XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica
15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering
22 - 26 de Novembro de 1999 / November 22 - 26, 1999 Águas de Lindóia, São Paulo,

ESTUDO SOBRE TRANSMISSÕES PLANETÁRIAS COMPLEXAS

Émerson Semionatto Scuro
Franco Giuseppe Dedini
Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Eng. Mecânica, Depto. de Projeto Mecânico Cx. P. 6051 – 13083-970 - Campinas, SP, Brasil
e-mails : scuro@fem.unicamp.br e dedini@fem.unicamp.br

Resumo. *Dadas as suas pequenas dimensões, alta relação peso/potência transmissível e alta compactação de componentes, as caixas planetárias aparecem como componentes ideais em máquinas e veículos de pequeno e médio porte. A grande dificuldade no projeto de transmissões planetárias pode ser facilmente contornada pela adequada implementação de processos de otimização por tempo de vida útil, confiabilidade ou outro parâmetro considerado como fundamental no projeto. O trabalho consiste, primeiramente de uma revisão histórica dos processos de desenvolvimento de transmissões planetárias, metodologias associadas e desenvolvidas, além de uma revisão bibliográfica sobre tipos, aplicações atuais e detalhes de projeto que serão incorporados como informação em um programa de apoio ao projeto e otimização. É feita uma avaliação cinemática e tipológica das cadeias cinemáticas planetárias, particularmente as utilizadas em veículos automotores e conhecidas como caixas Wilson. O padrão de reconhecimento das cadeias cinemáticas e das relações de transmissão será futuramente implementado em um programa de síntese e análise dinâmica dos planetários.*

Palavras chave : *Planetários, Epicicloides, Transmissões complexas*

1. INTRODUÇÃO

Familiaridade com engrenagens é um quesito essencial para qualquer engenheiro mecânico. As engrenagens têm sido um dos mais importantes componentes de transmissão de potência mecânica. Elas oferecem uma alta eficiência, precisão e baixos custos em larga escala. Neste contexto as engrenagens planetárias, surgidas há muito tempo, vêm tomando uma nova importância nos projetos atuais, devido as suas pequenas dimensões, pequeno peso dos componentes e transmissão de altas potências.

Neste trabalho, são apresentados uma revisão histórica dos processos de desenvolvimento de transmissões planetárias, as metodologias associadas e desenvolvidas, e informações sobre tipos, aplicações atuais e detalhes de projeto que serão incorporados como informação em um programa de apoio ao projeto e otimização.

Futuramente, será desenvolvido um programa em linguagem Visual Basic, devendo contar com os módulos de projeto cinemático das rodas dentadas e dos dentes, com considerações técnicas de projeto e de dimensionamento dos mesmos, desenvolvidas em trabalhos anteriores e de avaliação cinemática e tipológica das cadeias cinemáticas planetárias, particularmente as utilizadas em veículos automotores e conhecidas como caixas Wilson.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Um mecanismo é denominado de “Planetário” se ele contem ao menos um corpo rígido que pode girar sobre seu próprio eixo e ao mesmo tempo sobre um outro eixo (figura 1), imitando o movimento dos planetas do sistema solar, que alem de girarem em torno do Sol possuem rotação própria em torno de seus eixos. Os Planetários são também chamados de mecanismos epicíclicos ou cíclicos, decorrendo o nome do movimento realizado pelo corpo rígido que gira sobre dois eixos (Planetas), onde cada ponto deste corpo descreve uma curva epicicloidal ou hipocicloidal (figura 1c).

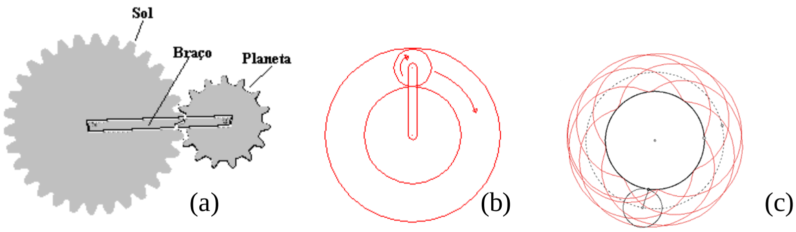

Figura 1 – (a)Vista axial de um planetário, (b) Representação simbólica de um planetário e (c) Curva epicicloidal formada por um ponto do Planeta.

