



UMA FORMULAÇÃO HIPERSINGULAR DO MEC PARA PROBLEMAS DE POTENCIAL TRIDIMENSIONAL

Wilma D. Huacasi

Universidade Estadual do Norte Fluminense CTT
CEP 28015-620 Campos dos Goitacazes, RJ, Brasil

Webe J. Mansur

José Paulo S. Azevedo

Universidade Federal do Rio de Janeiro PEC/COPPE
Cx. P. 68506 Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Resumo. Neste trabalho desenvolveu-se uma nova formulação direta hipersingular do método dos elementos de contorno para problemas tridimensionais estendendo-se a formulação desenvolvida anteriormente em duas dimensões por Mansur et al. (1997). Como na formulação bidimensional, a formulação tridimensional dispensa o uso algoritmos complexos no cálculo de termos livres, que até bem pouco tempo estavam incompletos. Na implementação computacional foi usada a mesma estrutura desenvolvida para três dimensões pela formulação clássica do MEC (na solução da equação de Laplace). Aqui foram usados elementos de geometria plana e curva (na forma de triângulos e quadriláteros) com interpolação do potencial e derivada normal constante, linear e quadrática na variável natural usando colocação em pontos no interior dos elementos. As integrais singulares foram tratadas usando-se um algoritmo de cálculo de partes finitas baseado na expansão em série de Taylor em coordenadas polares. Diversos exemplos foram analisados e os resultados obtidos comparados com os da formulação clássica e soluções analíticas, demonstrando convergência da formulação proposta no caso de regiões contendo o contorno simplesmente conexo.

Palavras-chave: Valor Principal de Cauchy, Parte Finita, MEC, Formulação Hipersingular.

1. INTRODUÇÃO

A formulação hipersingular do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para a solução da equação de Laplace

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (1)$$

sujeita a condições de contorno de Dirichlet, Neumann e/ou Robin é obtida a partir do gradiente da Equação Integral de Contorno clássica (EIC) para pontos ξ interiores ao domínio Ω em três dimensões:

$$u(\xi) + \int_{\Gamma} p_n^*(\xi, x) u(x) d\Gamma_x = \int_{\Gamma} u^*(\xi, x) p_n(x) d\Gamma_x \quad (2)$$

$$u^*(\xi, x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \quad \text{e} \quad p^*(\xi, x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} (\mathbf{v}_x \cdot \mathbf{n}(x))$$

$r=|r|$ é a distância em \mathbb{R}^3 entre os pontos campo $x = (x_1, x_2, x_3)$ e o ponto fonte $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, u é o potencial, $p_n = \nabla u \cdot \mathbf{n}$ derivada de u em relação à normal ao contorno e $\mathbf{v}_x = \nabla_x r = (\partial r / \partial x_1, \partial r / \partial x_2, \partial r / \partial x_3)$ unitário. A equação clássica (2) é obtida através das identidades de Green; Mikhlin (1957), Brebbia (1984) e Pinciroli (1995). As equações integrais, clássica e hipersingular, na resolução de problemas tridimensionais, apresentam fenômenos de singularidade junto às funções de densidade. As integrais na Eq. (2) são regulares para pontos ξ interiores a Ω , serão singulares ao se fazer o processo do limite no qual o ponto fonte ξ é levado para o contorno onde irá a coincidir com algum ponto campo x . Calculando o gradiente da Eq. (2) obtém-se a formulação hipersingular; neste caso, as integrais obtidas apresentarão hipersingularidade quando ξ tender a x . Nos últimos anos foram desenvolvidos vários trabalhos relacionados com a formulação hipersingular; alguns autores como Guiggiani et al. (1992) e Mantic(1994), apresentam a formulação hipersingular diretamente em termos de Parte Finita (PF) o que leva à formulação ser expressa com alguns termos livres a serem calculados. Num trabalho anterior desenvolvido por Mansur et al. (1997), apresentou-se a formulação hipersingular bidimensional em termos do Valor Principal de Cauchy (VPC), o que garante a nulidade dos termos divergentes. Em Huacasi (1999) estudamos a formulação de Mansur et al. (1997) e apresentamos a formulação tridimensional em termos do VPC que permite o cálculo das integrais usando PF.

2. EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO HIPERSINGULAR

Quando ξ estiver no interior de Ω , pode-se diferenciar a Eq. (2) em uma direção qualquer ω , pois u^* e p^* são regulares, assim obtém-se a formulação hipersingular diretamente para pontos internos ξ . Quando o ponto fonte $\xi \in \Gamma$ (Γ é contorno de Ω) a derivada na direção ω é dado por

$$p_{\omega}(\xi) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} [p_{n,\omega}^*(\xi, x) u(x) - u_{,\omega}^*(\xi, x) p_n(x)] d\Gamma_x + \int_{\bar{\Gamma}_{\varepsilon}} [p_{n,\omega}^*(\xi, x) u(x) - u_{,\omega}^*(\xi, x) p_n(x)] d\Gamma_x \right\} = 0 \quad (3)$$

com funções núcleo:

$$u_{,\omega}^* = \frac{1}{4\pi r^2} (\mathbf{v}_x \cdot \omega(\xi)) \quad \text{e} \quad p_{n,\omega}^* = -\frac{1}{4\pi r^3} \{ 3(\mathbf{v}_x \cdot \omega(\xi))(\mathbf{v}_x \cdot \mathbf{n}(x)) - (\omega(\xi) \cdot \mathbf{n}(x)) \}$$

sendo Γ_{ε} a parte do contorno substituída pela semi esfera de raio ε , centrada em ξ e contorno $\bar{\Gamma}_{\varepsilon}$, conforme mostrado na Fig. 1. Para a convergência do limite anterior precisa-se impor a condição de que u seja no mínimo de classe $C^{1,\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, em uma vizinhança de ξ , i.e.:

$$\begin{aligned} u(x) &= u(\xi) + u_{,k}(\xi)(x_k - \xi_k) + o(|x - \xi|^{1+\alpha}) \\ u_{,k}(x) &= u_{,k}(\xi) + o(|x - \xi|^{\alpha}) \end{aligned} \quad (4)$$

$k=1,2,3$. A partir do limite dado anteriormente é que o método difere dos outros, mas, mostra-se também que a condição necessária e suficiente (4) é de grande relevância para a existência do limite (3).

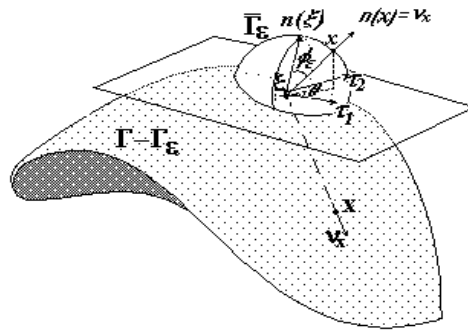


Fig. 1. : Domínio aumentado com semi esfera de raio $\varepsilon \rightarrow 0$.

Na análise das hipersingularidades das integrais do limite (3), é conveniente estudar separadamente o limite da segunda integral do primeiro membro da equação (3) (em $\bar{\Gamma}_\varepsilon$) conforme indicado a seguir:

$$I_{p^*} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{n,\omega}^*(\xi, x) u(x) d\bar{\Gamma}_\varepsilon \quad \text{e} \quad I_{u^*} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{,\omega}^*(\xi, x) p_n(x) d\bar{\Gamma}_\varepsilon$$

substituindo as expressões (4) nos limites indicados acima e observando-se que no

$$\text{contorno } \bar{\Gamma}_\varepsilon : \begin{cases} v_x & = & n(x) \\ u_{,\omega}^* & = & \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} (n(x) \cdot \omega(\xi)) \\ p_{n,\omega}^* & = & -\frac{2}{4\pi\varepsilon^3} (n(x) \cdot \omega(\xi)) \end{cases}$$

obté-m-se

$$I_{p^*} = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \frac{(n(x) \cdot \omega(\xi))}{\varepsilon^3} u(\xi) d\bar{\Gamma}_\varepsilon + \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \frac{(n(x) \cdot \omega(\xi))}{\varepsilon^2} (\nabla_x u(\xi) \cdot n(x)) d\bar{\Gamma}_\varepsilon \right\}$$

$$I_{u^*} = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \frac{(n(x) \cdot \omega(\xi))}{\varepsilon^2} (\nabla_x u(\xi) \cdot n(x)) d\bar{\Gamma}_\varepsilon \right\}$$

pois $n_k(x) = (x_k - \xi_k)/\varepsilon$, em $\bar{\Gamma}_\varepsilon$. Assim, a equação (3) pode ser escrita como:

$$p_\omega(\xi) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \frac{(n(x) \cdot \omega(\xi))}{\varepsilon^3} u(\xi) d\bar{\Gamma}_\varepsilon + \frac{3}{4\pi} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \frac{(n(x) \cdot \omega(\xi))}{\varepsilon^2} (\nabla_x u(\xi) \cdot n(x)) d\bar{\Gamma}_\varepsilon \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} [u_{,\omega}^*(\xi, x) p_n(x) - p_{n,\omega}^*(\xi, x) u(x)] d\Gamma_x \quad (5)$$

