

## UMA FORMULAÇÃO DEPENDENTE DO TEMPO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ANÁLISE ELASTODINÂMICA BIDIMENSIONAL

J. A. M. Carrer<sup>1</sup>

G. Yu<sup>2</sup>

W. J. Mansur<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ

Caixa Postal 68506, CEP 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

<sup>2</sup> Departamento de Engenharia Oceânica da Universidade de Tianjin

Tianjin, 300072, República Popular da China

**Resumo.** Neste trabalho desenvolve-se uma formulação do método dos elementos de contorno para a análise elastodinâmica bidimensional no domínio do tempo. Admite-se que tanto os deslocamentos quanto as forças de superfície apresentam variação linear no tempo - principal aspecto a ser discutido - e no espaço. A formulação consiste basicamente em se adotar um procedimento do tipo Wilson- $\theta$  para o último intervalo de tempo  $e$ , a partir da resposta no tempo  $t_{n+\theta} = t_n + \theta\Delta t$ ,  $\theta \geq 1$ , obter a resposta no tempo  $t_{n+1}$ . Tal procedimento praticamente não produz custo computacional extra e ainda produz resultados estáveis para problemas que envolvem domínios fechados (ao contrário da formulação padrão, quando se utiliza variação linear para forças de superfície). Dois exemplos são apresentados ao final do trabalho, com o objetivo de validar a formulação apresentada.

**Palavras-chave:** MEC no domínio do tempo, elastodinâmica, método  $\theta$  linear

### 1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresenta-se uma formulação do método dos elementos de contorno dependente do tempo na qual é admitida variação linear no tempo tanto para os deslocamentos - como é usual nas formulações padrão - quanto para as forças de superfície - esta a principal contribuição do trabalho.

O uso de interpolação constante no tempo para as forças de superfície foi adotado por diversos autores, por exemplo (Mansur, 1983, Manolis & Beskos, 1988, e Dominguez, 1993) como uma maneira bastante eficaz de se levar em conta as descontinuidades temporais que podem ocorrer nas forças de superfície ao longo da análise. Assim, quando há reflexão de ondas em corpos finitos, as descontinuidades são razoavelmente bem representadas numericamente com a utilização da hipótese de variação constante das forças de superfície nos intervalos de tempo  $\Delta t$  nos quais o tempo total de análise foi dividido. A seguinte pergunta pode ser feita: não é possível a adoção de funções de interpolação de ordem mais alta para representar a variação temporal das forças de superfície? A resposta é sim e dois caminhos diferentes para a solução do problema são sugeridos. O primeiro, testado com sucesso para o caso da onda escalar (Mansur et alii, 1998), consiste no emprego simultâneo das equações

integrais de contorno para deslocamentos e velocidades nos nós que apresentam deslocamentos (e, portanto, velocidades) prescritos, de tal maneira que, para um dado intervalo de tempo  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ , após a resolução do novo sistema de equações algébricas sejam determinadas as componentes incógnitas de forças de superfície em  $t_{i+1}$  e em  $t_i$  (nova incógnita do ponto de vista da formulação padrão). Procedendo dessa maneira, ao longo da análise são encontrados dois valores, relativos ao mesmo tempo, para as forças de superfície. O segundo, também testado com sucesso para o caso da onda escalar (Yu et alii, 1998), consiste na formulação a ser apresentada neste trabalho para a elastodinâmica e será denominado, ao longo do texto, método  $\theta$  linear. Aqui, ao se efetuar a integração no tempo de forma discreta, isto é, ao se desenvolver um esquema passo-a-passo para a solução do problema, adota-se um procedimento do tipo Wilson- $\theta$  (Bathe, 1996) para o último intervalo de tempo, de tal maneira que, após a solução do sistema de equações, são obtidos valores correspondentes ao tempo  $t_{n+\theta} = t_n + \theta\Delta t$ ,  $\theta \geq 1$ . Note-se que aqui o esquema Wilson- $\theta$  é aplicado para aproximação tanto dos deslocamentos quanto das forças de superfície, enquanto que no MEF é aplicado para aproximação das acelerações. A obtenção da resposta no tempo  $t_{n+1}$  praticamente não acarreta custo computacional extra e se dá com o emprego de fórmulas bastante simples. Além disso, os resultados obtidos são bastante estáveis, demonstrando que a formulação apresenta uma independência maior do que a formulação padrão em relação ao intervalo de tempo adotado.