Um Planetário pode ter uma ou mais engrenagens centrais, denominadas assim por girarem somente em torno do centro do mecanismo (A figura 1a representa uma engrenagem central (Sol) e a figura 1b representa duas engrenagens centrais (Sol e Coroa). Estas engrenagens podem ser ainda, externas (Sol) ou internas (Coroa ou Anel), devido ao fato dos dentes estarem na superfície externa ou interna da engrenagem respectivamente. Quando se trabalha com planetários, usualmente eles são representados esquematicamente conforme amostra a figura 2.

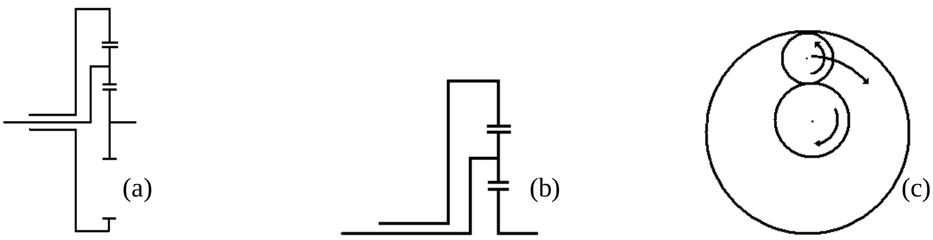

Figura 2 – (a)Esquema lateral (b)Metade de um esquema lateral (c) Esquema axial

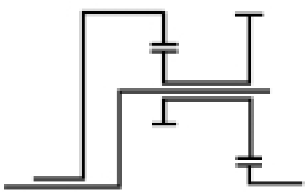

Figura 3 - Planetário simples de planeta composto

Um mecanismo contendo somente uma engrenagem central, um ou mais planetas e um braço conduzindo esses planetas, pode ser chamado de **trem de engrenagens planetário elementar** (figura 1a). Outro mecanismo que consiste de duas engrenagens centrais, um ou mais planetas paralelos e um braço conduzindo os planetas, pode ser chamado de **Trem de engrenagens Planetário Simples** (figura 1b e figura 2a). Freqüentemente o mesmo planeta está engrenado com duas engrenagens centrais em diferentes círculos primitivos ou com engrenagens em dois planos diferentes (figura 3), esse tipo é chamado de **T.E.P. de planeta composto.** Existe a possibilidade de se rotular os planetários com letras. Se a letra P for associada a uma engrenagem externa, sendo um planeta ou uma engrenagem central, e a letra N para engrenagens internas, idem, e se a letra P ou N quando relacionada a um planeta é posta entre parêntesis, então pode-se escrever para o trem de engrenagens planetário da figura 3, como sendo do tipo N(PP)P. Observe-se que para se classificar um trem planetário necessita-se saber quantas engrenagens ele possui e quais das engrenagens são internas ou externas, não importando se as engrenagens são cônicas ou se os eixos dos planetas não estão alinhados com os eixos das engrenagens centrais como na figura 4, de forma que se pode classificar o planetário abaixo como sendo do tipo P(P)N. A definição de qual eixo é estacionário, controle, entrada ou saída, não tem também nenhum efeito na questão do tipo .