Em (5), se L_2 é a segunda integral em $\bar{\Gamma}_\varepsilon$, $L_2 = -0,5p_n(\xi)$, pois $\phi_\varepsilon \rightarrow \pi/2$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (figura 1). Portanto, para $\alpha(\xi) = n(\xi)$:

$$\frac{1}{2} p_n(\xi) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \frac{(n(x) \cdot n(\xi))}{\varepsilon^3} u(\xi) d\bar{\Gamma}_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} [u_{,\omega}^*(\xi, x) p_n(x) - p_{n,\omega}^*(\xi, x) u(x)] d\Gamma_x \quad (6)$$

Se o campo potencial for constante em todo domínio ($\Omega \cup \Omega_\varepsilon$), $u(x) = u(\xi)$ e $p_n = 0$, e em (6):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} \frac{(n(x) \cdot n(\xi))}{\varepsilon^3} u(\xi) d\bar{\Gamma}_\varepsilon = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \frac{(n(\xi) \cdot n(x)) - 3(v_x \cdot n(\xi))(v_x \cdot n(x))}{4\pi r^3} u(\xi) d\Gamma_x$$

Assim, a equação para o fluxo normal do potencial em ξ , $\xi \in \Gamma$ é

$$\frac{1}{2} p_n(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \{u_{,n}^*(\xi, x) p_n(x) - p_{n,n}^*(\xi, x) [u(x) - u(\xi)]\} d\Gamma_x \quad (7)$$

$$u_{,n}^* = \frac{1}{4\pi r^2} (v_x \cdot n(\xi)) \quad \text{e} \quad p_{n,n}^* = -\frac{1}{4\pi r^3} \{3(v_x \cdot n(\xi))(v_x \cdot n(x)) - (n(\xi) \cdot n(x))\}$$

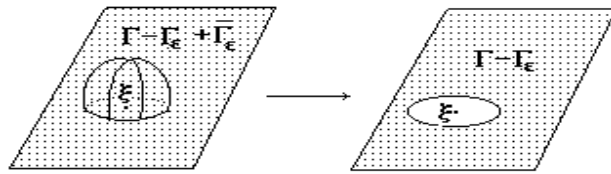


Fig. 2.: Domínio de integração.

De maneira similar para o fluxo tangencial em duas direções unitárias τ_i , $i=1,2$ (normais a n):

$$\frac{1}{2} p_{\tau_i}(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \{u_{,\tau_i}^*(\xi, x) p_n(x) - p_{n,\tau_i}^*(\xi, x) [u(x) - u(\xi)]\} d\Gamma_x \quad (8)$$

$$u_{,\tau_i}^* = \frac{1}{4\pi r^2} (v_x \cdot \tau_i(\xi)) \quad \text{e} \quad p_{n,\tau_i}^* = -\frac{1}{4\pi r^3} \{3(v_x \cdot \tau_i(\xi))(v_x \cdot n(x)) - (\tau_i(\xi) \cdot n(x))\}$$

Estas últimas equações são dadas em função do VPC porém podem ser avaliados como soma de partes finitas PF em expansão de Taylor e coordenadas polares, este procedimento é feito depois da discretização como apresentaremos a seguir.

2.1 Existência do valor principal de Cauchy

Para a existência do VPC é necessário e suficiente que se cumpra a condição da Eq. (4) a qual foi mostrada anteriormente obtendo as equações (7) e (8), a existência do VPC permitirá calcular as integrais através de PF, assim as integrais da Eq. (7) podem ser expressas em

termos da aproximação funcional e em coordenadas paramétricas (η_1, η_2) ; aproximando o integrando pelo desenvolvimento de séries de Taylor em torno do ponto singular ξ e em coordenadas polares (ρ, θ) pode-se escrever:

$$h = \int_{\Gamma} p_{n,n}^* \Phi(\eta_1, \eta_2) |G| d\eta_1 d\eta_2 \longrightarrow F(\rho, \theta) = \frac{F_2(\theta)}{\rho^2} + \frac{F_1(\theta)}{\rho} + o(1) \quad (9)$$