Importa observar ainda que, neste trabalho, as equações integrais são apresentadas com a utilização do conceito de parte finita de integral (Hadamard, 1952). Para a discretização do contorno são empregados elementos lineares.

Ao final do trabalho são apresentados dois exemplos, com o propósito de demonstrar o desempenho do método no que diz respeito à precisão.

## 2. EQUAÇÕES INTEGRAIS

A equação integral básica do MEC escreve-se como:

$$C_{ik}(\xi) u_k(\xi; t) = \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} u_{ik}^* p_k d\tau d\Gamma - \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} p_{ik}^* u_k d\tau d\Gamma + \rho \int_{\Omega} u_{0ik}^* v_{0k} d\Omega - \rho \int_{\Omega} v_{0ik}^* u_{0k} d\Omega \quad (1)$$

onde  $\Gamma$  representa o contorno,  $\Omega$  representa o domínio e  $\rho$  é a densidade de massa (admitida constante). Os termos com índice 'o' na Eq. (1) e ao longo do texto se referem ao estado inicial ( $\tau = 0$ ).

A solução fundamental é dada por:

$$2\pi\rho c_s u_{ik}^*(X, t; \xi, \tau) = \left( E_{ik} L_s + F_{ik} L_s^{-1} + J_{ik} L_s N_s \right) H_s - \frac{c_s}{c_d} \left( F_{ik} L_d^{-1} + J_{ik} L_d N_d \right) H_d \quad (2)$$

e representa o deslocamento na direção  $k$  no ponto campo  $X$  correspondente a um impulso unitário aplicado na direção  $i$  no ponto fonte  $\xi$  no tempo  $t = \tau$ . A força de superfície fundamental é dada por:

$$2\pi\rho c_s p_{ik}^*(X, t; \xi, \tau) = A_{ik} \left( r L_s^3 H_s + L_s \frac{\partial}{\partial(c_s \tau)} H_s \right) + B_{ik} L_s N_s H_s + \frac{D_{ik}}{r^2} \left( r^3 L_s^3 H_s + L_s N_s \frac{\partial}{\partial(c_s \tau)} H_s \right) - \frac{c_s}{c_d} \left[ B_{ik} L_d N_d H_d + \frac{D_{ik}}{r^2} \left( r^3 L_d^3 H_d + L_d N_d \frac{\partial}{\partial(c_d \tau)} H_d \right) \right] \quad (3)$$

Nas Eqs. (2) e (3)  $r$  é a distância entre os pontos campo e fonte,  $c_s$  e  $c_d$  representam as velocidades das ondas secundária e primária, respectivamente e  $H_s$  e  $H_d$  são as funções Heaviside definidas a seguir:

$$H_s = H[c_s(t - \tau) - r] \quad (4)$$

$$H_d = H[c_d(t - \tau) - r] \quad (5)$$

Os tensores  $E_{ik}$ ,  $F_{ik}$  e  $J_{ik}$  (Eq. (2)) e  $A_{ik}$ ,  $B_{ik}$  e  $D_{ik}$  (Eq. (3)) são definidos como segue:

$$E_{ik} = \delta_{ik} \quad (6)$$

$$F_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{r^2} \quad (7)$$

$$J_{ik} = -\frac{r_{,i} r_{,k}}{r^2} \quad (8)$$

$$A_{ik} = G \left( 2\psi r_{,i} n_k + \delta_{ik} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,k} n_i \right) \quad (9)$$

$$B_{ik} = -\frac{2G}{r^3} \left( \delta_{ik} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i} n_k + r_{,k} n_i - 4 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,i} r_{,k} \right) \quad (10)$$

$$D_{ik} = -2G \left( \psi r_{,i} n_k + \frac{\partial r}{\partial n} r_{,i} r_{,k} \right) \quad (11)$$

onde:

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(X)} = -\frac{\partial r}{\partial x_i(\xi)} = \frac{r_i}{r} \quad (12)$$

e

$$\psi = \frac{c_d^2 - 2c_s^2}{2c_s^2} \quad (13)$$

As funções abaixo também estão presentes nas Eqs. (2) e (3). Note-se que aqui, e ao longo do texto, o índice  $w$  pode ser substituído convenientemente por  $s$  ou por  $d$  para representar, respectivamente, a contribuição da onda secundária ou da onda primária.

