural, utilizando o método dos momentos (Shinozuka, 1983), com aproximações de primeira ordem da superfície de estado limite e da probabilidade de falha. No estabelecimento da solução empregaram-se os algoritmos de busca HL-RF e HL-RFM (Der Kiureghian & Liu, 1991) associado a uma regra para o ajuste automático do tamanho do passo e análise de sensibilidade através dos fatores de sensibilidade e omissão de sensibilidade. Através das informações geradas durante o estabelecimento da solução o comportamento da superfície de estado limite foi aproximado com a finalidade de realizar a