

PROJETO E DESENVOLVIMENTO DE UM PÊNULO INVERTIDO COMO EXEMPLO DE APLICAÇÃO DA DIDÁTICA DE APRENDER FAZENDO

Roberto Firmento de Noronha
Leonardo Tadeu Garcia Lima
Leonardo Assá Galego Soares
Marcelo Tomaz Zambon da Silva

UFF - Universidade Federal Fluminense, Departamento de Engenharia Mecânica, Rua Passo da Pátria, 156 - 24210-240 - Niterói, RJ, Brasil. E-mail: rnoronha@mec.uff.br

Resumo

O pêndulo invertido é um sistema mecânico com dois graus de liberdade, que são o deslocamento horizontal do carrinho e o deslocamento angular da haste. Só se garante a estabilidade da haste na posição vertical através de um sistema de controle em malha fechada agindo sobre o acionador do carro. Um protótipo deste está sendo desenvolvido na UFF como uma atividade de ensino através da metodologia de “mãos na massa”. Para tanto, um dispositivo ótico de sensoriamento foi concebido e testado enquanto que o motor de corrente contínua, a ser empregado para o acionamento do carrinho, teve suas constantes elétricas medidas, junto com suas curvas de resposta. O controle deverá ser PID e implementado digitalmente. Neste trabalho, deseja-se apresentar as atividades realizadas para o projeto e desenvolvimento do protótipo, inclusive quanto a modelagem, projeto do controle e simulação.

Palavras-Chave: Atividade *Hands-On*, Controle de Sistemas Mecânicos, Pêndulo Invertido

1. INTRODUÇÃO

O pêndulo invertido é um equipamento típico para o ensino da teoria de controle aplicada a sistemas mecânicos, seja o chamado controle clássico baseado em funções de transferência, seja o chamado controle moderno baseado em equações de estado, sejam também técnicas de controle não-linear, tais como controle adaptativo, nebuloso, por redes neurais etc. Este equipamento consiste em uma haste conectada a um carrinho através de uma rótula, com um peso colocado na extremidade superior da haste. Trata-se, assim, de um sistema mecânico de dois graus de liberdade, referentes ao deslocamento horizontal do carrinho e à rotação da haste, em um plano vertical que contém o eixo de deslocamento do carrinho.

Trata-se também de um sistema de equilíbrio instável, pois a tendência do pêndulo é de cair, por influência do peso. A finalidade do controle é manter o pêndulo na sua posição de equilíbrio, na vertical, pelo simples deslocamento do carrinho, para frente ou para trás. Para tanto, a posição do pêndulo é monitorada através de um sensor acoplado ao eixo do mesmo, de modo que, de acordo com o deslocamento angular do pêndulo, o sensor manda um sinal que indica a posição do pêndulo para o controlador, o qual atua no motor, ajustando a tensão elétrica que comanda o torque do motor e atuando, desta forma, sobre o deslocamento horizontal do carro.

Um protótipo deste está sendo desenvolvido na UFF como uma atividade de ensino através da metodologia de “*hands-on*”, conceito este que pode ser traduzido para “mãos na massa” ou “aprender fazendo”. Consiste em fazer os alunos apropriarem o conhecimento

através de atividades práticas de bancada, atividade esta que se insere dentro do programa REENGE da FINEP. A diretriz de projeto foi apenas que o equipamento deveria ser pequeno, para facilitar o seu transporte e permitir que fosse efetivo na sua utilização como um kit didático. Soluções bastante interessantes foram adotadas no decorrer da atividade, seja na concepção do dispositivo, seja nos procedimentos de projeto.

Como parte deste desenvolvimento, um dispositivo ótico de sensoriamento foi concebido e testado enquanto que o motor de corrente contínua, a ser empregado para o acionamento do carrinho, teve suas curvas de resposta determinadas, junto com suas constantes elétricas. O controle deverá ser PID e implementado digitalmente. Neste trabalho, deseja-se apresentar as atividades realizadas para o projeto e desenvolvimento do protótipo, inclusive quanto a modelagem, projeto do controle e simulação.