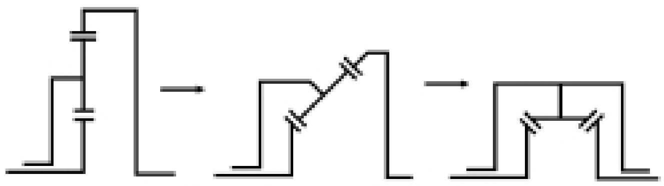

Figura 4 - Três planetários tipo P(P)N

Pode-se reconhecer um **trem planetário ligado** pelo fato de existirem mais de duas engrenagens centrais no mesmo, e em qualquer caso ele pode ser separado em dois ou mais trens planetários simples. Por exemplo tem-se o trem de engrenagens planetário ligado na figura 5a, que pode ser separado em dois planetários simples. A separação não será trivial se existir uma união entre planetas ("união", aqui significa que duas engrenagens de planetários diferentes se encorporam em apenas uma no trem mais complexo). Neste caso as engrenagens centrais relativas a esses planetas estarão unidas do mesmo modo. Isso acontecerá quando os tamanhos desses planetas forem iguais entre si, e ao mesmo tempo os raios dos seus "braços" também se igualarem. A figura 5b mostra o mesmo tipo de planetário–Ligado, que aparece na figura 5a, mas com dois planetas unidos. Então, nos casos como esse da figura 5b , em que existem engrenagens unidas, o planetário pode ser chamado de **trem de engrenagens planetário–Unido**.

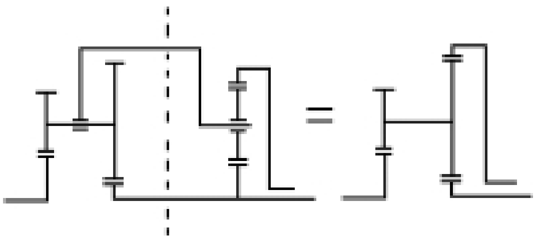

Figura 5- (a) P(PP)P + P(P)N (b) P(PP)P + P(P)N

Trens planetários–Unidos baseados na montagem coaxial de vários planetários Simples do tipo P(P)N com planetas acoplados, ou seja, formando um só corpo rígido. São de grande importância prática, e têm sido usados na indústria automobilística e na engenharia em geral. Um exemplo de T.E.P. ligado que pode ser decomposto em planetários simples do tipo P(P)N é a caixa Wilson, cujo esquema esta apresentado na figura 6. Deve-se observar que foi usado um método bastante simples para efetuar a decomposição a seguir. Primeiramente identificam-se as engrenagens centrais, em seguida divide-se o esquema com as linhas tracejadas de forma que cada parte contenha duas engrenagens centrais sendo engrenadas com os seus respectivos planetas, finalmente desenha-se as partes selecionadas sem os acoplamentos entre as mesmas, obtendo desta forma os 4 planetários simples mostrados na figura 6.

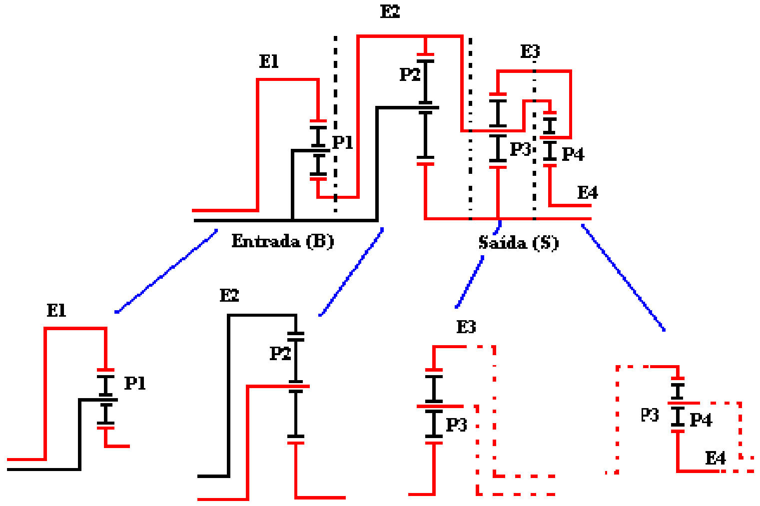

Figura 6 - Os 4 planetários básicos da caixa Wilson.

A caixa Wilson é o principal objeto de estudo deste trabalho. No entanto, observando a figura 6, pode-se dizer que os 4 planetários resultantes de sua decomposição podem ser conectados de muitas maneiras diferentes, resultando em novos T.E.P.

