

ANÁLISE DE ESTACAS SUBMETIDAS A CARGAS HORIZONTAIS VIA COMBINAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Rubens F. de Matos Filho

Escola de Engenharia de São Carlos – USP, Departamento de Engenharia de Estruturas
Av. Dr. Carlos Botelho, 1465 – 13560-250 – São Carlos, SP, Brasil

João B. Paiva

Escola de Engenharia de São Carlos – USP, Departamento de Engenharia de Estruturas
Av. Dr. Carlos Botelho, 1465 – 13560-250 – São Carlos, SP, Brasil

Resumo. Neste trabalho é apresentada uma formulação para a análise da interação estaca-solo sujeita a cargas horizontais via combinação do método dos elementos de contorno (MEC) com o método dos elementos finitos (MEF). A estaca é representada pelo MEF utilizando um elemento com 10 parâmetros nodais independentes cinco à cinco para cada uma das direções horizontais (X_1 e X_2). O maciço de solos é modelado pelo MEC como um meio contínuo, elástico-linear, semi-infinito, isotrópico e homogêneo. Combinando-se estes métodos de análise, obtém-se um sistema de equações lineares representando o problema de interação estaca-solo. Após a resolução deste sistema, são obtidos os deslocamentos e rotações nos nós do elemento e as tensões de contato estaca-solo. Vários exemplos envolvendo as formulações propostas são analisados e os resultados obtidos são concordantes com os de outros autores.

Palavras-chave: Método dos elementos de contorno, Método dos elementos finitos, Interação estaca-solo, Estacas flexíveis, Grupos de estacas.

1. INTRODUÇÃO

A interação solo-estrutura é atualmente um dos problemas que tem recebido especial atenção de pesquisadores nos mais diversos centros de pesquisa, principalmente por suas aplicações de caráter prático.

As estacas de um sistema de fundação são freqüentemente submetidas a altas forças horizontais, como por exemplo, em estacas-pranchas, de fundações de pontes, de edifícios altos, de estruturas “off-shore”, de torres de transmissão de energia, de muros de arrimo entre outras. Forças essas, que podem ser causadas pelo vento, ondas marítimas, empuxo de terra e em alguns casos, atuam simultaneamente, como nos pilares de pontes que são solicitados, pela ação do vento, pelo fluxo da água e pela frenagem dos veículos sobre o tabuleiro.

Com relação ao estudo da interação estaca-solo sob carregamentos laterais, em que o maciço de solos é representado por um meio contínuo tridimensional, vários autores apresentaram trabalhos, tais como Douglas & Davis (1964), Matthewson (1969); Banerjee (1978).

Poulos (1971), apresentou um método para o cálculo de deslocamentos e rotações em estacas isoladas verticais situadas em um meio elástico contínuo, isótropo, homogêneo e semi-infinito, sujeitas a um carregamento lateral e um momento fletor aplicados no topo das mesmas. Para a representação do maciço de solos utilizou-se as soluções fundamentais de Mindlin (1936). A estaca foi discretizada pelo método das diferenças finitas. A análise foi estendida para a inclusão do efeito da plastificação local entre o maciço de solos e a estaca, bem como para grupos de estacas, fazendo primeiramente a interação entre duas estacas idênticas carregadas igualmente e depois para grupos gerais de estacas através da superposição de efeitos.

Ferro (1993) desenvolveu um trabalho sobre a interação MEC/MEF para a análise de fundações enrijecidas por estacas sujeitas a cargas verticais e horizontais. Neste estudo o maciço de solos foi considerado como um meio elástico contínuo, isótropo, homogêneo, semi-infinito e ideal, discretizado pelo MEC através das soluções fundamentais de Mindlin (1936). A estaca foi analisada pela teoria das vigas (consideradas como elemento de barra). Neste trabalho apresenta-se uma formulação numérica para a análise de estacas solicitadas por carregamentos laterais através da interação MEC/MEF, onde a estaca é modelada pelo MEF e o maciço de solos pelo MEC. São analisados vários exemplos e os resultados são comparados com os de outras formulações.

2. SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA O SOLO

A representação integral desse problema incorpora a solução fundamental de Mindlin (1936) e para o caso em que as forças de volume são desprezadas, esta representação pode ser escrita como:

$$u_i = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(p,s) p_j(s) d\Gamma(s), \quad (i,j = 1,2) \quad (1)$$

Onde:

$u_{ij}^*(p,s)$ é a solução fundamental de deslocamentos devido a uma carga unitária aplicada no ponto “ p ” na direção “ i ” e com resposta no ponto “ s ” na direção “ j ”;

p_j é a força de interação na direção “ j ”.

