

UM ESTUDO SOBRE A MODELAGEM MATEMÁTICA DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS (PARTE I)

Adriana Elisa Ladeira Pereira
Sebastião Cícero Pinheiro Gomes
Álvaro Luiz De Bortoli

Fundação Universidade Federal do Rio Grande, Dep. de Matemática, CEP 96201-900, Rio Grande, RS, Brasil, E-mail: mmaaelp@super.furg.br, dmtscpg@super.furg.br
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PPGMAp, CEP 91509-900, Porto Alegre, RS, Brasil, E-mail: dbortoli@mat.ufrgs.br

Resumo

Controlar estruturas flexíveis, com o intuito de atenuar vibrações de forma ativa, é um problema complexo. Isto deve-se principalmente ao atuador estar colocado em uma extremidade, enquanto se deseja atenuar vibrações na outra extremidade da estrutura, existindo toda uma dinâmica flexível entre o atuador e o sensor a partir do qual a vibração é medida. Neste sentido, o conhecimento de um modelo dinâmico preditivo e realista pode ser de grande auxílio ao projeto de controladores com condições reais de implementação prática. Estes problemas motivaram a realização deste trabalho, o qual contém um estudo analítico detalhado do problema de modelagem dinâmica de uma estrutura do tipo manipulador flexível. Nesta primeira parte, uma técnica de modelagem é desenvolvida e analisada, tratando-se do Formalismo Discreto. Comparações de respostas em frequência entre as funções de transferência analítica e do modelo discreto são realizadas, concluindo-se ao final sobre a precisão e simplicidade deste primeiro formalismo de modelagem dinâmica estudado.

Palavras-chave: Modelagem, Manipulador, Flexível, Vibrações, Robótica.

1. INTRODUÇÃO

A partir dos anos oitenta, o estudo sobre o controle de estruturas flexíveis tem se intensificado, principalmente motivado por aplicações na robótica flexível (De Luca et al., 1998), (Isogai et al., 1999), (Kim, et al., 1997). Neste artigo serão desenvolvidas as equações dinâmicas governantes do movimento de uma estrutura que consiste em uma lâmina flexível, acoplada em uma extremidade a um atuador do tipo motor elétrico, a partir do qual é aplicado um torque de controle (Figura 1). Na outra extremidade existe uma massa constante, denominada de carga terminal. Serão ainda deduzidas as funções de transferência analíticas (exatas) e as funções de transferência a partir da abordagem discreta, para que se possa fazer comparações entre as mesmas.



Figura 1. Estrutura flexível

2. ESTUDO ANALÍTICO

Considera-se, inicialmente, uma estrutura flexível de comprimento l (Figura 2), fixa na extremidade onde se localiza o rotor, no qual é aplicado um torque T_m , e livre na outra extremidade na qual é colocada uma carga, sendo I_r a inércia do rotor e m_c a massa da carga (de momento de inércia rotacional desprezível).

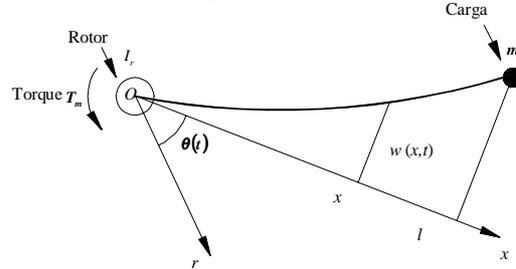


Figura 2. Estrutura flexível.

2.1 Equações da Dinâmica

As equações das Energias Cinética e Potencial são dadas por (Schmitz, 1985):

$$E_c = \frac{1}{2} I_r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial t} + x \dot{\theta} \right)^2 \rho dx + \frac{m_c}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + x \dot{\theta} \right)^2 \Big|_{x=l}, \quad (1)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \right)^2 dx, \quad (2)$$

onde ρ é a massa por unidade de comprimento da linha elástica, E é o Módulo d'Young e I é o momento de inércia da área da secção transversal da estrutura. Foram negligenciados esforços de cisalhamento na estrutura quando esta se deforma, hipótese não restritiva para estruturas delgadas conforme a considerada neste trabalho.