1.1 Uma pequena revisão bibliográfica

A modelagem do pêndulo invertido é encontrada em livros textos introdutórios de teoria de controle, tais como os de Ogata (1990) e Bélanger (1995). Mais recentemente, Tilbury e Messner (1999) disponibilizaram tutoriais para o ensino de controle em páginas da Internet, com vários exemplos de sistemas mecânicos, incluindo o pêndulo invertido e o motor de corrente contínua. Enquanto isto, Duchesne et al. (1991) e Smith & Blackburn (1992) enfatizaram o lado experimental, da montagem do sistema e a realização de seu controle.

Por outro lado, o equipamento é uma interessante plataforma para testar e comparar a eficiência de diferentes algoritmos de controle. A esse respeito, Kajiwara et al. (1999) utilizam uma variação do pêndulo invertido para demonstrar a aplicabilidade de técnicas de controle de sistemas variantes no tempo.

2. CONCEPÇÃO MECÂNICA

O dispositivo foi concebido a partir de uma base de impressora matricial, junto com seu carro de impressão. Este desliza ao longo de uma guia e é conectado ao acionador elétrico por meio de uma correia dentada. A base do pêndulo propriamente dito, englobando o sistema de sensoriamento de posição angular, foi montado sobre o carro da impressora, tendo sido seu corpo confeccionado em acrílico, com a haste acoplada a um eixo transversal. Para verificar a robustez do controlador, o peso ligado ao pêndulo foi montado de modo que se possa mudar sua posição ao longo da haste, podendo variar assim sua distância em relação ao eixo de rotação. A figura 1 apresenta uma foto do protótipo.

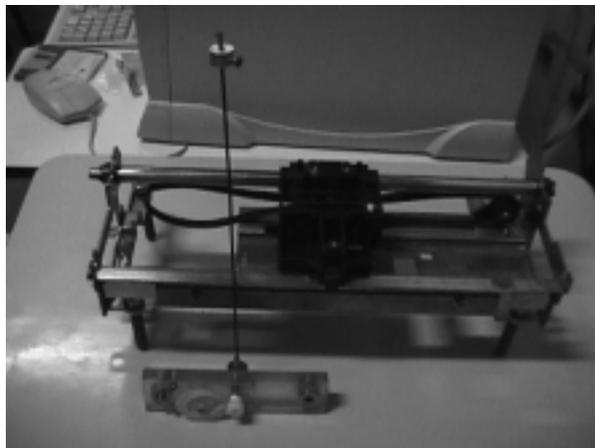


Figura 1. Foto do pêndulo invertido.

A utilização do carro de impressora foi devido à precisão envolvida na sua construção, necessária para o funcionamento adequado do sistema, principalmente quanto ao perfeito ajuste entre o carro e a guia, reduzindo atrito e perturbações. Adicionalmente, a correia dentada permite um bom acoplamento entre o motor e o carro, devido a baixa elasticidade da correia, permitindo uma resposta imediata e precisa do carro a um comando do controlador para o motor.

3. MODELAGEM

3.1 Descrição do problema

Conforme esquematizado na figura 2, o pêndulo invertido de massa m e comprimento l desloca-se no plano vertical, em torno de um eixo fixo ao carro. O carro, de massa M , move-se horizontalmente em uma dimensão ao longo do eixo x , sob a influência da força F . O atrito do sistema não é considerado. A força F é regulada de modo a manter o pêndulo na posição vertical.