$$s = \int_{\Gamma} p_{n,n}^* |G| d\eta_1 d\eta_2 \longrightarrow f(\rho, \theta) = \frac{f_2(\theta)}{\rho^2} + \frac{f_1(\theta)}{\rho} + o(1) \quad (10)$$

$$g = \int_{\Gamma} u_{,n}^* \Phi(\eta_1, \eta_2) |G| d\eta_1 d\eta_2 \longrightarrow g(\rho, \theta) = \frac{g_1(\theta)}{\rho} + o(1) \quad (11)$$

onde $F(\rho, \theta) = p_{n,n}^* \phi_m |G| \rho$, $f(\rho, \theta) = p_{n,n}^* |G| \rho$ e $g(\rho, \theta) = u_{,n}^* \phi_m |G| \rho$

Pela existência do VPC, na Eq. (7) deve-se cumprir que os termos divergentes obtidos pelo cálculo das PF sejam anulados entre eles mesmos, isto é, com a Eq. (9) e a Eq. (10), deve-se cumprir que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \ln |\varepsilon| [f_1(\theta) - F_1(\theta)] d\theta = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{2\pi} \frac{[F_2(\theta) - f_2(\theta)]}{\beta(\theta)} d\theta = 0$$

o que é verdade, pois $F_2 = \phi_m f_2$ e $F_1 = \phi_m f_1$.

De maneira similar com a Eq. (11) obtém-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \ln |\varepsilon| g_1(\theta) d\theta = 0,$$

pois em g_1 obtêm-se termos que envolvem produto interno de vetores perpendiculares como será mostrado na seção seguinte. Portanto mostrou-se a existência do VPC da formulação obtida e a nulidade dos termos divergentes ao ser calculadas as integrais através de PF.

2.2 Implementação numérica

O contorno todo de um corpo 3D é discretizado por elementos Γ_e (triângulos ou retângulos). A equação (7) pode-se decompor em uma parte regular ($\Sigma \Gamma_e$, $e \neq \sigma$) e em outra parte singular (Γ_σ), esta última correspondendo ao elemento onde o ponto fonte se localiza, então pode-se escrever a discretização para cada nó funcional, em termos das coordenadas paramétricas (η_1, η_2) , G é o Jacobiano da parametrização: $x_1, x_2, x_3 \rightarrow \eta_1, \eta_2$.

$$\begin{aligned} -5p_i^\sigma &= \sum_{\substack{e=1 \\ e \neq \sigma}}^{NE} [h_{i1}^e u_1^e + h_{i2}^e u_2^e + \dots + h_{iN^e}^e u_{N^e}^e] - \sum_{\substack{e=1 \\ e \neq \sigma}}^{NE} [g_{i1}^e p_1^e + g_{i2}^e p_2^e + \dots + g_{iN^e}^e p_{N^e}^e] \\ &+ [h_{i1}^\sigma u_1^\sigma + h_{i2}^\sigma u_2^\sigma + \dots + h_{iN^\sigma}^\sigma u_{N^\sigma}^\sigma] - u_i^\sigma \left(s_i^\sigma + \sum_{\substack{e=1 \\ e \neq \sigma}}^{NE} s_i^e \right) - [g_{i1}^\sigma p_1^\sigma + g_{i2}^\sigma p_2^\sigma + \dots + g_{iN^\sigma}^\sigma p_{N^\sigma}^\sigma] \end{aligned}$$

com coeficientes de influência:

$$h_{im}^e = \int_{\Gamma_e} p_{n,n}^* \phi_m^e(\eta_1, \eta_2) G d\eta_1 d\eta_2 \quad g_{im}^e = \int_{\Gamma_e} u_n^* \phi_m^e(\eta_1, \eta_2) G d\eta_1 d\eta_2 \quad s_i^e = \int_{\Gamma_e} p_{n,n}^* G d\eta_1 d\eta_2$$

$m=i..N$ valores nodais de u e p . Estes coeficientes são acumulados nas matrizes H_{ij} e G_{ij} para N nós funcionais:

$$-5p_i = \sum_{j=1}^N (\hat{H}_{ij} u_j - \hat{S}_i \delta_{ij} u_j) - \sum_{j=1}^N \hat{G}_{ij} p_j \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} p_j$$

com

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} - \hat{S}_i \delta_{ij} \quad G_{ij} = \hat{G}_{ij} - 0,5 \delta_{ij} \quad \hat{S}_i = \sum_{e=1}^{NE} s_i^e$$

sendo δ_{ij} o delta de Kronecker. $Hu=Gp$ formam matrizes cheias não simétricas com N equações correspondentes a $2N$ incógnitas u e p .