Pelo Princípio de Hamilton (Meirovitch, 1967), obtém-se as seguintes equações do movimento:

$$(I_r + I_B) \ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx + m_c l (\ddot{w}(l,t) + l \ddot{\theta}(t)) = T_m, \quad (3)$$

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,t) + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) + \rho x \ddot{\theta}(t) = 0, \quad (4)$$

com as seguintes condições de contorno (Schmitz, 1985):

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \Big|_{x=0} + T_m - I_r \ddot{\theta} &= 0 \\ w(x,t) \Big|_{x=0} = w(0,t) &= 0 \\ EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \Big|_{x=l} = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) &= 0 \\ EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x,t) \Big|_{x=l} = m_c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + x \ddot{\theta} \right) \Big|_{x=l} & \end{aligned} \quad (5)$$

Considerando-se a transformação de variável sugerida por Brakwel (Soares, 1997):

$$y(x,t) = w(x,t) + x \theta(t), \quad (6)$$

resulta o sistema em função da variável $y(x,t)$:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x,t) + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 0, \quad (7)$$

$$I_r \ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx + m_c l \ddot{y}(l,t) = T_m, \quad (8)$$

com as respectivas condições de contorno:

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Big|_{x=0} + T_m - I_r \ddot{\theta} = 0$$

$$y(x, t) \Big|_{x=0} = y(0, t) = w(0, t) + 0.\theta(t) = 0 \quad . \quad (9)$$

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Big|_{x=l} = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0$$

$$EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x, t) \Big|_{x=l} = m_c \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \Big|_{x=l}$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace na equação (7), resulta em:

$$\frac{d^4 \bar{y}}{dx^4} - \beta^4 \bar{y} = 0 \quad , \quad (10)$$

sendo $\beta^4 = -\frac{\rho}{EI} s^2$ e $\lambda = \beta l$, com as seguintes condições de contorno:

$$\bar{y}(0, s) = 0$$

$$EI \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} \Big|_{x=0} + \bar{T}(s) = I_r s^2 \frac{d\bar{y}}{dx} \Big|_{x=0} \quad , \quad (11)$$

$$EI \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} \Big|_{x=l} = 0$$

$$EI \frac{d^3 \bar{y}}{dx^3} \Big|_{x=l} = m_c s^2 \bar{y} \Big|_{x=l}$$

onde $\bar{T}(s)$ é a transformada de Laplace de $T_m(t)$. A solução geral de (10) é dada na forma:

$$\bar{y} = A \operatorname{sen}(\beta x) + B \operatorname{senh}(\beta x) + C \cos(\beta x) + D \cosh(\beta x) \quad (12)$$

É fácil demonstrar ainda que (Pereira, 1999):

$$\bar{\theta}(s) = \frac{\partial \bar{y}(0, s)}{\partial x} \quad (13)$$

e

$$y_i(s) = \bar{y}(l, s) \quad (14)$$

onde $y_i(s)$ é a transformada de Laplace da posição da carga.

Aplicando-se à equação (12) as condições de contorno (11), resulta no sistema:

$$M(\lambda) \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = -\frac{1}{EI\beta^2} \begin{bmatrix} \bar{T} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (15)$$

onde:

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} \varepsilon \lambda^3 & \varepsilon \lambda^3 & -2 \\ -\operatorname{sen} \lambda & \operatorname{senh} \lambda & -(\cos \lambda + \cosh \lambda) \\ -(\cos \lambda + \eta \lambda \operatorname{sen} \lambda) & \cosh \lambda + \eta \lambda \operatorname{senh} \lambda & \operatorname{sen} \lambda - \operatorname{senh} \lambda + \eta \lambda (\cos \lambda - \cosh \lambda) \end{bmatrix} \quad ,$$

$D = -C$, $\varepsilon = \frac{I_r}{3I_B}$ e $\eta = \frac{m_c l^2}{3I_B}$, sendo I_r o momento de inércia do rotor e I_B o momento de inércia

da lâmina. As constantes A , B , C e D são obtidas da solução de (15), sendo funções de λ e de $\bar{T}(s)$. Substituindo-as na solução geral (12), obtém-se $\bar{y}(s)$ em função de λ e de $\bar{T}(s)$.

