

ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS E CASCAS ATRAVÉS DO ELEMENTO FINITO DE NOVE NÓS COM REFINAMENTO HIERÁRQUICO

Amarildo Tabone Paschoalini

UNESP, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica
Av. Brasil Centro, 56 - 15385-000 - Ilha Solteira, SP, Brasil

E-mail: tabone@dem.feis.unesp.br

Loir Afonso Moreira

UNICAMP, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Projeto Mecânico

Fernando Iguti

UNICAMP, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Mecânica Computacional

Resumo

Este trabalho apresenta a análise de vibração livre não amortecida de placas e cascas através de um elemento finito do tipo hierárquico baseado no conceito de aproximação p . O primeiro nível de aproximação da solução é obtido através do elemento isoparamétrico quadrilateral quadrático de 9 nós da família Lagrangeana, formulado a partir da teoria de Reissner-Mindlin, com integração numérica consistente. Para outros níveis de aproximação são realizados sucessivos refinamentos hierárquicos com o propósito de retirar a característica de rigidez excessiva do elemento isoparamétrico na análise de placas e cascas finas. São apresentados exemplos numéricos para mostrar a precisão, eficiência e vantagens da presente formulação, e os resultados obtidos (frequências naturais e modos de vibrar) são comparados com os disponíveis na literatura.

Palavras-chave: Método dos elementos finitos, Versão p , Vibração livre, Placa, Casca.

1. INTRODUÇÃO

A maior parte das estruturas compostas por placas e cascas projetadas atualmente requerem algum tipo de análise dinâmica para comprovar sua capacidade de suportar carregamentos transitórios. Embora a análise de estruturas compostas por placas e cascas pelo Método dos Elementos Finitos já se estenda por mais de três décadas, o estabelecimento de um modelo que seja confiável, eficiente e aplicável a qualquer situação (placas e cascas finas ou placas e cascas moderadamente grossas) ainda continua a ser objeto de estudo de muitos autores.

Bathe e Dvorkin (1985 e 1986) resumiram os requisitos que devem ser encontrados no desenvolvimento de um elemento finito confiável e eficiente para análise de casca:

1. o elemento deve satisfazer os requisitos usuais de invariância e convergência (Zienkiewics, 1977);
2. o elemento deve ser formulado sem o uso de uma teoria específica, de maneira que possa ser aplicável em qualquer situação de placa ou casca;
3. o elemento deve ser simples, barato e utilizar, considerando a análise de cascas, cinco ou seis graus de liberdade por nó;

4. o elemento deve ser "numericamente seguro", isto é, não deve conter qualquer modo próprio nulo, e deve estar livre do efeito de bloqueio;
5. o elemento não deve ser baseado em fatores de ajuste numérico;
6. o elemento deve ser relativamente insensível às distorções geométricas;
7. o elemento deve ter a capacidade de proporcionar soluções precisas e eficientes.

A formulação para análise de casca baseada na degeneração de um elemento sólido tridimensional através da redução de sua dimensão na direção da espessura tem sido escolhida por um grande número de pesquisadores nos últimos anos com o objetivo de satisfazer os requisitos acima e, baseado nessa formulação, o elemento de nove nós da família Lagrangeana tem sido usado como base para o desenvolvimento de muitos elementos finitos para análise de casca. Em parte, isto se deve às seguintes observações: na análise de tensões no plano o elemento isoparamétrico de nove nós é menos sensível a distorções geométricas que o elemento de oito nós (Cook, 1981 e Verheghe e Powell, 1986) e, para o caso geral de flexão de placas o elemento de nove nós tem um ótimo desempenho se comparado a outros elementos quadriláteros lineares, quadráticos e cúbicos (Pugh *et al.*, 1978). Além disso, os elementos de nove nós para análise de cascas são geralmente considerados como vantajosos em casos onde existem grandes variações de tensões, onde as deformações por flexão dominam a solução, e onde a geometria é curva (Park e Stanley, 1986).