Como o problema analisado restringe-se somente a carregamentos laterais aplicados à superfície do semi-espaço, apenas os deslocamentos horizontais serão compatibilizados nesta formulação, conseqüentemente a representação integral do problema (Eq. 1) pode ser escrito somente em um função das duas direções horizontais (X_1 e X_2).

Implementando-se a discretização da Eq. (1), obtém-se:

$$u_i = \sum_1^{N_e} \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(p,s) p_j(s) d\Gamma(s), \quad (i,j = 1,2) \quad (2)$$

Onde:

Γ_e é o contorno do elemento de contorno;

N_e é o número de linhas de carga (estacas) imersas no meio contínuo.

Admiti-se que as forças de interação têm variação cúbica no contorno dos elementos de contorno, de tal maneira que suas funções de forma podem ser escritas como:

$$\{\bar{\phi}\} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -4.5\xi^3 + 9\xi^2 - 5.5\xi + 1 \\ 13.5\xi^3 - 22.5\xi^2 + 9\xi \\ -13.5\xi^3 + 18\xi^2 - 4.5\xi \\ 4.5\xi^3 - 4.5\xi^2 + \xi \end{Bmatrix}}_{\text{funções de forma}} \quad (3)$$

sabendo-se que:

$$\xi = \frac{z}{L} \quad (4)$$

Onde:

ξ é a cota adimensional;

“z” é a cota do ponto em questão;

“L” o comprimento total da estaca.

A Eq. (2) pode ser representada na forma algébrica da seguinte maneira:

$$\{u\} = \sum_{e=1}^{Ne} \left[\int_{\Gamma_e} [U^*] \{\bar{\phi}\}^T d\Gamma \right] \{P\} \quad (5)$$

Onde:

$\{u\}$: é o vetor de deslocamentos dos pontos de colocação;

$[U^*]$: é a matriz de soluções fundamentais de Mindlin;

$\{\bar{\phi}\}^T$: é o vetor de funções interpoladoras para as forças de interação.

$\{P\}$: é o vetor de forças da interface estaca-solo.

Após efetuar o cálculo das integrais indicadas na Eq. (5) para todos os elementos, obtém-se a representação algébrica do maciço de solos, também chamada de equação geral de deslocamentos do solo, dada por:

$$\{u_s\} = [G] \{P_s\} \quad (6)$$

Onde:

$\{u_s\}$ é o vetor que contém todos os deslocamentos que ocorrem no solo;

$\{P_s\}$ é o vetor que contém todas as forças de interação que ocorrem no solo.

E a matriz $[G]$ é dada na seguinte forma:

$$[G] = \sum_{e=1}^{Ne} \int_{\Gamma_e} [U^*] \{\bar{\phi}\}^T d\Gamma \quad (7)$$

3. SISTEMA DE EQUAÇÕES PARA A ESTACA

A estaca é analisada pelo método dos elementos finitos utilizando um elemento com 10 parâmetros nodais independentes 5 à 5 como mostra a Fig. 1:

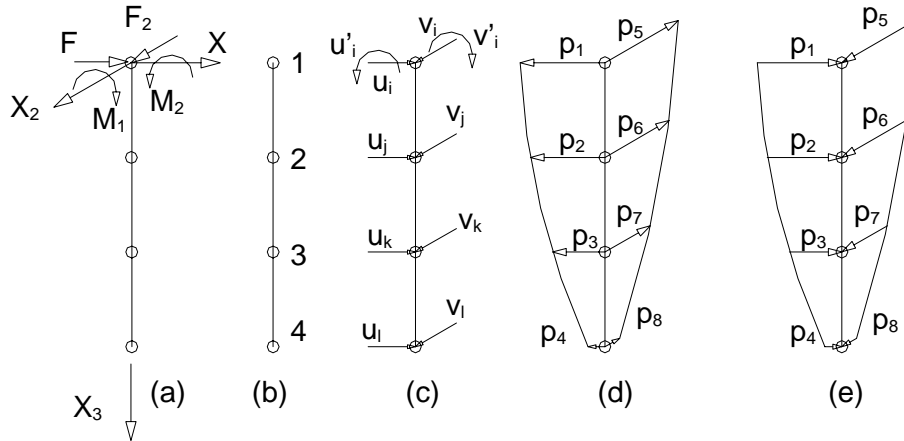


Figura 1 - Discretização do Problema: a) Cargas externas aplicadas no topo da estaca; b) Pontos de colocação da estaca; c) Parâmetros nodais do elemento nas duas direções; d) Forças da interface agindo no elemento; e) Forças da interface agindo no solo.