3. CINEMÁTICA DOS TRENS DE ENGRENAGENS PLANETÁRIOS

A análise deve começar observando-se na figura 7 a existência de três eixos fora do trem de engrenagem, um para o Sol (engrenagem número 1), um para o braço dos planetas (engrenagem número 2) e um para a Coroa (engrenagem número 3). É importante notar que a rotação dos planetas não está disponível para uma conexão externa. O fato dos T.E.P.s possuírem três eixos externos caracteriza-os como mecanismos de dois graus de liberdade, pois é necessário conhecer a rotação de dois eixos para determinar-se a rotação do ultimo eixo. Outro fator importante decorrente desta característica, é a possibilidade de se utilizar um planetário como somador de potência, ou seja, pode-se utilizar duas fontes de potência entrando uma em cada eixo do planetário, de maneira que o eixo restante será o eixo de saída.

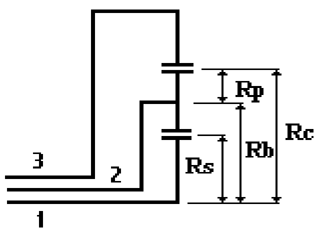

Figura 7 - Planetário simples N(P)P

No entanto sabe-se que uma transmissão comum necessita de apenas um eixo para a entrada e outro para a saída, portanto nos trens Planetários é usual fixar-se um eixo à estrutura na qual a caixa será montada (rotação igual a zero para este eixo) , desde que não seja o eixo do braço dos planetas, pois se este eixo estiver fixo o trem passa a ter as características de um trem de engrenagens comum (não planetário), ou então unir dois dos eixos para que eles girem juntos. Estas medidas fazem com que o trem Planetário passe a ter apenas um grau de liberdade, ou seja, basta conhecer a rotação de entrada para determinar-se a rotação de saída, desde que seja conhecido o número de dentes de cada engrenagem do trem. Na figura 7, R_p, R_s, R_b e R_c são os raios primitivos dos Planetas, do Sol, do Braço e da Coroa respectivamente. Os termos W_p, W_s, W_b e W_c são as rotações(velocidades angulares) dos mesmos elementos, todos medidos em relação a um referencial estacionário, sendo o sentido positivo aquele que movimenta a borda superior do corpo para fora do plano da figura. Duas equações são necessárias para expressar a condição de rolamento sem ocorrer o deslizamento do contato Sol - Planeta e do contato Planeta-Coroa. É interessante notar que estas equações representam a igualdade de comprimento de arco que passa através do encontro em cada uma das engrenagens no seu ponto de contato:

$$R_s W_s = R_b W_b - R_p W_p \qquad \text{Sol–Planeta} \tag{1}$$

$$R_b W_b + R_p W_p = R_c W_c \qquad \text{Planeta–Coroa} \tag{2}$$

A rotação dos Planetas pode ser eliminada somando-se as duas equações:

$$R_s W_s + R_c W_c = 2 R_b W_b \tag{3}$$

Se apenas os números de dentes são conhecidos para cada engrenagem, ao invés do raio primitivo, é vantajoso escrever as equações anteriores em função do número de dentes de cada engrenagem : N_s (Sol), N_p (Planeta) e N_c (Coroa). Para um trem planetário simples e sem planetas compostos, todas as engrenagens devem ter o mesmo passo frontal, que é o comprimento de arco medido ao longo da circunferência primitiva, partindo do perfil de um dente até o ponto correspondente no próximo perfil de dente, sendo:

$$\frac{2\pi R_s}{N_s} = \frac{2\pi R_p}{N_p} = \frac{2\pi R_c}{N_c} \longrightarrow \frac{R_s}{N_s} = \frac{R_p}{N_p} = \frac{R_c}{N_c} \tag{4}$$

$$R_b = R_s + R_p = R_p \left(\frac{N_s}{N_p} + 1 \right) \tag{5}$$

$$R_s = \left(\frac{N_s}{N_p} \right) R_p \tag{6}$$

$$R_c = \left(\frac{N_c}{N_p} \right) R_p \tag{7}$$

Substituindo estas relações na equação (3) e multiplicando por $\frac{N_p}{R_p}$ tem-se :

$$N_s W_s + N_c W_c = 2(N_s + N_p) W_b \tag{8}$$

Conhecidos os números de dentes de cada engrenagem, fixando uma das rotações em zero e conhecendo uma rotação do trem, pode-se usar a equação (8) para determinação da rotação restante.