Entretanto, é bem conhecido que os resultados obtidos através do elemento de nove nós para análise de cascas apresentam diversas deficiências (Oñate, 1992). A integração exata do elemento quadrilátero quadrático de nove nós exige 3x3 pontos de integração na quadratura de Gauss-Legendre para a matriz de rigidez que contém os termos relativos à flexão e 3x3 pontos de integração para a matriz de rigidez que contém os termos relativos à cortante (*integração numérica consistente*). Os resultados obtidos são excelentes para situações de placas e cascas moderadamente grossas, contudo, com a redução da espessura o elemento torna-se excessivamente rígido e os resultados não tendem àqueles da teoria clássica de *Kirchhoff* para placas e cascas finas. A *integração numérica reduzida* (2x2 pontos de integração para a matriz de rigidez que contém os termos relativos à cortante) elimina em muitos casos o efeito de bloqueio na análise de placas e cascas finas, mas pode gerar elementos com modos próprios facilmente propagáveis em toda malha para várias condições de contorno, que distorcem a solução.

Este trabalho apresenta uma formulação do tipo hierárquica, baseada no conceito de aproximação p . O primeiro nível de aproximação da solução é obtido através do elemento isoparamétrico quadrilátero quadrático de 9 nós da família Lagrangeana, formulado a partir da teoria de Reissner-Mindlin, com integração numérica consistente. Para outros níveis de aproximação são realizados sucessivos refinamentos hierárquicos (3º, 4º e 5º graus) com o propósito de retirar a característica de rigidez excessiva do elemento isoparamétrico na análise de placas e cascas finas.

No processo de refinamento h a malha de elementos é refinada através da diminuição sucessiva do tamanho dos elementos. Neste processo o número e o tipo de funções de interpolação sobre cada elemento permanecem fixos. A utilização deste tipo de refinamento tende a aumentar o custo da análise (novos nós e elementos têm de ser gerados) e produzir erros associados à subdivisão excessiva da malha de discretização.

Ao contrário, no processo de refinamento p hierárquico o número e a distribuição de nós e elementos sobre a malha discretizada permanecem fixos, no entanto, o número e o grau das funções de interpolação são aumentados progressivamente. As matrizes de rigidez produzidas nos estágios anteriores àquele da aproximação pretendida reocorrem e não precisam ser recalculadas. A qualidade de aproximação da solução e o custo computacional são vantagens que a versão p hierárquica de refinamento oferece em relação à versão h .

2. FORMULAÇÃO















De acordo com Zienkiewicz *et al.* (1971), o campo de deslocamento do elemento de casca é interpolado a partir das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ quadrilaterais quadráticas, e é dado por:

$$\bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i \quad (1)$$

onde o deslocamento $\bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta)$ é um vetor coluna de componentes u, v e w nas direções X, Y e Z, respectivamente, de um sistema de referência global associado ao elemento e, da mesma maneira u_i, v_i e w_i , as componentes do deslocamento $\bar{\delta}_i$. Neste trabalho o campo de deslocamento do elemento de casca será interpolado a partir das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ quadrilaterais quadráticas de nove nós da família Lagrangeana, portanto $n=9$.

O refinamento da expansão quadrática especificada pela Eq.(1) pode ser conseguido adicionando-se a ela funções de forma hierárquicas $M_{pk}(\xi, \eta)$ de ordem superior a dois (Babuska *et al.*, 1981). As funções $M_{pk}(\xi, \eta)$ são polinômios de grau p associados a cada um dos lados do elemento ($k = 1, 2, 3$ e 4) ou são polinômios de grau p , do tipo bolha, associados ao elemento ($k = 5, 6, 7, \dots$). Neste trabalho o refinamento da expansão quadrática foi feito adicionando-se funções de forma hierárquicas de 3º, 4º e 5º graus. As funções de forma utilizadas foram definidas em termos das integrais dos Polinômios de Legendre (Szabo *et al.*, 1991), conforme mostra a Tabela 1.

Tabela 1. Funções de forma hierárquicas de 3º, 4º e 5º graus.

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
$p = 3$						
$p = 4$						
$p = 5$						

Desta forma o deslocamento $\bar{\Delta}$ dado pela Eq.(1) para o caso do elemento isoparamétrico, torna-se:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i \\ & - \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i + \sum_{p=3}^5 \sum_{k=1}^6 M_{pk}(\xi, \eta) \bar{\delta}_{pk} \end{aligned} \quad (2)$$

para o caso de elemento paramétrico do tipo hierárquico. Nesta expressão $\bar{\delta}_{pk}$, de componentes a_{pk}, b_{pk} e c_{pk} segundo os eixos X, Y e Z do sistema de referência global, é o

vetor constituído dos parâmetros hierárquicos. As funções $M_{pk}(\xi, \eta)$ quando inseridas na Eq.(1) não modificam o nível de aproximação do elemento, mas, no entanto, a incógnita $\bar{\delta}_{pk}$ deixa de ter o significado físico de variável nodal. Na realidade, as componentes de $\bar{\delta}_{pk}$ são parâmetros dependentes das incógnitas nodais $\bar{\delta}_i$, α_i e β_i .