O polinômio aproximador de deslocamentos para as duas direções será o mesmo, isto é:

$$u_{ap}(z) = v_{ap}(z) = Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E \quad (8)$$

E para as rotações:

$$u'_{ap}(z) = v'_{ap}(z) = 4Az^3 + 3Bz^2 + 2Cz + D \quad (9)$$

Como as forças de interação são aproximadas por um polinômio cúbico (para as duas direções também), essas forças são representadas da seguinte forma:

$$P_{X_1}(z) = P_{X_2}(z) = A_1z^3 + B_1z^2 + C_1z + D_1 \quad (10)$$

Pelo método da mínima energia potencial total, o funcional da estaca, com a contribuição do carregamento externo e da reação das forças da interface estaca-solo, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \Pi_{ap} = & \frac{E_p I_p}{2} \int_0^L u_{ap}''(z)^2 dz + \frac{E_p I_p}{2} \int_0^L v_{ap}''(z)^2 dz + \int_0^L P_{X_1}(z) u_{ap}(z) dz + \\ & + \int_0^L P_{X_2}(z) v_{ap}(z) dz - F_1 u_i - F_2 v_i - M_2 u'_i - M_1 v'_i \end{aligned} \quad (11)$$

Minimizando o funcional de energia potencial total, ou seja, derivando-se a Eq. (11) em função dos parâmetros nodais e igualando-se a zero, obtém-se, matricialmente, o seguinte sistema de equações:

$$[K_c] \{u_p\} = \{F\} - [Q] \{P_p\} \quad (12)$$

Onde:

$[K_c]$ é a matriz de rigidez da estaca;
 $\{u_p\}$ é o vetor de deslocamentos da estaca contendo tanto os provenientes da rotação, quanto os da translação;
 $\{F\}$ é o vetor das forças nodais equivalentes proveniente dos carregamentos externos;
 $[Q]$ é a matriz de transformação das componentes de forças nodais em forças nodais equivalentes;
 $\{P_p\}$ é o vetor das forças da interface estaca-solo.

4. ACOPLAMENTO MEC/MEF

Com base nas deduções anteriores, pode ser feita agora a interação MEC/MEF.

Para que haja compatibilidade entre as matrizes e vetores dos dois métodos é necessário que seja feita a expansão dos que possuem menor ordem. Este procedimento será descrito a seguir.

Da equação geral de deslocamentos do MEC, Eq. (6), tem-se que a equação do solo é:

$$\{u_s\} = [G]\{P_s\} \quad (13)$$

Onde os seus vetores e matrizes já foram determinados anteriormente.

Sabe-se também que a equação da estaca é a seguinte:

$$[K_c]\{u_p\} = \{F\} - [Q]\{P_p\} \quad (14)$$

Onde os seus vetores e matrizes também já foram determinados anteriormente.

Colocando a equação do solo em função das forças de interação, obtém-se:

$$\{P_s\} = [G]^{-1}\{u_s\} \quad (15)$$

Levando-se em consideração as condições de compatibilidade de deslocamentos e de equilíbrio ao longo da interface estaca-meio contínuo, isto é:

$$\{u_s\} = \{u_p\} \quad (16)$$

e

$$\{P_s\} + \{P_p\} = 0 \quad (17)$$

Pode-se substituir na equação proveniente do MEF, ou seja:

$$[K_c]\{u_p\} = \{F\} - [Q][G]^{-1}\{u_s\} \quad (18)$$

Onde:

$$[Q][G]^{-1} = [M] \quad (19)$$

Existe agora a necessidade de se expandir a matriz $[M]$ para se obter a mesma ordem da matriz $[K_c]$. Para isso são colocadas duas colunas de zeros na matriz $[M]$ referentes a não consideração da rotações em torno dos eixos X_1 e X_2 pelo solo. Esta matriz passa agora ser denominada por uma barra, $[\overline{M}]$, indicando assim a sua expansão.