2.3 Integrais singulares

O cálculo dos coeficientes de influência no elemento Γ_e , $e \neq \sigma$, é direto usando quadratura Gaussiana. Para problemas de quase singularidade é utilizada a transformação cúbica, Telles (1987). No cálculo dos coeficientes de influência para o elemento Γ_σ onde aparece o VPC, será calculado como soma de PF na expansão de Taylor, Brandao (1987), Hadamard (1923), Mantic (1994), Guiggiani et al. (1992), no entorno da singularidade $\xi = \xi'(\eta_1, \eta_2)$ e em coordenadas polares, assim a integral duplamente singular é convertida numa integral regular dupla mais uma integral singular simples, esta última pode ser calculada seguindo Brandão (1987) como PF de pólo elementar, a outra forma de calcular a integral singular simples é pelo processo do limite na PF, seguindo Mantic (1994) e Guiggiani et al. (1992), assim:

$$h_m^\sigma = PF \iint_{\eta} p_{n,n}^* \phi_m G d\eta = \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} F(\rho, \theta) d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \left[F(\rho, \theta) - \frac{F_2(\theta)}{\rho^2} - \frac{F_1(\theta)}{\rho} \right] d\rho d\theta + \int_0^{2\pi} \left[F_1(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| - F_2(\theta) \left(\frac{\gamma(\theta)}{\beta^2(\theta)} + \frac{1}{\hat{\rho}(\theta)} \right) \right] d\theta$$

$\alpha(\varepsilon, \theta)$ é a equação na vizinhança da singularidade, $\hat{\rho}(\theta)$ é o contorno do elemento. Se o elemento é quadrilátero divide-se o elemento em triângulos, assim:

$$h_m^\sigma = \sum_{\Delta=1}^4 \left\{ \sum_{l=1}^{N_l} \left[\sum_{k=1}^{N_k} \left(F(\rho, \theta) - \frac{F_2(\theta)}{\rho^2} - \frac{F_1(\theta)}{\rho} \right) \frac{\rho(\theta)}{2} \omega_\rho^k \right] \frac{\theta_f - \theta_i}{2} \omega_\theta^l \right\} +$$

$$\sum_{\Delta=1}^4 \left\{ \sum_{l=1}^{N_l} \left[F_1(\theta) \ln \left| \frac{\rho(\theta)}{\beta(\theta)} \right| - F_2(\theta) \left(\frac{\gamma(\theta)}{\beta^2(\theta)} + \frac{1}{\rho(\theta)} \right) \right] \frac{\theta_f - \theta_i}{2} \omega_\theta^l \right\}$$

os termos $F_2(\theta)$, $F_1(\theta)$, $\gamma(\theta)$, $\beta(\theta)$, são obtidas a partir da expansão de Taylor de cada termo, assim:

$$F(\rho, \theta) = p_{n,n}^* \phi_m G \rho = \frac{\{3r_i n_i(\xi)(r_k G_k) - G_i n_i(\xi)\}}{4\pi r^3} \phi_m \rho, \quad G_k = n_k G.$$

$$r_{,i} = \frac{x_i - \xi_i}{r} = \frac{A_i}{A} + \rho \left(\frac{B_i}{A} - A_i \frac{A_k B_k}{A^3} \right) + o(\rho^2) \quad A_i = \frac{\partial x_i}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta=\xi'} \cos \theta + \frac{\partial x_i}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta=\xi'} \sin \theta$$

$$B_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial \eta_1^2} \Big|_{\eta=\xi'} \frac{\cos^2 \theta}{2} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} \Big|_{\eta=\xi'} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 x_i}{\partial \eta_2^2} \Big|_{\eta=\xi'} \frac{\sin^2 \theta}{2}$$

$$G_k = G_k(\xi) + \rho \left[\frac{\partial G_k}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta=\xi'} \cos \theta + \frac{\partial G_k}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta=\xi'} \sin \theta \right] + o(\rho^2) = G_{k0} + \rho G_{k1} + o(\rho^2)$$

$$\phi^m = \phi^m(\xi) + \rho \left[\frac{\partial \phi^m}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta=\xi'} \cos \theta + \frac{\partial \phi^m}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta=\xi'} \sin \theta \right] + o(\rho^2) = \phi_0^m + \rho \phi_1^m + o(\rho^2)$$