De uma maneira compacta, a Eq.(2) pode, ainda, ser dada por:

$$\{u\} = [N] \cdot \{a\} \quad (3)$$

onde $\{u\}$ é uma matriz constituída dos deslocamentos $u(\xi, \eta, \zeta)$, $v(\xi, \eta, \zeta)$ e $w(\xi, \eta, \zeta)$, $[N]$ é uma matriz constituída das funções de forma $N_i(\xi, \eta)$ e $M_{pk}(\xi, \eta)$, e $\{a\}$ é uma matriz constituída dos deslocamentos nodais u_i , v_i , w_i , α_i e β_i e dos parâmetros hierárquicos a_{pk} , b_{pk} e c_{pk} .

De acordo com as hipóteses básicas da teoria de placa e casca (Timoshenko *et al.*, 1959) e em função da solicitação do elemento, um ponto genérico vai apresentar, segundo o sistema de referência local (x', y', z') , a ele associado, o seguinte estado de deformação específica:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y'} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial x'} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z'} & \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} & 0 & \frac{\partial}{\partial x'} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ou ainda,

$$\{\varepsilon'\} = [L] \cdot \{u'\} \quad (5)$$

onde, $\{\varepsilon'\}$ é uma matriz coluna constituída das deformações específicas e distorções em um ponto genérico do elemento segundo o sistema de referência local, $\{u'\}$ corresponde aos deslocamentos segundo o sistema de referência local e $[L]$ é o operador linear.

Aplicando o *Princípio do Trabalho Virtual* e o *Princípio de D'Alembert*, chega-se à determinação das matrizes de rigidez e de massa do elemento:

$$[K^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T \cdot [D'] \cdot [B] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (6)$$

$$[M^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \rho \cdot [N]^T \cdot [N] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (7)$$

onde, $[B]$ é uma matriz que relaciona as deformações específicas com os deslocamentos e as rotações nodais, $[D']$ é uma matriz quadrada, simétrica, constituída das constantes elásticas do material, $|J(\xi, \eta)|$ o determinante da matriz jacobiano da transformação global-local e ρ a densidade de massa por unidade de volume do elemento. De uma forma compacta, pode-se escrever a equação que representa o equilíbrio do sistema:

$$[M^e] \cdot \{\ddot{a}\} + [K^e] \cdot \{a\} = \{f^e\} \quad (8)$$

onde $[M^e]$ é a matriz de massa do elemento, $\{\ddot{a}\}$ é um vetor coluna constituído das acelerações nodais e dos parâmetros hierárquicos, $[K^e]$ é a matriz de rigidez do elemento, $\{a\}$ é um vetor coluna constituído dos deslocamentos nodais e dos parâmetros hierárquicos, $\{f^e\}$ é o vetor de carga. Encontradas as equações algébricas que descrevem as características de cada elemento do sistema estrutural, o próximo passo é combiná-las para formar um conjunto completo de equações, que governe a reunião de todos os elementos. O procedimento de montagem deste conjunto de equações é baseado na necessidade de que o *equilíbrio* se verifique por todo o sistema. Pode-se, portanto, escrever que:

$$[M] \cdot \{\ddot{a}\} + [K] \cdot \{a\} = \{f\} \quad (9)$$

Esta equação representa o caso geral de vibração forçada para sistemas não amortecidos e se não existem forças atuantes no sistema, tem-se o caso de vibração livre. Admitindo-se movimento harmônico a Eq.(9) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$([K] - \lambda \cdot [M]) \cdot \{\phi\} = \{0\} \quad (10)$$

onde $[K]$ e $[M]$ são as matrizes de rigidez e de massa globais do sistema, respectivamente, e λ o quadrado da frequência angular. Entretanto, este problema só pode ser resolvido após a imposição das condições de contorno do sistema estrutural em análise. Para um sistema estrutural com n graus de liberdade podemos escrever que:

$$[K] \cdot [\Phi] = [M] \cdot [\Phi] \cdot [\Lambda] \quad (11)$$

onde $[K]$ e $[M]$ são as matrizes ($n \times n$) de rigidez e de massa globais do sistema, respectivamente, $[\Lambda]$ a matriz diagonal ($n \times n$) que contém os n autovalores λ_i e $[\Phi] = [\{\phi_1\}, \dots, \{\phi_i\}, \dots, \{\phi_n\}]$ a matriz ($n \times n$) que contém os n autovetores $\{\phi_i\}$.