Conseqüentemente, aumenta-se também o vetor de deslocamentos da equação do solo, isto é:

$$\{u_s\} = \{u_i \quad u'_i \quad u_j \quad u_k \quad u_l\} \quad (20)$$

Da compatibilidade de deslocamentos, tem-se agora que:

$$\{u_s\} = \{u_p\} = \{\overline{U}\} \quad (21)$$

Portanto:

$$[[K_c] + [\overline{M}]]\{\overline{U}\} = \{F\} \quad (22)$$

Finalizando:

$$[\overline{K}]\{\overline{U}\} = \{F\} \quad (23)$$

Sendo que:

$[\overline{K}]$ é a matriz final do sistema de interação (MEC/MEF);

$\{\overline{U}\}$ é o vetor que engloba todos os deslocamentos considerados no sistema, inclusive as rotações;

$\{F\}$: o vetor de cargas externas aplicadas no topo da estaca (forças horizontais e Momentos fletores).

A análise numérica de grupo de estacas com bloco de capeamento rígido é feita através da colocação de condições de contorno no topo das estacas, tal que a cabeça da estaca agora é fixa, ou seja, a rotação é nula e todos os elementos do grupo deslocam-se igualmente.

5. AVALIAÇÃO NUMÉRICA

5.1 Exemplo 1

Kérisel & Adam (1967), realizaram um ensaio numa estaca isolada cravada em solo argiloso, com comprimento de 4,65 m e diâmetro equivalente de 0,3573 m, submetida a uma carga horizontal $F_1 = 60$ kN e a um momento $M_2 = -69$ kN.m. O módulo de elasticidade longitudinal da estaca é igual a $2,0e+7$ kN/m², o do solo (determinado experimentalmente, com base na média dos três primeiros metros) é igual a 9233 kN/m² e o coeficiente de Poisson do solo é igual a 0,3.

A Fig. 2 apresenta os deslocamentos laterais ao longo da estaca constatando-se uma concordância entre os valores medidos e os calculados.

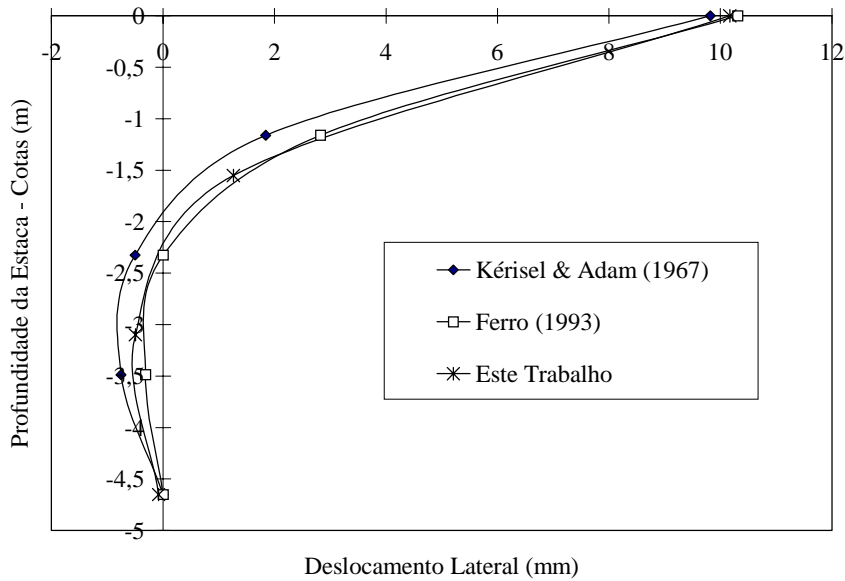


Figura 2 - Deslocamento horizontal na direção X_1 ao longo da estaca.

Admitindo-se agora que as forças externas aplicadas na direção X_1 e em torno do eixo X_2 , também são aplicadas em X_2 e em torno de X_1 . Os resultados obtidos são apresentados na tabela 1, podendo-se observar uma coerência entre os valores, além de que a formulação em questão é exequível.

Tabela 1 - Deslocamentos laterais e rotações em uma e em duas direções.