$$L_w = L_w(X, t; \xi, \tau) = [c_w^2 (t - \tau)^2 - r^2]^{-1/2} \quad (14)$$

$$N_w = N_w(X, t; \xi, \tau) = 2c_w^2 (t - \tau)^2 - r^2 \quad (15)$$

De acordo com o tratamento dado às derivadas das funções Heaviside presentes na Eq. (3), duas formulações podem ser desenvolvidas: a primeira versão foi apresentada inicialmente por (Mansur, 1983) e se baseia em procedimentos de regularização da função a ser integrada. A segunda versão, que utiliza o conceito de parte finita de integral, apresentado por (Hadamard, 1952), foi adotada neste trabalho. É importante notar que, quando a integração no tempo é efetuada analiticamente, ambas as formulações conduzem às mesmas expressões: este tem sido o procedimento habitual quando se trabalha com formulações do MEC dependentes do tempo e foi adotado aqui.

Na ausência de condições iniciais, a seguinte expressão é obtida quando se adota a segunda versão:

$$\begin{aligned} 2\pi\rho c_s \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} p_{ik}^* u_k d\tau d\Gamma &= \int_{\Gamma} (A_{ik} + D_{ik}) \left( \int_0^{t^+} r L_s^3 u_k H_s d\tau \right) d\Gamma + \\ &\int_{\Gamma} B_{ik} \int_0^{t^+} L_s N_s u_k H_s d\tau d\Gamma - \frac{c_s}{c_d} \int_{\Gamma} B_{ik} \int_0^{t^+} L_d N_d u_k H_d d\tau d\Gamma - \\ &\frac{c_s}{c_d} \int_{\Gamma} D_{ik} \left( \int_0^{t^+} r L_d^3 u_k H_d d\tau \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (16)$$

onde o símbolo  $\int$  representa a parte finita da integral e deve ser interpretado como:

$$\int_0^{t^+} r L_w^3 u_k H_w d\tau = \lim_{\tau \rightarrow t - \frac{r}{c_w}} \left\{ \int_0^{\tau} r L_w^3 u_k d\tau - \frac{1}{c_w} L_w u_k \right\} \quad (17)$$

### 3. RESOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA: FORMULAÇÃO PADRÃO

#### 3.1 Integração no tempo

Para o desenvolvimento do esquema de marcha no tempo, considera-se um conjunto de valores discretos  $t_n$ ,  $n=1,2,\dots,N$ , tais que  $t_{n+1} - t_n = \Delta t$ . Além disso, impõe-se a condição de que a componente de deslocamento  $u_k(X, \tau)$  deve ser contínua por partes até a derivada de ordem um (Mansur & Carrer, 1993). Como foi dito no início deste trabalho, admite-se que os deslocamentos e as forças de superfície possuem variação linear no tempo. Assim sendo, dado

o intervalo  $[t_l, t_{l+1}]$ , pode-se escrever:

$$u_k = u_k^{l+1} \Phi_F + u_k^l \Phi_I; \quad p_k = p_k^{l+1} \Phi_F + p_k^l \Phi_I \quad (18)$$

As funções de interpolação  $\Phi_I$  e  $\Phi_F$  são definidas como segue:

$$\Phi_I = \frac{(t_{l+1} - \tau)}{\Delta t}; \quad \Phi_F = \frac{(\tau - t_l)}{\Delta t} \quad (19)$$

Após a substituição das Eqs. (18) na Eq. (1), integra-se analiticamente no tempo. As expressões integradas dependem das posições relativas das frentes de onda primária e secundária com respeito ao intervalo de  $[t_l, t_{l+1}]$ . Assim sendo, para um dado tempo  $t_n$  três casos são possíveis e podem ser descritos como segue (observe-se que  $t_{rw} = t_n - r/c_w$  representa as duas frentes de onda):

caso 1:  $t_l \leq t_{rw} \leq t_{l+1}$  e  $t_{l+1} = t_n$

caso 2:  $t_l \leq t_{rw} \leq t_{l+1}$  e  $t_{l+1} < t_n$

caso 3:  $t_{l+1} < t_{rw}$

As expressões integradas para a formulação padrão podem ser encontradas em (Carrer & Mansur, 1999).