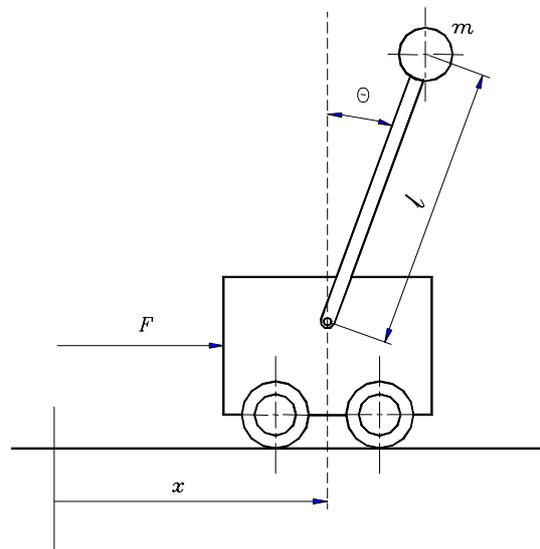


Figura 2. Desenho esquemático de um pêndulo invertido

3.2 Obtenção das equações do modelo

As coordenadas generalizadas são x e θ . A velocidade da massa m tem duas componentes, uma devido ao deslocamento do carro e a outra devido ao deslocamento angular do pêndulo. A velocidade do carro é \dot{x} na direção horizontal. A posição horizontal da massa m é $x + l \sin \theta$ e sua posição vertical é $l \cos \theta$. Aplicando a 2ª Lei de Newton, conforme apresentado por Ogata (1990) ou as equações de Lagrange (Bélanger, 1995), obtém-se o sistema de equações de segunda ordem que descreve o conjunto mecânico:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = F(t) \\ \ddot{x} \cos \theta + l \ddot{\theta} - g \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Semelhantemente, determinam-se também as equações diferenciais que representam o motor elétrico CC a ser utilizado como acionador (Bélanger, 1995). Considerando uma caixa

de redução acoplada ao motor, as equações ficam:

$$\begin{cases} i = \frac{v}{L_a} - \frac{K_e N \dot{\theta}_e}{L_a} - \frac{Ri}{L_a} \\ \ddot{\theta}_e = \frac{NK_t i}{J_e} - \frac{T_l}{J_e} \end{cases} \quad (2)$$

onde i - corrente elétrica passando pelo motor
 v - tensão elétrica aplicada ao motor
 K_e - constante de força contra-eletromotriz do motor
 N - razão de redução da caixa
 θ_e - ângulo de rotação do eixo de saída da caixa de redução
 R - resistência do circuito da armadura do motor
 L_a - indutância do circuito da armadura do motor
 K_t - constante de torque do motor
 T_l - torque útil fornecido pelo conjunto motor - caixa de redução
 J_e - momento de inércia polar efetivo em relação ao eixo de saída da caixa.

3.3 Determinação das equações de estado

Os sistemas de equações (1) e (2) podem ser agregados em um único conjunto a partir das relações existentes entre a força F e o torque útil T_l , $T_l = Fr$, e o deslocamento x com o ângulo θ_e , $x = \theta_e r$. Nestas relações, r é o raio da polia no eixo de saída da caixa de redução, onde se acopla a correia acionadora. Linearizando a seguir as equações em torno da posição de equilíbrio e transformando em um sistema de equações de primeiro grau, chega-se às equações de estado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-mgr^2}{Mr^2 + J_e} & 0 & 0 & \frac{NK_t r}{Mr^2 + J_e} \\ 0 & \frac{(Mr^2 + mr^2 + J_e)g}{(Mr^2 + J_e)l} & 0 & 0 & -\frac{NK_t r}{(Mr^2 + J_e)l} \\ 0 & 0 & \frac{-NK_e}{L_a r} & 0 & \frac{-R}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} v \quad (3)$$

$$y = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} + [0]v$$

3.4 Determinação dos parâmetros do motor

Para o projeto do controle, é necessário a determinação dos parâmetros do motor que aparecem nas equações de estado. No caso dos parâmetros elétricos, R , L_a , K_e e K_t , foi utilizado o roteiro da Pittman (1999). A determinação dos três primeiros parâmetros é relativamente simples. Porém, para se obter a constante de torque do motor, K_t , é necessário

se estabelecer uma curva torque x corrente. Como a medição do torque de motores de pequena potência é bastante difícil, preferiu-se calculá-lo a partir de uma montagem de dois motores conectados entre si pelos eixos, um deles funcionando como gerador. A partir da variação da carga elétrica conectada a este último, foi possível se determinar a potência elétrica fornecida e, através desta, o torque do motor, a menos do rendimento dos motores.