$$3r_i n_i(\xi)(r_k G_k) - G_i n_i(\xi) = \rho \left[3 \frac{A_i n_i(\xi)}{A^2} (B_k G_{k0} + A_k G_{k1}) - G_{i1} n_i(\xi) \right] - G_{i0} n_i(\xi).$$

$$T_1 = G_{i0} n_i(\xi), \quad T_2 = A_i n_i(\xi), \quad T_3 = G_{i1} n_i(\xi), \quad P = B_k G_{k0} + A_k G_{k1},$$

$$F(\rho, \theta) = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{-T_1 \phi_0^m}{\rho^2 A^3} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{3A_k B_k}{A^5} T_1 \phi_0^m + \frac{1}{A^3} \left[3 \frac{T_2}{A^2} P \phi_0^m - T_3 \phi_0^m - T_1 \phi_1^m \right] \right) \right]$$

$$F_2(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{T_1 \phi_0^m}{A^3}$$

$$F_1(\rho, \theta) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{3A_k B_k}{A^5} T_1 \phi_0^m + \frac{1}{A^3} \left[3 \frac{T_2}{A^2} P \phi_0^m - T_3 \phi_0^m - T_1 \phi_1^m \right] \right)$$

$$\text{Se } r = \varepsilon : \quad \varepsilon = \rho A + \rho^2 \frac{A_k B_k}{A} + o(\rho^2)$$

$$\rho = \alpha(\varepsilon, \theta) = \frac{\varepsilon}{A} - \varepsilon^2 \frac{A_k B_k}{A^4} + o(\varepsilon^3) = \varepsilon \beta(\theta) + \varepsilon^2 \gamma(\theta) + o(\varepsilon^3).$$

A e B são módulos dos vetores cujas componentes são A_i e B_i .

3. EXEMPLOS TESTE

Como primeiro exemplo, considera-se uma placa como mostra a Fig. 3. Deseja-se obter resultados relativos à troca da direção do fluxo normal nas faces superior e inferior da placa. Como condição de contorno tem-se o potencial $U=300$ na face superior e $U=0$ na face

inferior; nas faces laterais foi prescrito fluxo normal $P_n=0$. Os resultados obtidos usando elementos planos com aproximações funcionais lineares mostram-se na Fig. 4.

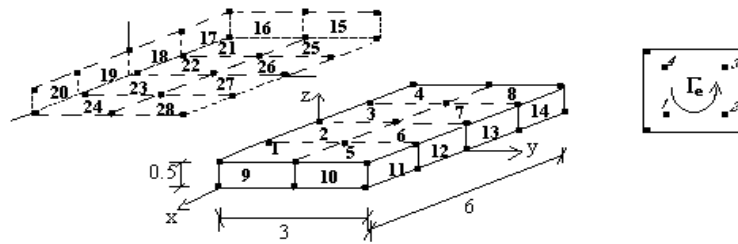


Fig. 3. Discretização da placa esbelta

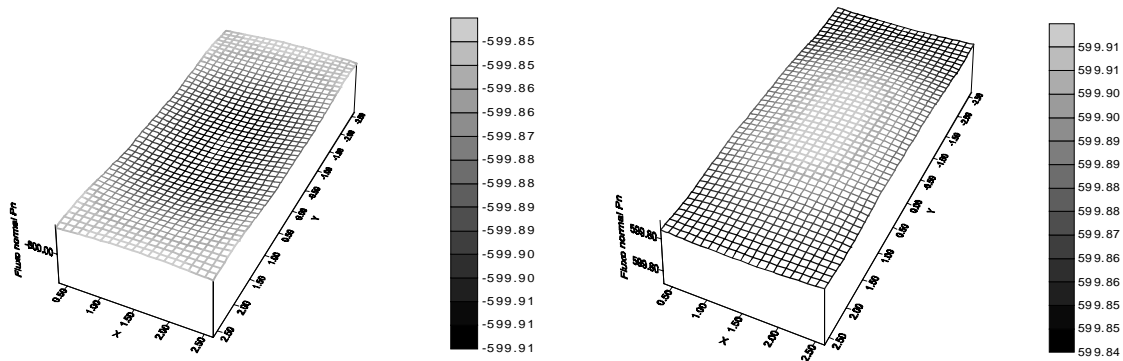


Fig. 4. Fluxo normal obtido pela formulação hipersingular nas faces superior e inferior respectivamente usando elementos planos com aproximações funcionais lineares.