### 3.2 Integração no contorno

O contorno é discretizado com o emprego de elementos isoparamétricos lineares. Para o cálculo dos coeficientes das sub-matrizes diagonais das matrizes  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{H}$ , relativos aos elementos singulares e ao último intervalo de tempo, há dois aspectos principais a serem considerados:

i) os termos logarítmicos da matriz  $\mathbf{G}$  são integrados analiticamente.

ii) para a matriz  $\mathbf{H}$ , a solução fundamental da estática é subtraída e adicionada à solução fundamental dependente do tempo (Eq. (3)), eliminando dessa maneira a singularidade que ocorre quando 'r' tende a zero e permitindo o emprego da quadratura de Gauss para o cálculo da integral. Para o cálculo das contribuições do termo  $C_{ik}$  e da integral restante, que envolve a solução fundamental da estática, utiliza-se a técnica do movimento de corpo rígido, tal como é feito na análise estática, e.g. (Telles, 1983).

### 3.3 Sistema de equações

A aplicação da Eq. (1) a todos os nós do contorno discretizado produz um sistema de equações que pode ser escrito como segue (Mansur, 1983):

$$(\mathbf{C} + \mathbf{H}^{(n+1)(n+1)}) \mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{G}^{(n+1)(n+1)} \mathbf{p}^{(n+1)} + \sum_{m=1}^n (\mathbf{G}^{nm} \mathbf{p}^m - \mathbf{H}^{nm} \mathbf{u}^m) \quad (20)$$

onde as matrizes com o superíndice  $(n+1)(n+1)$  estão relacionadas ao último intervalo de tempo.

De uma maneira geral, as matrizes  $\mathbf{H}^{nm}$  (ou  $\mathbf{G}^{nm}$ ) são formadas como segue:

$$\mathbf{H}^{nm} = \mathbf{H}_I^{nm} + \mathbf{H}_F^{(n+1)m}, \quad 1 \leq m \leq n \quad (21)$$

onde os índices 'I' e 'F' estão associados, respectivamente, às funções de interpolação  $\Phi_I$  e  $\Phi_F$  (Eqs. (19)). Entretanto, como mencionado no início do trabalho, o emprego de interpolação linear para as forças de superfície na formulação padrão produz resultados instáveis. Isso porque variação linear implica em continuidade da função interpolada (Mansur et alii, 1998) e esse não é o caso das forças de superfície em problemas envolvendo domínios fechados, nos quais ocorrem reflexões de onda. Assim sendo, objetivando utilizar funções de interpolação lineares tanto para deslocamentos quanto para forças de superfície, foi desenvolvida a formulação que será apresentada a seguir.

#### 4. RESOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA: O MÉTODO $\theta$ LINEAR

O método  $\theta$  linear é bastante simples e adota, como último intervalo de tempo, o intervalo modificado  $\Delta t_\theta = \theta \Delta t$  de tal maneira que se pode escrever:  $t_{n+\theta} = t_n + \theta \Delta t$ . O sistema de equações correspondente ao sistema representado pela Eq. (20) pode ser escrito como:

$$(\mathbf{C} + \mathbf{H}^{(n+\theta)(n+\theta)}) \mathbf{u}^{(n+\theta)} = \mathbf{G}^{(n+\theta)(n+\theta)} \mathbf{p}^{(n+\theta)} + \sum_{m=1}^n (\mathbf{G}^{nm} \mathbf{p}^m - \mathbf{H}^{nm} \mathbf{u}^m) \quad (22)$$

onde as matrizes com o superíndice  $(n+\theta)(n+\theta)$  estão relacionadas ao tempo  $t_{n+\theta}$ .

Uma vez resolvido o sistema de equações representado pela Eq. (22), são determinadas as incógnitas no tempo  $t_{n+\theta}$ . Os valores no tempo  $t_{n+1}$  são facilmente determinados com o auxílio da expressão abaixo:

$$f^{n+1} = \frac{1}{\theta} [f^{n+\theta} + f^n(\theta - 1)] \quad (23)$$

onde  $f^{n+1}$  representa os deslocamentos ou forças de superfície em  $t_{n+1}$ .

As integrações no tempo e no contorno são efetuadas de maneira análoga à da formulação padrão.