4. SENSORES

O sensoriamento da posição angular foi baseado em foto-transistores. Utilizou-se um LED (diodo emissor de luz) como fonte luminosa, cuja intensidade pode ser considerada constante. Pode-se considerar que a corrente de coletor do foto-transistor é proporcional à intensidade de luz incidente. Um anteparo opaco, na forma de um setor circular, foi montado conforme representado na figura 3. Quando o anteparo se move, há uma variação na área do foto-transistor que está iluminada pelo LED, produzindo, em última análise, uma mudança na tensão de coletor do foto-transistor.

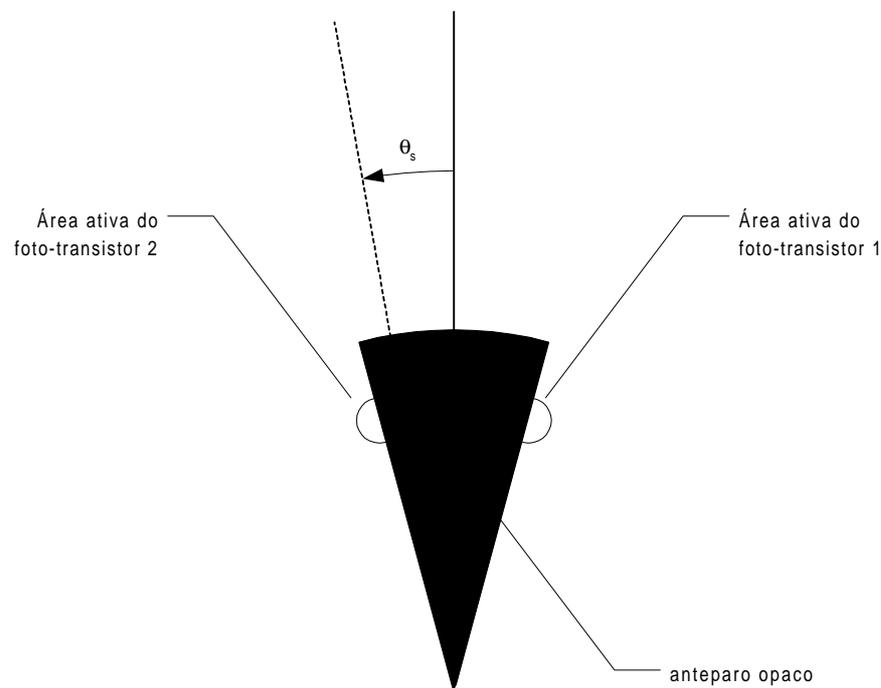


Figura 3. Esquema de montagem do sensor óptico de posição

A variação da tensão de coletor do foto-transistor em função do ângulo de rotação θ_s do setor circular é bastante não-linear, prejudicando sua utilização para aplicações de controle. Visando minimizar este problema, adota-se uma montagem diferencial, utilizando-se dois pares de LED e foto-transistores. Cada foto-transistor é montado de um lado do anteparo opaco, de forma que o movimento da haste produz um aumento da área “iluminada” de um dos foto-transistores, enquanto que esta área diminui para o outro. Pode-se mostrar que a diferença entre as tensões de coletor dos dois foto-transistores é um sinal proporcional à posição angular do setor circular e possui uma característica bastante linear, dentro de uma faixa de valores em torno da vertical. Essa faixa é no entanto bastante limitada, em torno de 1 grau, em função do pequeno diâmetro dos foto-transistores. Para se ampliar esta faixa, um par de engrenagens foi colocado entre os eixos da haste e do setor circular, com razão de ampliação de 1:4,5.