Agora, considera-se o problema de condução de calor nos contornos concêntricos do cilindro oco, Fig. 5. Como dados tem-se o potencial de $U=0$ e $U=100$ nas faces exterior e interior respectivamente, nas outras faces temos fluxo normal $P_n=0$. Calcula-se o fluxo normal na região onde os potenciais são prescritos e o potencial nas regiões onde os fluxos normais são conhecidos. Por ser um problema simétrico fez-se o estudo de apenas a oitava parte do cilindro, $l=25\text{mm}$, $r=30\text{mm}$, $R=80\text{mm}$.

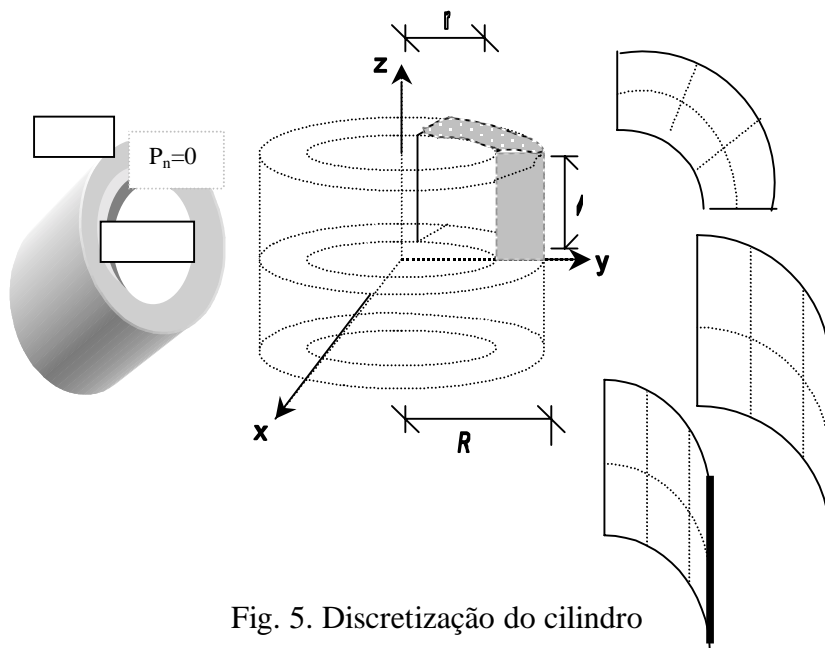


Fig. 5. Discretização do cilindro

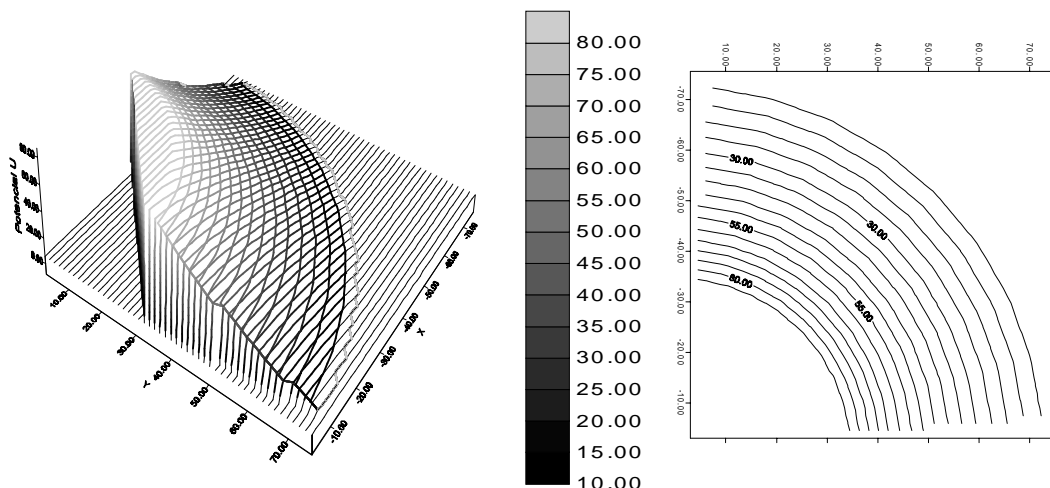


Fig. 6. Potencial na face superior do cilindro obtido pela formulação hipersingular usando elementos quadrangulares curvos com aproximações funcionais quadráticas.