#### 5. APLICAÇÕES

Nas aplicações que serão apresentadas a seguir, foi utilizada a variável adimensional

$$\beta = \frac{c_d \Delta t}{l} \quad (24)$$

onde  $l$  é o comprimento do menor elemento utilizado na discretização do contorno. Tendo em conta a causalidade (Mansur, 1983), aconselha-se utilizar  $\beta \leq 1,0$ . Observa-se então que o

parâmetro  $\beta$  proporciona uma avaliação qualitativa do intervalo de tempo a ser usado na análise, relacionando-o às variáveis  $l$ ,  $c_d$  e  $\Delta t$ . Nas duas análises adotou-se  $\beta = 0,6$ .

### 5.1 Barra unidimensional

Este exemplo consiste da análise de uma barra unidimensional, mostrada na Fig. 1, submetida a um carregamento subitamente aplicado e mantido constante no tempo. O problema unidimensional foi simulado adotando-se um coeficiente de Poisson nulo; para as demais constantes foram adotados os valores:  $E = 100,0$  e  $\rho = 1,0$ . A malha utilizada está apresentada na Fig. 2.

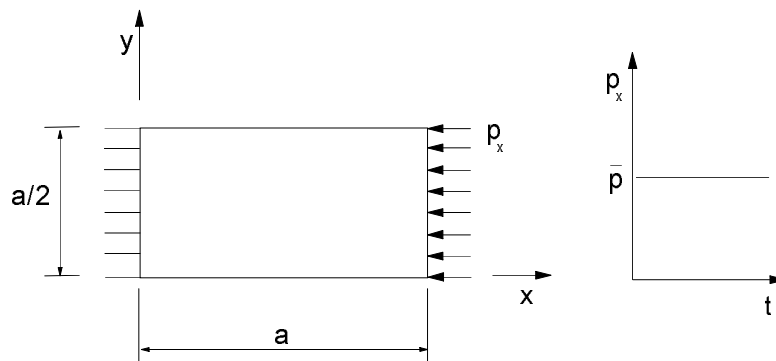


Figura 1- Barra unidimensional: geometria e carregamento.

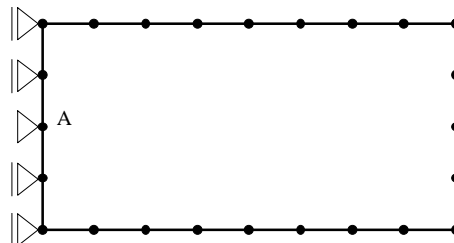


Figura 2- Barra unidimensional: malha de elementos de contorno e nó selecionado.

Inicialmente foi utilizada a formulação padrão ( $\theta = 1,0$ ) para a análise deste problema: os resultados correspondentes à força de superfície no nó  $A(0,a/4)$  apresentam uma rápida deterioração, que invalida completamente a análise (Fig. 3).

O emprego do método  $\theta$  linear, por sua vez, produziu bons resultados. Na Fig. 4 estão apresentados os resultados obtidos com o emprego de  $\theta = 1,4$ . Estes resultados apresentam boa concordância com a solução analítica e são estáveis (observe-se, entretanto, a presença de amortecimento), o que demonstra a eficiência da formulação.

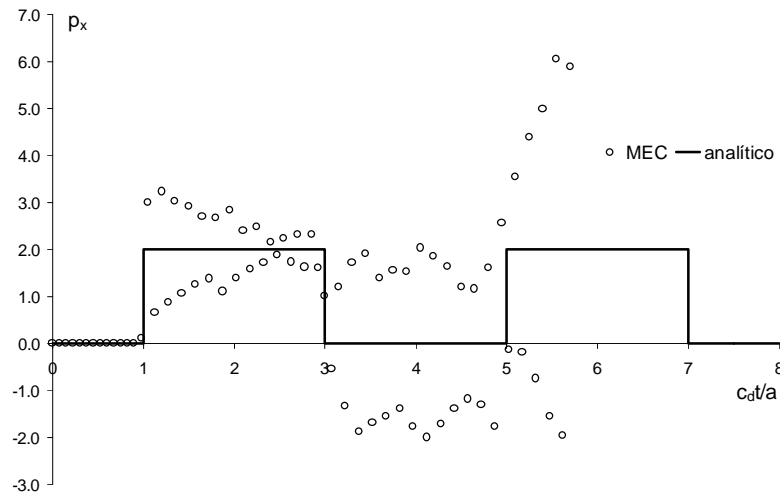


Figura 3- Força de superfície no nó A(0,a/4): formulação padrão com variação linear das forças de superfície.