5. PROJETO DO CONTROLADOR

A implementação digital permitirá a utilização de diversas estruturas de controle. No caso deste projeto inicial, utilizou-se um controlador PID que, além de garantir um erro em regime permanente nulo (Bélanger, 1995), é um controlador amplamente empregado e que também permite uma implementação analógica.

Tendo em vista a disponibilidade de um procedimento de otimização baseado em algoritmos genéticos (Potvin, 1994), deu-se preferência à utilização deste procedimento ao invés de métodos clássicos como a análise por lugar das raízes para a determinação dos parâmetros do controlador PID (K_d , K_p e K_i). A função de otimização empregada foi estipulada de forma a, inicialmente, assegurar a estabilidade em malha fechada e, em seguida, reduzir o seu tempo de resposta e o deslocamento máximo ao degrau unitário.

O projeto de controle obtido, contudo, não impunha restrições à tensão aplicada sobre o motor. Os primeiros controladores projetados resultavam em tempos de resposta e de acomodação extremamente reduzidos, às custas de sobretensões elevadas no motor.

A partir deste ponto, buscou-se adaptar o projeto ótimo a valores mais realistas com o equipamento a ser empregado. Este procedimento foi bastante direto, uma vez que já se dispunha de um controle capaz de assegurar a estabilidade em malha fechada do sistema.

6. SIMULAÇÕES

Para demonstrar a qualidade do projeto de controle proposto, simulou-se a partida do dispositivo, considerando-se um ângulo inicial do pêndulo igual a 10° . A Figura 4, abaixo, apresenta o deslocamento do carro até a estabilização do sistema.

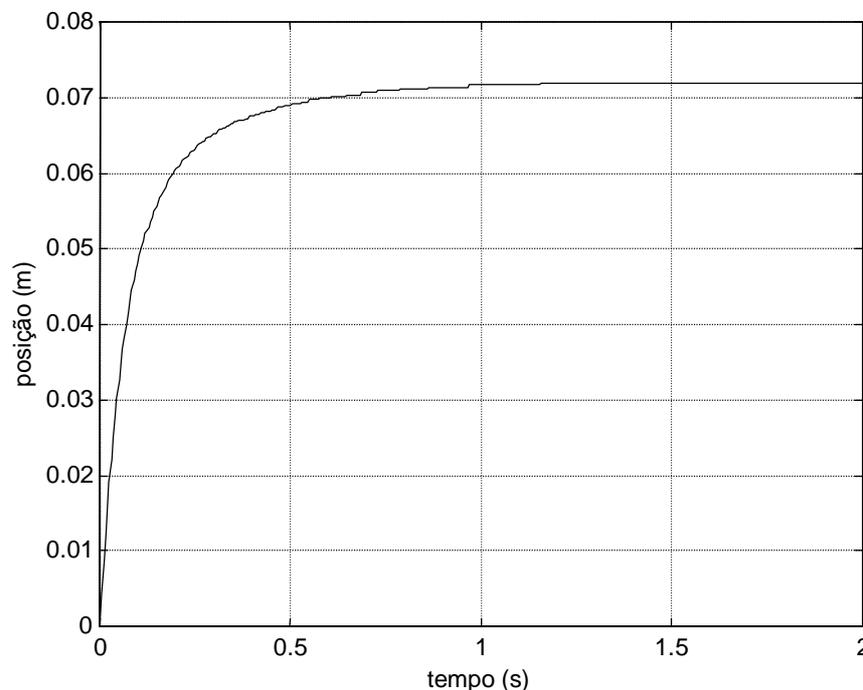


Figura 4. Gráfico de deslocamento do carro após a partida

A Figura 5 mostra o ângulo do pêndulo, partindo de 10° e sendo conduzido rapidamente para a posição de equilíbrio. A Figura 6 demonstra que a tensão elétrica aplicada no motor é

condizente com sua especificação, atingindo um máximo de cerca de 16 V.