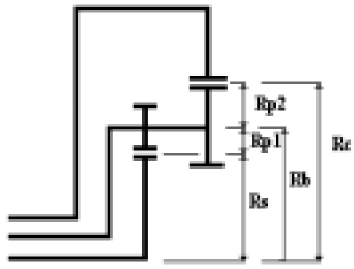

Figura 8 - Planetário Simples–Composto Tipo P(PP)N

Para o trem da figura 8, onde os planetas de raios R_{p1} e R_{p2} estão unidos, logo possuem a mesma rotação (W_p) e as equações que promovem o rolamento sem deslizamento deste trem são:

$$R_s W_s = R_b W_b - R_{p1} W_p \qquad \text{Sol–Planeta1} \qquad (9)$$

$$R_b W_b + R_{p2} W_p = R_c W_c \qquad \text{Planeta2–Coroa} \qquad (10)$$

Com estas duas equações pode-se eliminar a rotação dos Planetas resultando na equação abaixo:

$$R_{p2} R_s W_s + R_{p1} R_c W_c = (R_b R_{p1} + R_{p2} R_b) W_b \qquad (11)$$

Como no exemplo do planetário anterior, pode-se expressar a equação acima em função do número de dentes de cada engrenagem. Para este trem tem-se dois pares de engrenagens, pois o Planeta 2 engrena somente com a Coroa e o Planeta 1 engrena somente com o Sol, logo estes pares de engrenagens necessariamente não precisam ter o mesmo passo diametral (que é a divisão entre o número de dentes da engrenagem por duas vezes o raio primitivo).

$$N_{p2} N_s W_s + N_{p1} N_c W_c = (N_{p2} N_s + N_{p1} N_c) W_b \qquad (12)$$

Na caixa Wilson existem cinco relações de transmissão, de maneira que quatro destas são obtidas imobilizando-se uma das engrenagens E1, E2, E3 e E4 e a restante é obtida acoplando-se o eixo da engrenagem E2 ao eixo de Saída. Inicia-se a análise pela relação obtida quando se imobiliza a engrenagem E1. Nesta condição pode-se simplificar o esquema da figura 6 colocando somente os elementos que interessam para a determinação da relação de transmissão, conformemostrado na figura 9.

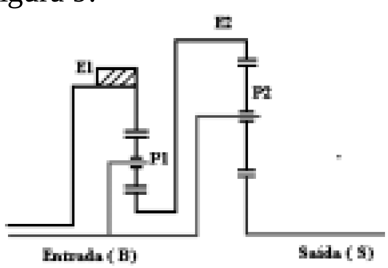

Figura 9 - Relação de transmissão 1

Note-se que existem dois planetários ligados, sendo que a análise começará pelo planetário da esquerda. Na figura 9 pode-se ver que a rotação da engrenagem E1 (W_{E1}) é zero. Além disso, a rotação de entrada (W_b) deve ser conhecida e desta forma pode-se usar a equação (8), deduzida anteriormente, para obter-se a rotação (W_{E2}) da engrenagem E2, onde os termos $N_{E2,1}$, N_{E1} e N_{p1} representam o número de dentes de cada elemento. No caso da engrenagem E2 deve-se observar na figura 6 que este elemento possui na verdade três engrenagens, de maneira que se denotará o número de dentes de cada uma por $N_{E2,1}$, $N_{E2,2}$ e $N_{E2,4}$. Note-se que o sub-índice que vem após a vírgula é relativo ao índice do Planeta em que está ocorrendo o engrenamento; outro elemento que possui mais de uma engrenagem é o eixo de saída, de forma que o número de dentes da parte que engrena com o Planeta P2 será representado por N_{s1} e o número de dentes da outra parte, que engrena com o Planeta P3 será N_{s2} .