Exemplos Cotas	Exemplo 1		Exemplo 2			
	Uma Direção*		Duas Direções*			
	X_1	rot. em X_2	X_1	X_2	rot. X_2	Rot. X_1
0	10,1662	$-0,9491 \cdot 10^{-2}$	10,1662	10,1662	$-0,9491 \cdot 10^{-2}$	$0,9491 \cdot 10^{-2}$
1,55 m	1,2596		1,2596	1,2596		
3,10 m	-0,4945		-0,4945	-0,4945		
4,65 m	-0,0816		-0,0816	-0,0816		

* Os deslocamentos horizontais estão em milímetros e as rotações em radianos. As rotações só foram calculadas para o topo da estaca.

5.2 Exemplo 2

Neste exemplo são apresentadas quatro estacas espaçadas igualmente ($s = 1,0$ m) e com cargas aplicadas horizontalmente nas duas direções, com intensidade de 181,60 kN e sentidos variáveis de maneira que mantenham uma simetria entre as cargas como mostra a Fig. 3:

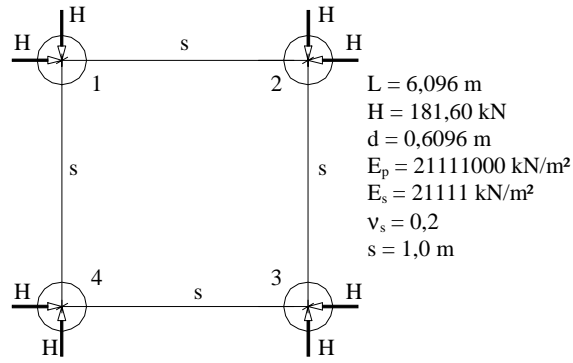


Figura 3 - Grupo de 4 estacas sujeitas à cargas horizontais nas duas direções.

Observando-se assim a obtenção de deslocamentos iguais em módulo, sendo estes deslocamentos apresentados na tabela 2.

Tabela 2 - Deslocamentos laterais e rotações no topo do grupo de estacas.

	Estaca 1	Estaca 2	Estaca 3	Estaca 4
Carga (Dir. X₁)	181,60 kN	- 181,60 kN	- 181,60 kN	181,60 kN
Carga (Dir. X₂)	181,60 kN	181,60 kN	- 181,60 kN	- 181,60 kN
Desl. X₁ (mm)	2,5611	- 2,5611	- 2,5611	2,5611
Rot. Em X₂ (rad.)	- 0,1610.10 ⁻²	0,1610.10 ⁻²	0,1610.10 ⁻²	- 0,1610.10 ⁻²
Desl. X₂ (mm)	2,5611	2,5611	- 2,5611	- 2,5611
Rot. Em X₁ (rad.)	0,1610.10 ⁻²	0,1610.10 ⁻²	- 0,1610.10 ⁻²	- 0,1610.10 ⁻²

5.3 Exemplo 3

No problema mostrado nas Figs. 4 e 5 (Poulos & Davis, 1980), pede-se para calcular o deslocamento lateral de um grupo de estacas, todas com diâmetro igual a 0,3048 m, sob um bloco de capeamento rígido, devido a uma carga de 444,8 kN (H_G) na direção X_1 . Adotou-se um coeficiente de Poisson igual a 0,5 e $K_R = \frac{E_p I_p}{E_s L^4} = 10^{-3}$. Onde K_R é coeficiente de flexibilidade do sistema.

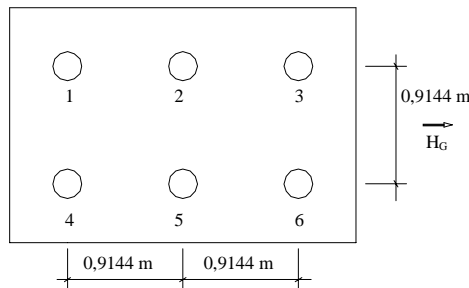


Figura 4 - Figura adaptada de Poulos & Davis, 1980.

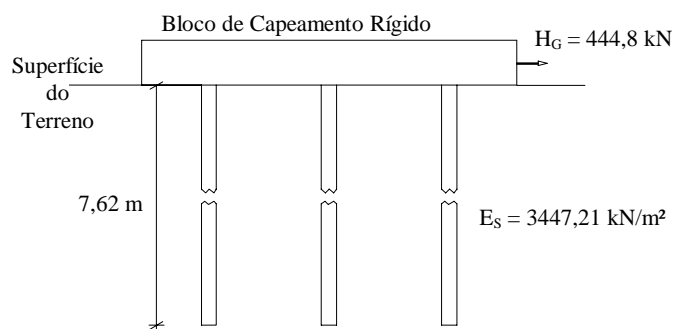


Figura 5 - Figura adaptada de Poulos & Davis, 1980.