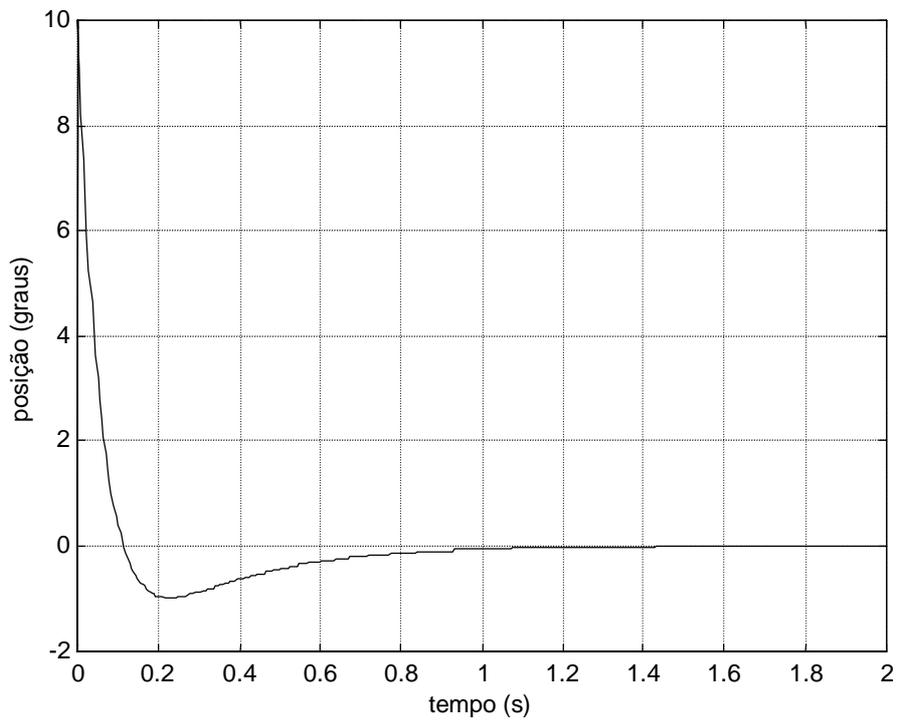


Figura 5. Gráfico da posição angular do pêndulo após a partida

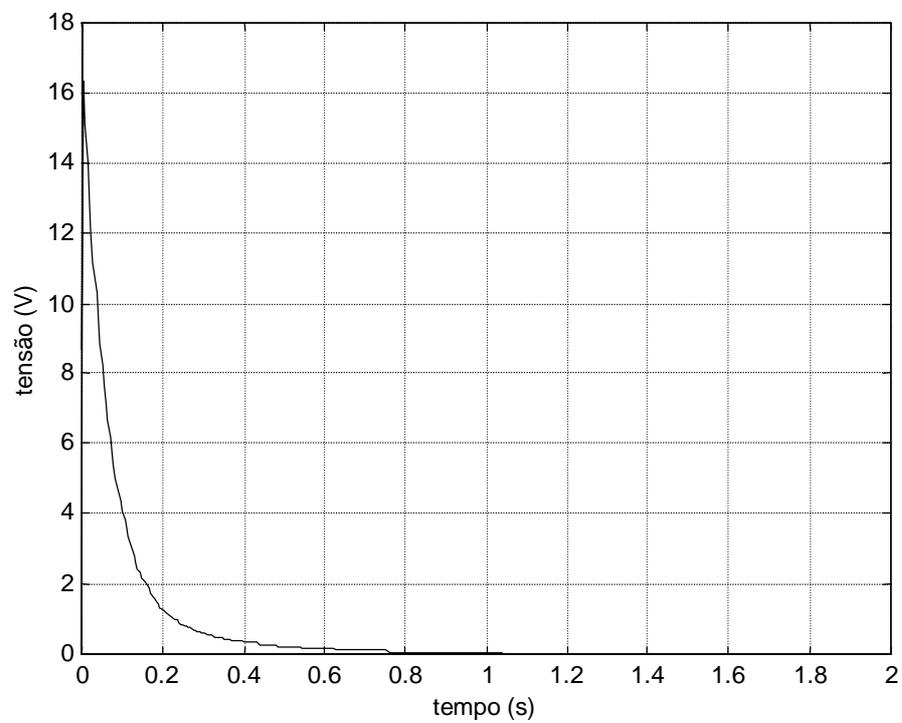


Figura 6. Tensão aplicada no motor após a partida

7. CONCLUSÃO

Foi apresentado o desenvolvimento de um protótipo do pêndulo invertido, desenvolvimento esse realizado não só para se ter um equipamento didático bastante útil para o ensino de teoria de controle, como também para se realizar uma atividade de “aprender fazendo”.

Soluções bastante inovativas foram adotadas no decorrer do projeto, entre as quais cabe destacar:

- i. Aproveitamento da estrutura mecânica de uma impressora matricial;
- ii. Determinação experimental dos parâmetros elétricos do motor;
- iii. Desenvolvimento de um dispositivo ótico de sensoriamento;
- iv. Projeto do controlador por meio de otimização baseada em algoritmos genéticos.

Na avaliação do aspecto didático da atividade, é inquestionável que os alunos orientados tiveram um aprendizado bastante intenso, tanto de conhecimento tecnológico quanto de atitude em relação a enfrentar os diversos problemas encontrados. Porém, deve-se ressaltar que a experiência mostrou, também, outros três aspectos relacionados a esta atividade. A dedicação exigida dos docentes envolvidos com o projeto foi bastante alta. Além disso, a iniciativa exigida dos alunos não se coaduna com o seu perfil médio. Esses dois aspectos levam a restringir a aplicabilidade de atividades desse tipo a um número limitado de alunos voluntários, realmente comprometidos com a realização do projeto. Finalmente, observou-se que essa prática leva a uma apropriação seletiva do conhecimento, basicamente do que foi empregado diretamente na atividade, sem a procura do domínio da base teórica envolvida.