O processo de resolução do problema de autovalor generalizado consiste na obtenção das matrizes $[\Lambda]$ e $[\Phi]$. Para tanto resolve-se, primeiramente, o sistema isoparamétrico:

$$[K_{iso}] \cdot [\Phi_{iso}] = [M_{iso}] \cdot [\Phi_{iso}] \cdot [\Lambda_{iso}] \quad (12)$$

Sendo n_{iso} o número de graus de liberdade da análise isoparamétrica, $[K_{iso}]$, $[M_{iso}]$, $[\Phi_{iso}]$ e $[\Lambda_{iso}]$ são submatrizes ($n_{iso} \times n_{iso}$) correspondentes ao sistema isoparamétrico. Pode-se fazer o refinamento da solução obtida através da primeira reanálise do sistema introduzindo funções de forma hierárquicas de terceiro grau:

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h3}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & [\Phi_{iso,h3}] \\ [\Phi_{h3,iso}] & [\Phi_{h3}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h3}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & [\Phi_{iso,h3}] \\ [\Phi_{h3,iso}] & [\Phi_{h3}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Lambda_{iso}] & [\Lambda_{iso,h3}] \\ [\Lambda_{h3,iso}] & [\Lambda_{h3}] \end{bmatrix} \quad (13)$$

onde as submatrizes correspondentes ao sistema isoparamétrico já foram obtidas anteriormente na análise inicial. Sendo n_{h3} o número total de variáveis hierárquicas introduzidas na primeira reanálise, $[K_{iso,h3}]$, $[M_{iso,h3}]$, $[\Phi_{iso,h3}]$ e $[\Lambda_{iso,h3}]$ são submatrizes ($n_{iso} \times n_{h3}$) correspondentes ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e o sistema hierárquico relacionado com a primeira reanálise, $[K_{h3}]$, $[M_{h3}]$, $[\Phi_{h3}]$ e $[\Lambda_{h3}]$ são submatrizes ($n_{h3} \times n_{h3}$) correspondentes ao sistema hierárquico para a primeira reanálise. De maneira

semelhante, pode-se fazer o refinamento da solução obtida através da segunda reanálise do sistema introduzindo funções de forma hierárquicas de quarto grau e depois de quinto grau.

Como o algoritmo desenvolvido permite que se escolham, independentemente, os lados e elementos a serem refinados, os graus das funções de forma hierárquicas a serem introduzidas, bem como as variáveis hierárquicas de interesse, pode-se ter tantas reanálises quanto se queira. Assim, de uma forma geral, se se pretender fazer a i -reanálise pode-se escrever que:

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & \dots & [K_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [K_{hi,iso}] & \dots & [K_{hi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & \dots & [\Phi_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [\Phi_{hi,iso}] & \dots & [\Phi_{hi}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [M_{iso}] & \dots & [M_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [M_{hi,iso}] & \dots & [M_{hi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & \dots & [\Phi_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [\Phi_{hi,iso}] & \dots & [\Phi_{hi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Lambda_{iso}] & \dots & [\Lambda_{iso,hi}] \\ \vdots & & \vdots \\ [\Lambda_{hi,iso}] & \dots & [\Lambda_{hi}] \end{bmatrix} \quad (14)$$

onde todas as submatrizes anteriores àquelas relacionadas com a reanálise i já foram obtidas. Sendo n_{hi} o número total de variáveis hierárquicas introduzidas na i -ésima reanálise, $[K_{iso,hi}]$, $[M_{iso,hi}]$, $[\Phi_{iso,hi}]$ e $[\Lambda_{iso,hi}]$ as submatrizes ($n_{iso} \times n_{hi}$) correspondentes ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e o sistema hierárquico relacionado com a i -ésima reanálise, $[K_{hi}]$, $[M_{hi}]$, $[\Phi_{hi}]$ e $[\Lambda_{hi}]$ as submatrizes ($n_{hi} \times n_{hi}$) correspondentes ao sistema hierárquico relacionado com a i -ésima reanálise.