Com a formulação apresentada neste trabalho foram obtidos os seguintes valores para o deslocamento lateral no topo das estacas e forças horizontais:

$$u = 30,5910 \text{ mm (no topo das estacas)}$$

$$H_1 = 83,4739 \text{ kN (nas estacas 2 e 5)}$$

$$H_2 = 55,4522 \text{ kN (nas estacas 1, 3, 4 e 6)}$$

Os valores obtido por Poulos foram:

$$u_{\text{POULOS}} = 30,862 \text{ mm}$$

$$H_{1\text{POULOS}} = 89,4048 \text{ kN}$$

$$H_{2\text{POULOS}} = 43,5904 \text{ kN}$$

Comparando-se os resultados percebe-se uma certa discrepância provavelmente decorrente do fato de que Poulos estendeu o uso do seu modelo desenvolvido para duas estacas, para a análise de grupos genéricos onde todos os espaçamentos deveriam ser idênticos. Como isso não ocorre no exemplo apresentado, vários coeficientes de interação foram obtidos através da superposição desses fatores, considerando as estacas duas a duas, divergindo assim do modelo descrito neste trabalho onde todos os efeitos da interação estaca-solo são obtidos através de uma combinação entre o MEC e o MEF, ou seja, de uma forma mais refinada.

Observa-se novamente que as estacas mais distantes para ambos os casos são mais carregadas do que as mais próximas do centro geométrico, concluindo-se que para cargas idênticas as estacas internas (mais próximas) deslocarão mais.

6. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma formulação numérica utilizando o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos para a análise da interação estaca-solo. Os resultados obtidos pela formulação proposta são concordantes com Kérisel & Adam (1967), que apresentaram resultados a partir de ensaios experimentais e Ferro (1993), que também analisou o conjunto através da interação MEC/MEF.

REFERÊNCIAS

- Banerjee, P. K., 1978, Analysis of axially and laterally loaded pile groups, In developments in soil mechanics, Ed. C. R. Scott, Ch. 9., London, Applied Science Publishers.
- Douglas, D. J. & Davis, E. H., 1964, The movement of buried footings due to moment and horizontal load and the movement of anchor plates, *Geot.*, vol. 14, p. 115 -132.
- Ferro, N. C. P., 1993, Uma Combinação do método dos elementos de contorno com o método dos elementos finitos para análise de fundações enrijecidas por estacas, Dissertação (mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. Departamento de Estruturas.
- Kérisel, J. & Adam, M., 1967, Calcul des forces horizontales applicables aux fondations profondes dans les argiles et limons, *Annales L.T.B.T.P.*, n. 239, p. 1653.
- Matthewson, C. D., 1969, The elastic Behavior of a laterally loaded pile, Ph.D. thesis, University of Canterbury, Christchurch, N. Z.
- Mindlin, R. D., 1936, Force at a point in the interior of a semi-infinite solid, *Physics* 7, p. 195-202.
- Poulos, H. G. & Davis, E. H., 1980, *Pile foundation analysis and design*, John Wiley & Sons, New York, N.Y.
- Poulos, H. G., 1971a, Behavior of laterally loaded piles: I-Single Piles, *J.S.M.F.D.*, ASCE, vol. 97, n. SM5, p. 733-751.
- Poulos, H. G., 1971b, Behavior of laterally loaded piles: II-Piles Groups, *J.S.M.F.D.*, ASCE, vol. 97, n. SM5, p. 733-751.

A mixed FEM/BEM formulation for the analysis of piles submitted to lateral loads

This work presents a mixed formulation for the analysis of the pile-soil interaction problem, with or without rigid caps, submitted to horizontal loads. In this formulation the piles are modeled by finite element method (FEM) and the soil is represented by the boundary element method (BEM). The piles are represented as finite elements with 5 nodal parameters for each direction (X_1 , X_2). The soil is modeled by BEM as an isotropic, homogeneous, semi-infinite and linear-elastic continuum. Combining these analysis methods a system of equations representing the pile-soil interaction problem can be obtained and from it the displacements and the pile-soil contact tractions can be achieved. Various examples are presented and the results closely agree with others authors.

Keywords: Boundary Element Method; Finite Element Method; Finite Different Method; Pile-Soil Interaction; Flexible Piles; Pile Group.