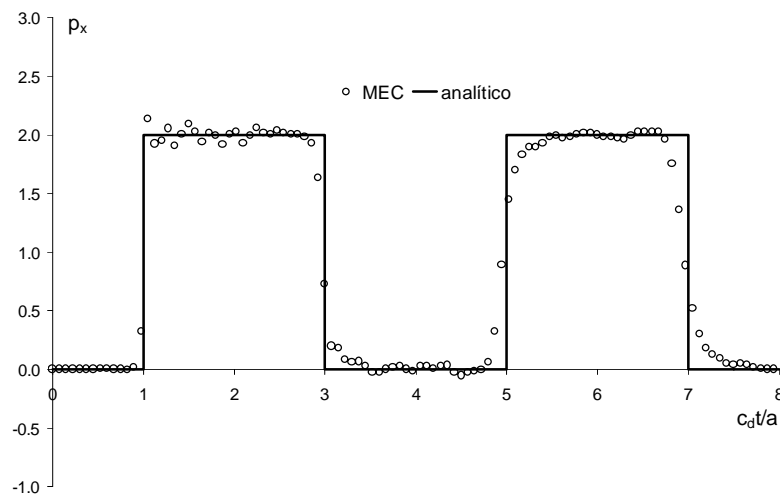


Figura 4- Força de superfície no nó A(0,a/4): resposta para  $\theta = 1,4$ .

## 5.2 Viga simplesmente apoiada

Este exemplo de estado plano de tensão consiste de uma viga simplesmente apoiada, mostrada na Fig. 5, submetida a um carregamento subitamente aplicado e mantido constante no tempo. Os seguintes parâmetros foram adotados:  $E = 100,0$ ,  $\nu = 1/3$  e  $\rho = 1,5$ . A simetria do problema foi simulada com a imposição de deslocamentos horizontais nulos ao longo da seção transversal média da viga, conforme mostrado na Fig. 6. Nesta análise adotou-se  $\theta = 1,4$ .

Para a verificação das respostas, outra análise foi efetuada com a formulação desenvolvida por (Carrer & Telles, 1992) na qual adota-se como solução fundamental a da estática: devido a isso, a integral de domínio do termo inercial é mantida na formulação, o que implica na discretização de todo o domínio para se efetuar a análise, (Carrer&Telles, 1992). Os resultados das duas análises,



relativos à componente horizontal da força de superfície no nó A(0,-a/8), estão apresentados na Fig. 7. Uma boa concordância entre eles é observada, validando uma vez mais a observação de que a presente formulação conduz a resultados estáveis.

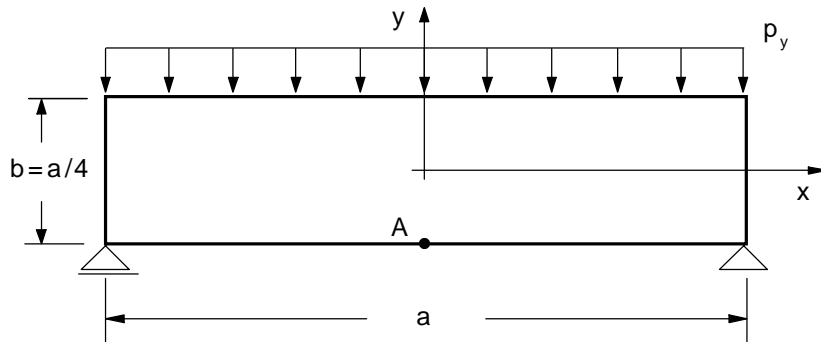


Figura 5- Viga simplesmente apoiada: geometria e carregamento.

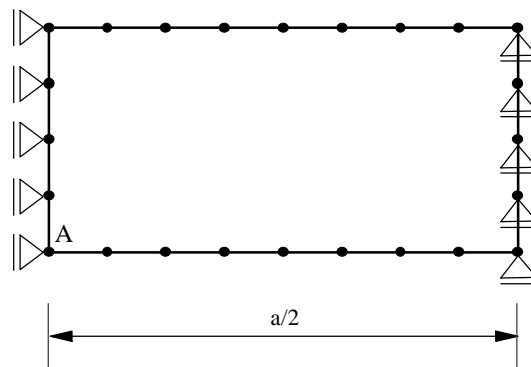


Figura 6- Viga simplesmente apoiada: malha de elementos de contorno e nó selecionado.