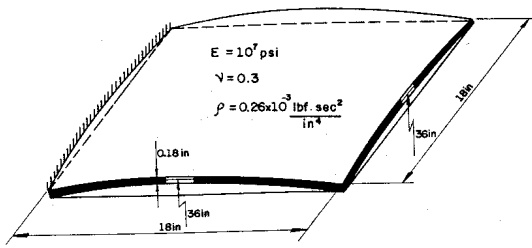
3. RESULTADOS NUMÉRICOS

A seguir são apresentados alguns resultados numéricos onde a confiabilidade e a eficiência, considerando a análise dinâmica de placas e cascas, do elemento finito hierárquico proposto são analisadas. Fez-se, além da comparação dos resultados obtidos nas análises isoparamétrica ($p=2$) e hierárquica de 3º grau ($p=3$), 4º grau ($p=4$) e 5º grau ($p=5$), a comparação dos resultados obtidos com os elementos finitos **9URI** (isoparamétrico quadrilateral quadrático de nove nós com integração totalmente reduzida) e **Shell93** (disponível no "software" comercial ANSYS 5.4).

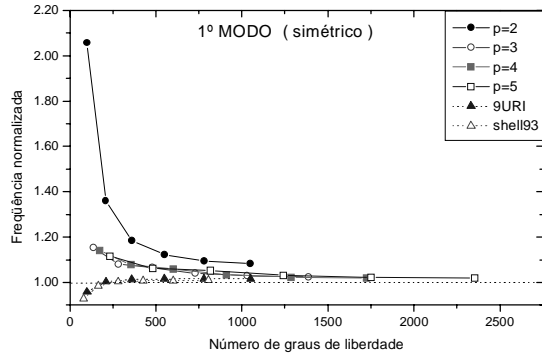
Todos os resultados obtidos com os vários elementos finitos descritos acima foram comparados com os obtidos analítica ou experimentalmente disponíveis na literatura. Os resultados apresentados foram normalizados dividindo-se a frequência natural calculada pela frequência natural "exata" (obtida na literatura).

3.1 Casca esférica engastada em uma extremidade

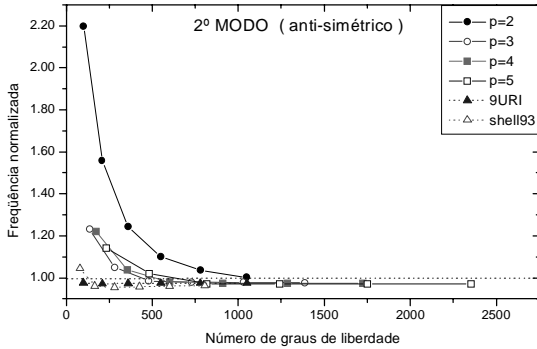
Em função da geometria a casca esférica engastada em uma extremidade (Figura 1a) foi modelada com seis malhas de discretização de 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6 e 7x7 elementos. As Figuras 1b, 1c, 1d, 1e e 1f apresentam as cinco primeiras frequências naturais normalizadas (Leissa *et al.*, 1983) para cada malha de discretização e o número de graus de liberdade envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ($p=2$, $p=3$, $p=4$ e $p=5$) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93).



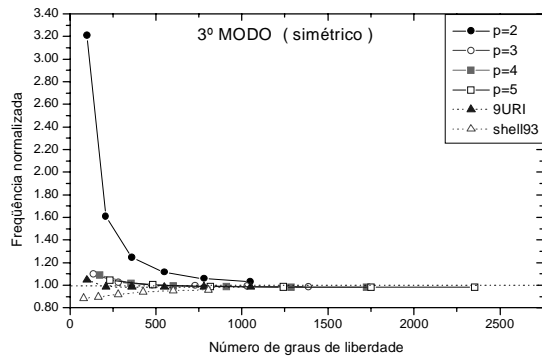
(a)



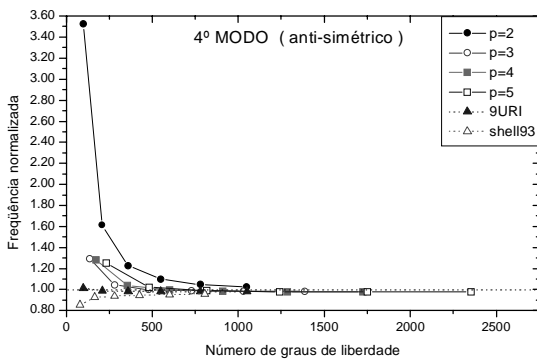
(b)