2.2 Funções de Transferência Analíticas

Os pólos das funções de transferência são as raízes da equação $D(\lambda) = 0$, sendo $D(\lambda)$ obtido pelo determinante da matriz $M(\lambda)$, que em série de Taylor pode ser escrito como (Pereira, 1999):

$$D(\lambda) = \frac{4}{3} \lambda^3 (1 + 3\varepsilon + 3\eta) \prod_{i=0}^{i=\infty} \left(1 - \frac{\lambda^4}{\lambda_i^4} \right) = \frac{4}{3} \lambda^3 (1 + 3\varepsilon + 3\eta) \prod_{i=1}^{i=\infty} \left(1 + \frac{w_i^2}{w_i^2} \right) \quad (16)$$

sendo $w_i = \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}} \lambda_i, i = 1, 2, \dots, \infty$ e $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, \infty$ as raízes de $D(\lambda) = 0$.

2.2.1 Função de Transferência no caso colocado

No caso colocado, observa-se a posição angular do rotor, ou seja, a observação é feita no mesmo local onde está sendo aplicado o torque motor. As equações (12) e (13) permitem a obtenção do numerador da função de transferência neste caso (Pereira, 1999), o qual possui a forma:

$$N_\theta(\lambda) = -\frac{2}{EI\beta} [1 + \cos \lambda \sinh \lambda + n\lambda(\sinh \lambda \cos \lambda - \sin \lambda \cosh \lambda)] \quad (17)$$

A função de transferência pode então ser escrita como:

$$\frac{\bar{\theta}(s)}{\bar{T}(s)} = \frac{N_\theta(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{1}{I_T s^2} \prod_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{1 + \frac{s^2}{\Omega_i^2}}{1 + \frac{s^2}{w_i^2}} \right), \quad (18)$$

onde $I_T = I_B + I_r + m_c l^2$ é o momento de inércia de corpo rígido.

2.2.2 Função de Transferência do caso não colocado

No caso não colocado, observa-se a posição angular da carga, ou seja, a observação é feita num local diferente do qual está sendo aplicado o torque motor. As equações (12) e (14) permitem a obtenção do numerador da função de transferência neste caso, sob a forma [Pereira, 1999]:

$$N_{y_i}(\lambda) = -\frac{2}{EI\beta^2} (\sin \lambda + \sinh \lambda) \quad (19)$$

A função de transferência pode então ser escrita como:

$$\frac{\bar{y}_i(s)}{\bar{T}(s)} = \frac{N_{y_i}(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{l}{I_T s^2} \prod_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{1 - \frac{s^2}{\alpha_i^2}}{1 + \frac{s^2}{w_i^2}} \right). \quad (20)$$

2.3 Gráficos das Funções de Transferência

Considerando-se os parâmetros de um manipulador flexível real apresentado em (Gomes e Chrétien, 1992a), foram traçadas as respostas em frequência das funções de transferência analíticas nos casos colocado e não colocado, vistas nas figuras 3 e 4 respectivamente.

Na Figura 3 verifica-se a presença de picos que representam os valores nos quais a função de transferência do caso colocado tende a mais infinito, equivalentes, portanto, aos pares de pólos complexos e conjugados em malha aberta. Percebe-se também a existência de pontos nos quais a função de transferência tende a menos infinito, correspondentes aos pares de zeros complexos e conjugados em malha aberta. Trata-se, portanto, de um sistema de fase mínima.

Na Figura 4 identifica-se a presença de picos, representando os pares de pólos complexos e conjugados em malha aberta e verifica-se a ausência de zeros complexos uma vez que, no caso não colocado, o sistema é de fase não mínima.