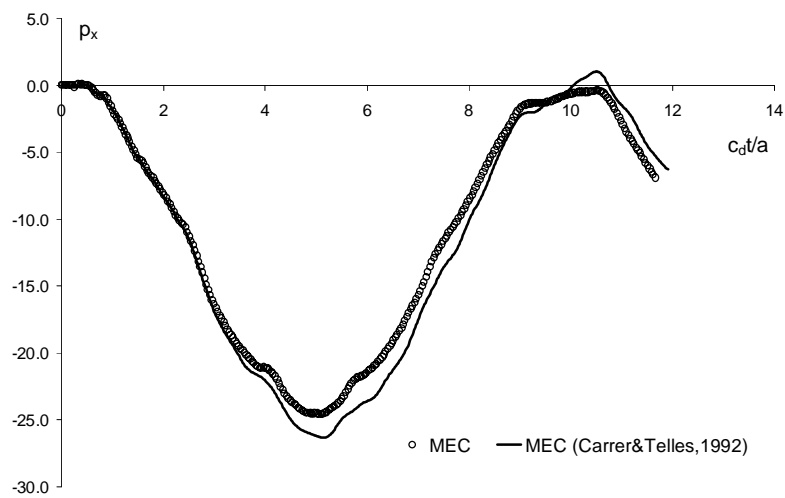


Figura 7- Força de superfície no nó A(0,-a/8): resposta para  $\theta = 1,4$ .

## 6. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma nova formulação dependente do tempo do MEC, que se denomina método  $\theta$  linear, para análise elastodinâmica bi-dimensional. Variações lineares no tempo podem ser admitidas para deslocamentos e forças de superfície em análises envolvendo domínios fechados, sem que isso invalide a resposta, tal como acontecia com a formulação padrão (ver, por exemplo, Fig. 3). Nesse sentido, a formulação padrão pode ser considerada um caso particular da apresentada aqui no qual  $\theta = 1,0$ .

A introdução do parâmetro  $\theta$  produz um amortecimento benéfico na análise numérica. Esse amortecimento, entretanto, deve ser mantido sob controle: conclui-se que, de uma maneira geral, pequenos valores para  $\beta$  e grandes valores para  $\theta$  podem ser utilizados simultaneamente e *vice-versa*. A combinação  $\beta = 0,6$  e  $\theta = 1,4$  produziu os bons resultados apresentados nos dois exemplos. Outra vantagem da formulação é a sua fácil implementação computacional, partindo da formulação padrão.

## REFERÊNCIAS

- Bathe, K. J., 1996, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice Hall, Inc.
- Carrer, J. A. M. & Mansur, W. J., 1999, Stress and Velocity in 2D Transient Elastodynamic Analysis by the Boundary Element Method, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 23, n. 3, pp. 233-245.
- Carrer, J. A. M. & Telles, J. C. F., 1992, A Boundary Element Formulation to Solve Transient Dynamic Elastoplastic Problems, Computers & Structures, vol. 45, n. 4, pp. 707-713.
- Dominguez, J., 1993, Boundary Elements in Dynamics, Computational Mechanics Publications, Southampton and Boston.
- Hadamard, J., 1952, Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, Dover Publications, New York.
- Manolis, G. D. & Beskos, D. E., 1988, Boundary Element Methods in Elastodynamics, Unwin Hyman Publishing Co.
- Mansur, W. J., 1983, A Time-Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method, Ph.D. Thesis, University Of Southampton, U.K.
- Mansur, W. J. & Carrer, J. A. M., 1993, Two-Dimensional Transient BEM Analysis for the Scalar Wave Equation: Kernels, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 12, n. 4, pp. 283-288.
- Mansur, W. J., Carrer, J. A. M. and Siqueira, E. F. N., 1998, Time Discontinuous Linear Traction Approximation in Time Domain BEM Scalar Wave Propagation Analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 42, n. 4, pp. 667-683.
- Telles, J. C. F., 1983, The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems, Lectures Notes in Engineering, vol. 1. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Yu, G., Mansur, W. J., Carrer, J. A. M. and Lei, G., 1998, A Linear  $\theta$  Method Applied to 2D Time Domain BEM, Communications in Numerical Methods in Engineering, vol. 14, n. 12, pp. 1171-1179.