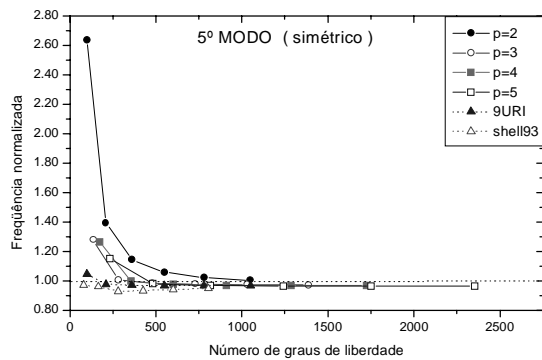
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 1. Casca esférica engastada em uma extremidade (a) e suas freqüências naturais normalizadas para o 1º modo (b), 2º modo (c), 3º modo (d), 4º modo (e) e 5º modo (f).

3.2 Placa quadrada apoiada nos quatro cantos

Para verificar se o elemento finito com refinamento hierárquico gera elementos com modos próprios propagáveis em toda malha foi feito um teste clássico proposto na literatura: a análise de uma placa quadrada apoiada nos quatro cantos que é extremamente sensível à existência de modos próprios de flexão.

Em função da geometria a placa foi modelada com malha de discretização regular de 3x3, 5x5, 7x7 e 9x9 elementos. A Figura 2 apresenta as seis primeiras freqüências naturais normalizadas (Leissa, 1969) para cada malha de discretização e o número de graus de liberdade envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ($p=2$, $p=3$, $p=4$ e $p=5$) e dos outros elementos finitos comparados (9URI e Shell93).

Os resultados obtidos com o elementos finitos 9URI e Shell93 estão muito distantes do "exato" (os modos próprios se propagam em toda malha distorcendo a solução) e por esta razão os resultados para este elemento não aparecem na Figura 2.

Na Tabela 2 são apresentados os seis primeiros modos de vibrar da placa quadrada apoiada nos quatro cantos obtidos a partir do elemento finito proposto (HIERÁRQUICO) e do elemento Shell93 (ANSYS) com malhas de discretização de 9x9 elementos, estes resultados podem ser comparados com os obtidos analiticamente ("EXATO") por Leissa (1969).

Pode-se verificar que os modos de vibrar obtidos com o elemento finito proposto são excelentes, enquanto que os obtidos com o elemento Shell93 apresentam o problema de geração de modos próprios que distorcem a solução.