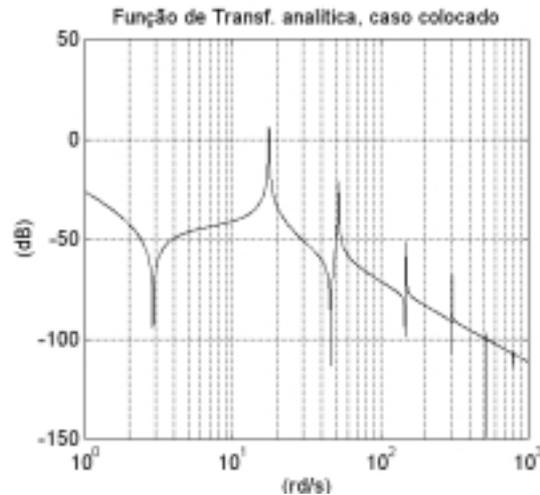


Figura 3. Gráfico da Função de Transferência Analítica (caso colocado).

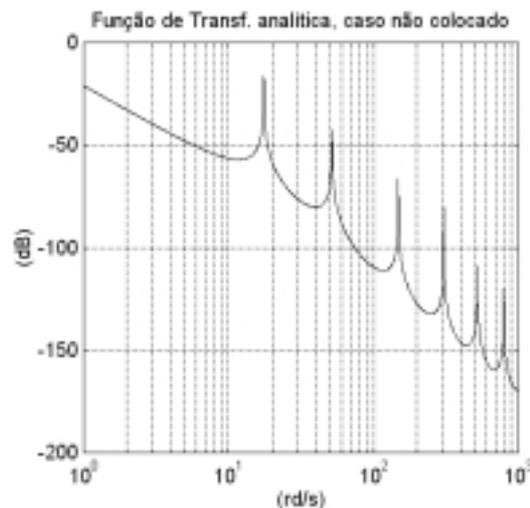


Figura 4. Gráfico da Função de Transferência Analítica (Caso não colocado).

3. ABORDAGEM DISCRETA

Na Abordagem Discreta, a estrutura de flexibilidade contínua é dividida em partes rígidas conectadas por elementos flexíveis chamados de articulações fictícias, sendo que neste artigo será considerado o caso em que a estrutura de comprimento l é dividida em quatro partes rígidas, ou seja, são colocadas três articulações fictícias, conforme mostra a Figura 5.

As partes rígidas (elos) têm massas concentradas nos centros de massa, ou seja, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) e (x_4, y_4) (coordenadas dos centros de massa dos elos de massas m_1 , m_2 , m_3 e m_4 respectivamente), enquanto (x_c, y_c) são as coordenadas do centro de massa

da carga de massa m_c . Conforme observa-se na Figura 5, k é a constante elástica dada por (Gomes e Chrétien, 1992 b): $k = \frac{nEI}{l}$, onde n é o número de articulações fictícias, EI é o módulo d'Young multiplicado pela inércia da seção reta.

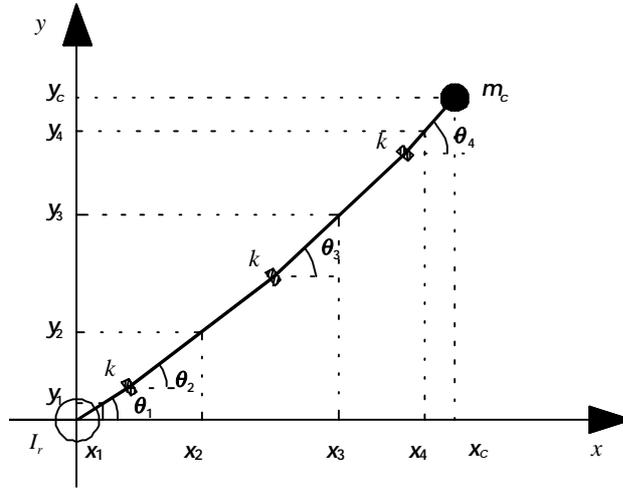


Figura 5. Estrutura dividida em quatro partes rígidas.