8. AGRADECIMENTOS

É feito agradecimento ao CNPQ, pela concessão de bolsas de iniciação científica que motivou e permitiu o desenvolvimento desse trabalho, e à FINEP, pelo auxílio concedido dentro do programa REENGE.

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bélanger, P.R., 1995, “Control Engineering - A Modern Approach”, Saunders College Pub.
- Duchesne B., Fischer, C.W., Gray, C.G. e Jeffrey, K.R., 1991, “Chaos in the Motion of an Inverted Pendulum: An Undergraduate Laboratory Experiment”, Am. J. of Physics, vol. 59, nº 11, pp. 987-991.
- Kajiwara, H., Apkarian, P. e Gahinet, P., 1999, “LPV Techniques for Control of an Inverted Pendulum”, IEEE Transactions on Control Systems, fevereiro, pp. 44-54.
- Ogata, K., 1990, “Modern Control Engineering”, 2ª edição, Ed. Prentice Hall Int.
- Pittman Motors, 1999, “Servo Motor Application Notes”, <http://www.pittmannet.com>.
- Potvin, A.F., 1994, Genetic Algorithm Toolbox, The MathWorks, Inc., <http://www.mathworks.com/support/ftp/optimsrv4.shtml>.
- Smith, H.J.T. e Blackburn, J.A., 1992, “Experimental Study of an Inverted Pendulum”, Am. J. of Physics, vol. 60, nº 10, pp. 909-911.
- Tilbury, D.M., e Messner, W.C., 1999, “Control Tutorials for Software Instruction over the World Wide Web”, IEEE Transactions on Education, vol. 42, nº 4, novembro, pp. 237-246.