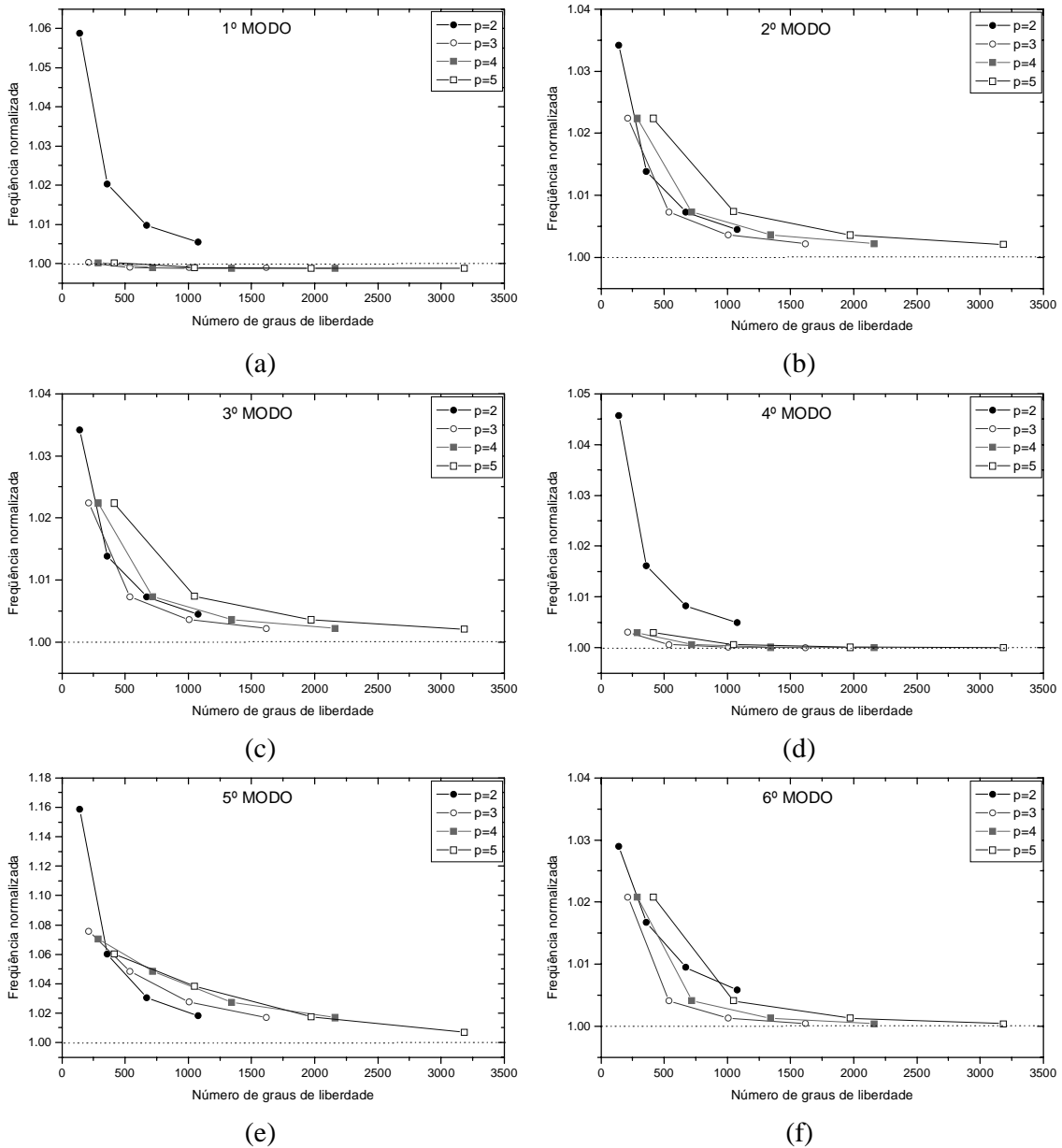
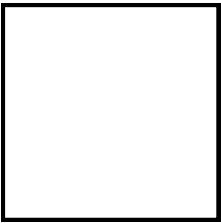
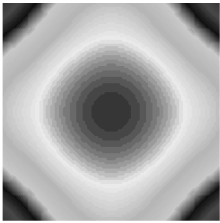
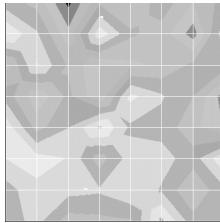
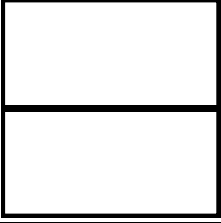
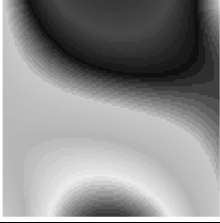
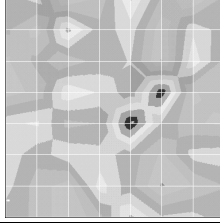
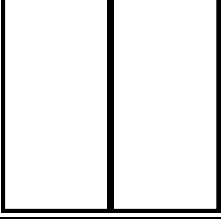
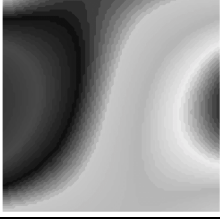
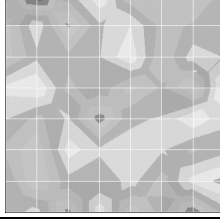
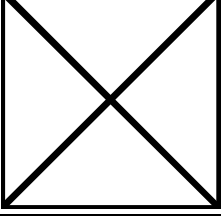
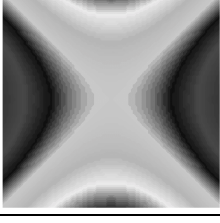
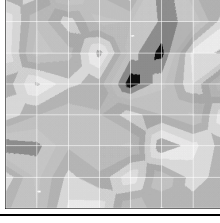
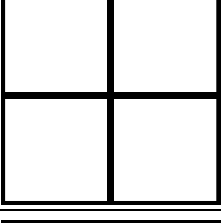
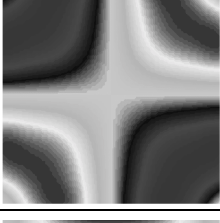
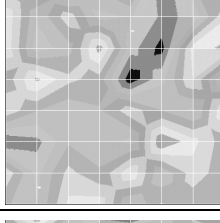
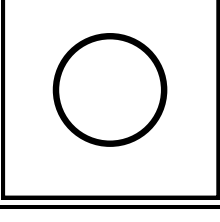
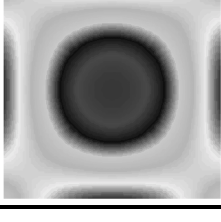
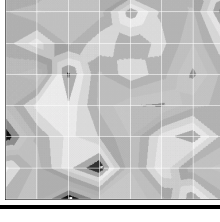