3.1 Modelo com três modos flexíveis

Será desenvolvida a modelagem matemática para o caso citado, ou seja, para uma estrutura flexível dividida em quatro partes rígidas com três articulações fictícias (ver Figura 5).

Neste caso, as Energias Cinética e Potencial são escritas na forma:

$$E_c = \frac{1}{2} I_r \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \frac{1}{2} m_4 (\dot{x}_4^2 + \dot{y}_4^2) + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) \quad (21)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2} k (\theta_3 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2} k (\theta_4 - \theta_3)^2. \quad (22)$$

Aplicando-se as equações de Euler-Lagrange, obtém-se o seguinte sistema:

$$[I] \ddot{\vec{\theta}} + [C_{at}] \dot{\vec{\theta}} + [K] \vec{\theta} = \vec{T}_m, \quad (23)$$

onde:

$$I = \begin{bmatrix} I_r + \frac{l^2}{64} \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c \right) & \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) & \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) & \frac{l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \\ \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) & \frac{9l^2}{64} \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c \right) & \frac{9l^2}{64} \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) & \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \\ \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) & \frac{9l^2}{64} \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) & \frac{9l^2}{64} \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) & \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) \\ \frac{l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) & \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) & \frac{3l^2}{64} \left(\frac{m_4}{2} + m_c \right) & \frac{l^2}{64} \left(\frac{m_4}{4} + m_c \right) \end{bmatrix}$$

$$C_{at} = \begin{bmatrix} c_r + c_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix}, \quad \vec{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} \text{ e } \vec{T}_m = \begin{bmatrix} T_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3.2 Funções de Transferência (sistema 3af)

Considerando-se o sistema de equações diferenciais na forma de estado e um vetor de observações

$$\dot{X} = AX + Bu; Y = CX \quad (24)$$

e tomando-se a Transformada de Laplace deste sistema, obtém-se:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (25)$$

onde $G(s)$ é a função de transferência, sendo o numerador e o denominador desta função dois polinômios em s , onde as raízes do denominador são os autovalores da matriz A (pólos de $G(s)$), sendo as raízes do numerador os zeros de $G(s)$.

A matriz $C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ permite a observação da posição angular do rotor, tratando-se portanto do caso colocado, para o qual a função de transferência possui a forma:

$$\frac{\theta_1}{T_m}(s) = \frac{\sum_{i=0}^6 \chi_i s^i}{\sum_{j=0}^8 \gamma_j s^j} \approx \frac{1}{I_T s^2} \frac{\left(1 + \frac{s^2}{\Omega_1^2}\right) \left(1 + \frac{s^2}{\Omega_2^2}\right) \left(1 + \frac{s^2}{\Omega_3^2}\right)}{\left(1 + \frac{s^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 + \frac{s^2}{\omega_2^2}\right) \left(1 + \frac{s^2}{\omega_3^2}\right)} \quad (26)$$

Considerando-se a matriz de observação $C = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, observa-se a posição da carga terminal, sendo a função de transferência, neste caso não colocado:

$$\frac{\theta_4}{T_m}(s) = \frac{\sum_{i=0}^6 \xi_i s^i}{\sum_{j=0}^8 \psi_j s^j} \approx \frac{1}{I_T s^2} \frac{\left(1 - \frac{s^2}{\Omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{s^2}{\Omega_2^2}\right) \left(1 - \frac{s^2}{\Omega_3^2}\right)}{\left(1 + \frac{s^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 + \frac{s^2}{\omega_2^2}\right) \left(1 + \frac{s^2}{\omega_3^2}\right)} \quad (27)$$

Na Figura 6 observa-se a função de transferência do modelo discreto sobreposta ao resultado analítico (Figura 3), para o caso colocado. Verifica-se que os dois primeiros pares de pólos e zeros se aproximam bem dos dois primeiros pares de pólos e zeros observados na Função de Transferência Analítica. Já o terceiro par pólo-zero do caso Discreto é intermediário aos terceiro e quarto pares de pólos e zeros do caso analítico.