Na Fig.6, observam-se os resultados para o potencial obtidos pela formulação hipersingular, elementos curvos quadrangulares com aproximações funcionais quadráticas foram usados. Assim, na Tabela 1 mostra-se o sucesso da formulação hipersingular obtida comparada com os resultados da formulação clássica, Eq.2.

Tabela 1. Fluxo normal P_n no cilindro ao longo da curva descrita em $l=22.917$.

Coordenada ($z = 22.917$)		Fluxo normal	
x	y	F. clássica	F. hipersingular
-79.676	7.059	1.278122	1.280202
-72.531	33.725	1.278122	1.280202
-77.274	20.706	1.279165	1.288170
-65.473	45.951	1.278122	1.280202
-45.951	65.473	1.278122	1.280202
-56.569	56.569	1.279165	1.288170
-33.725	72.531	1.278122	1.280202
- 7.056	79.676	1.278122	1.280202
-20.706	77.274	1.279165	1.288170
-27.199	12.647	-3.417681	-3.454093
-29.879	2.647	-3.417681	-3.454093
-28.974	7.765	-3.423176	-3.464768
-17.232	24.552	-3.417681	-3.454093
-24.552	17.232	-3.417681	-3.454093
-21.213	21.213	-3.423176	-3.464768
- 2.647	29.879	-3.417681	-3.454093
-12.647	27.199	-3.417681	-3.454093
- 7.765	28.978	-3.423176	-3.464768

4. CONCLUSÕES

A formulação hipersingular obtida em termos do VPC é direta e simples, não é necessário usar algoritmos complexos para calcular os termos livres como em outras formulações. O

tratamento das singularidades com as condições necessárias para a função de densidade garante a existência do valor principal de Cauchy, que por sua vez permite o cálculo através das contribuições das partes finitas de Hadamard⁴, Brandão¹, Mantic⁷, Guiggiani³, em expansão de Taylor e em coordenadas polares no entorno da singularidade.

Os resultados obtidos pela formulação clássica e hipersingular são praticamente os mesmos, validando portanto os procedimentos desenvolvidos aqui.

REFERÊNCIAS

- Brandão M. P. (1987), Improper Integrals in Theoretical Aerodynamics: The Problem Revisited, AIAA Journal 25, pp. 1258--1260.
- Brebbia, C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. (1984), Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, Berlin.
- Guiggiani M., Krishnashamy G., Rudolphi, Rizzo F.J. (1992), A general Algorithm for the Numerical solution of Hipersingular Boundary Integral equations. Transactions of the ASME, 59, september.
- Hadamard J. (1923), Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, Yale Univ Press, New Haven, USA.
- Huacasi W., (1999), Uma formulação hipersingular do MEC para problemas de potencial Tridimensional, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.
- Mansur W., Fleury P., Azevedo J.P. (1997), A vector Approach to the hyper-singular BEM formulation for Laplace's equation 2D, The International Journal of BEM Communications, 8, pp. 239--250.
- Mantic (1994), On computing boundary limiting values of boundary integrals with Strongly Singular and hypersingular kernels in 3D BEM for Elastostatics. Engineering Analysis with Boundary Elements, 13, pp. 115--134.
- Mikhlin S. G. (1957), Integral Equations and their applications to certain problems in Mechanics, mathematical physics and technology. Pergamon Press. London N. Y.
- Pincioli G. A. (1995), Desenvolvimento do sistema MEC3DP para análise de problemas potenciais pelo método dos elementos de contorno. Tese Coppe, UFRJ, M.Sc.
- Telles J. C. F. (1987), A Self Adaptive Coordinate Transformation For The Efficient Evaluation of General Boundary Element Integrals, International Journal for Numerical Methods in Engineering. V24, pp 937-959.

A HIPERSYNGULAR FORMULATION OF THE BEM TO THE THREE-DIMENSIONAL POTENTIAL PROBLEMS

Abstract. *A direct boundary element hypersingular formulation for three-dimensional potentials problems is presented; this work extend two-dimensional formulation presented by Mansur et. Al. (1997). The three-dimensional formulation also does not require complex algorithms to evaluate the free terms, when collocation points are located within boundary elements. The computational implementation follows the same structure used for the classic formulation of the BEM. The numerical model considers isoparametric triangular and quadrilateral, linear and quadratic elements. Cauchy principal value (CPV) were computed using Taylor's expansion as finite part (FP) of integrals. Several examples are presented and the results obtained have been compared with classical formulations results, showing the convergence of the hypersingular approach in domain containing simply connected domains.*

Key words: *Hypersingular formulation of the BEM, finite part, Cauchy principal value.*