Figura 2. Frequências naturais normalizadas da placa quadrada apoiada nos quatro cantos para o 1º modo (a), 2º modo (b), 3º modo (c), 4º modo (d), 5º modo (e) e 6º modo (f).

Tabela 2. Modos de vibrar da placa quadrada apoiada nos quatro cantos.

	"EXATO"	HIERÁRQUICO	ANSYS
1º MODO			
2º MODO			
3º MODO			
4º MODO			
5º MODO			
6º MODO			

4. CONCLUSÕES

A partir dos resultados dos exemplos numéricos, verifica-se que o refinamento da solução do elemento isoparamétrico, através da introdução de polinômios de terceiro ($p=3$), quarto ($p=4$) e quinto ($p=5$) graus, apresenta os seguintes resultados:

- excelente convergência com o refinamento da malha;
- não apresenta os problemas de bloqueio na análise de placas e cascas finas;
- não gera elementos com modos próprios;
- com o refinamento da malha os resultados convergem para os obtidos com integração reduzida.

Enfim, pode-se dizer que o elemento finito proposto, considerando a análise dinâmica, atende praticamente todos requisitos que devem ser encontrados no desenvolvimento de um elemento finito confiável e eficiente para análise de placas e cascas.

5. REFERÊNCIAS

- Babuska, I., Szabo, B.A. and Katz, I.N., 1981, "The p-version of the finite element method", SIAM J. Num. Anal., vol.21, n.6, pp.1180-1207.
- Bathe, K.J. and Dvorkin, E.N., 1985, "A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation", Int. J. Num. Meth. Engng., vol.21, pp.367-383.
- Bathe, K.J. and Dvorkin, E.N., 1986, "A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components", Int. J. Num. Meth. Engng., vol.22, pp.697-722.
- Cook, W.A., 1981, "The effect of geometric shape on two-dimensional finite elements". CAFEM 6, Proc. 6th Int. Seminar on Computational Aspects of the FEM, Paris.
- Leissa, A.W., Lee, J.K. and Wang A.J., 1983, "Vibrations of cantilevered doubly curved shallow shells". Int. J. Solids Struct., vol.19, pp.411-424.
- Leissa, A.W., 1969, "Vibration of plates". NASA SP-60, Washington, D.C.
- Oñate, E., 1992, "Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos - análisis estático lineal", CIMNE, Barcelona.
- Park, K.C. and Stanley, G.M., 1986, "A curved C^0 shell element based on assumed natural-coordinate strains", J. Appl. Mech., vol.53, pp.278-290.
- Pugh, E., Hinton, E. and Zienkiewicz, O.C., 1978, "A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration", Int. J. Num. Meth. Engng., vol.12, pp.1959-1979.
- Szabo, B.A. and Babuska, I., "Finite Element Analysis", Wiley-Interscience, New York, 1991.
- Timoshenko, P. and Woinowsky-Krieger S., 1959, "Theory of plates and shells". 2ed., Kogakusha: McGraw-Hill.
- Verheghe, B. and Powell, 1986, "Control of zero-energy in 9-node plane element", Int. J. Num. Meth. Engng., vol.23, pp.863-869.
- Zienkiewicz, O.C., 1977, "The finite element method", 3rd ed., McGraw-Hill, New York.
- Zienkiewicz O.C., Irons, B.M, Scott, T.C., Campbell, J.S., 1971, "Three dimensional stress analysis". Proc. IUTAM Symp. On High Speed Computing of Elastic Structures, Liege, Belgium, vol.01, pp.413-432.