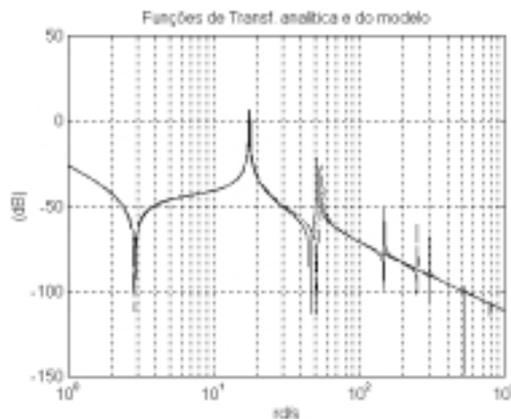


Figura 6 Funções de Transferência Analítica e do Modelo Discreto com 3 modos flexíveis(caso colocado-3af), sendo negligenciados os torques de atrito do Modelo Discreto.

4. CONCLUSÕES

Sobre o Estudo Analítico

- As funções de transferência analíticas são fundamentais para a aferição dos modelos dinâmicos encontrados a partir de diferentes técnicas;
- Com estas funções de transferência obtém-se as respostas frequenciais as quais revelam os pólos (comum aos casos colocado e não colocado) e os zeros (específicos para cada caso);

Sobre o Formalismo Discreto

- Trata-se da mais simples das técnicas em termos matemáticos uma vez que, não há a necessidade de se trabalhar com equações diferenciais parciais, nem, obviamente, com as conseqüentes condições de contorno;
- Esta técnica mostrou ser bem representativa até os primeiros dois modos de vibração, sendo que o mesmo não acontece a partir do terceiro modo, isto para valores iguais das constantes elásticas das articulações fictícias (conforme considerado neste trabalho);
- Devido a sua simplicidade, o Formalismo Discreto apresenta facilidades na obtenção de modelos dinâmicos e cinemáticos para manipuladores com vários elos flexíveis, o mesmo não acontecendo com os demais formalismos vistos na continuação deste trabalho (parte II).

5. REFERÊNCIAS

- De Luca, A., Panzieri, S. and Ulivi, G., 1998, "Stable Inversion Control for Flexible Link Manipulators", IEEE-International Conference on Robotics and Automation, Leuven, Belgium.
- Gomes, S. C. P. and Chrétien, J. P., 1992 a, "Dynamic modeling and friction compensated control of a robot manipulator joint", IEEE-International Conference on Robotic and Automation.
- Gomes, S. C. P. and Chrétien, J. P., 1992 b, "Dynamic modeling and friction compensated control of 1 d. o. f. rigid or flexible manipulator", In Microdynamic et Pointage de Grande Précision, CNES, 1er Symposium International.
- Isogai, M., Arai, F., and Fukuda, T., 1999, "Modeling and Vibration Control with Neural Network for Flexible Multi-Link Structures", IEEE-International Conference on Robotics and Automation, Nice, France.
- Kim, J., Suzuki, K., Yamano, M. and Uchiyama M., 1997, "Vibration Suppression Control of Constrained Spatial Flexible Manipulators", IEEE-International Conference on Robotics and Automation, Albuquerque, New México.
- Meirovitch, L., 1967, "Analytical Methods in Vibrations", The Macmillan Company, New York.
- Pereira, A. E. L., 1999, "Um Estudo Sobre Modelagem Matemática de Estruturas Flexíveis", Dissertação de Mestrado, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil.
- Schmitz, E., 1985, "Experiments on the End-Point Control of a very Flexible One-link Manipulator", Ph.D. Thesis, Stanford, California, Unite States.
- Soares, A. M. S., 1997, "Modelagem e Identificação Experimental de Estruturas Flexíveis", Tese de Doutorado, ITA, São José dos Campos, Brasil.