$$W_{E2} = \frac{2\left(N_{E2,1} + N_{p1}\right)W_b}{N_{E2,1}} \tag{13}$$

Conhecendo as rotações da engrenagem E2 e do eixo de entrada, pode-se partir para o planetário da direita (figura 9) e usando novamente a Equação (8), pode-se determinar a rotação do eixo de saída (W_s).

$$W_s = \frac{2\left(N_{s1} + N_{p2} - N_{E2,2}\left(\frac{N_{E2} + N_{p1}}{N_{E2,1}}\right)\right)W_b}{N_{s1}} \tag{14}$$

A próxima relação a ser determinada é aquela em que se bloqueia a engrenagem E2 e as demais engrenagens externas (E1, E3 e E4) ficam livres. Para esta configuração pode-se novamente simplificar o esquema da Figura 6 representando somente os elementos que interessam a esta análise, conforme representado na Figura 10.

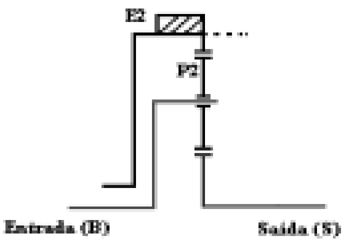

Figura 10 - Relação de transmissão 2

Como se pode observar, a figura 10 nada mais é do que o planetário da figura 6, logo pode-se utilizar equação (8), deduzida anteriormente, para determinar-se a rotação do eixo de saída, onde N_{p2} é o número de dentes do Planeta P2.

$$N_{s1}W_s + N_{E2,2}W_{E2} = 2\left(N_{s1} + N_{p2}\right)W_b \tag{15}$$

Com a rotação da engrenagem E2 igual a zero simplifica-se a relação acima e se obtem a equação final para esta marcha.

$$W_s = \frac{2\left(N_{s1} + N_{p2}\right)W_b}{N_{s1}} \tag{16}$$

A seguir a figura 11 está representando a parte do esquema da figura 6 que interessa para a análise da próxima relação a ser deduzida.

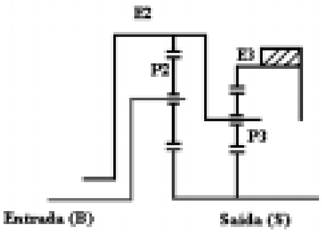

Figura 11 - Relação de transmissão 3

Para esta relação, a engrenagem E3 está fixa e as demais giram livremente. Deve-se notar que o esquema da figura 11 pode ser dividido em dois planetários simples, de maneira que a análise será iniciada pelo planetário da direita. É importante observar que o braço do planetário da direita é parte integrante da engrenagem E2. Nesta figura pode-se observar que se trata de um planetário igual ao da figura 7, podendo ser usada a equação (8) para os termos deste planetário, que são W_{E2}, W_{E3} e W_s para as rotações das engrenagens E2, E3 e para o eixo de saída, analogamente se tem N_{E2}, N_{E3} e N_{s2} para o número de dentes dos mesmos elementos respectivamente. Como a rotação da engrenagem E3 é zero pode-se simplificar a equação (17), deixando W_{E2} em função do número de dentes de cada elemento e da rotação de entrada.

$$N_{s2}W_s + N_{E3}W_{E3} = 2(N_{s2} + N_{p3})W_{E2} \qquad (17)$$

$$W_{E2} = \frac{N_{s2}W_s}{2(N_{s2} + N_{p3})} \qquad (18)$$

Com a equação (18), pode-se iniciar a análise do planetário da esquerda da figura 11, no qual será usado novamente a equação (8).

$$N_{s1}W_s + N_{E2,2}W_{E2} = 2(N_{s1} + N_{p2})W_b \qquad (19)$$

Isolando a rotação do eixo de saída e substituindo W_{E2} pela equação (18) tem-se:

$$W_s = \frac{4(N_{s1} + N_{p2})(N_{s2} + N_{p3})W_b}{N_{s1}(N_{E2,2} + 2(N_{s2} + N_{p3}))} \qquad (20)$$

Deve-se analisar agora a próxima relação de transmissão, que ocorrerá quando se bloquear a engrenagem E4 deixando as demais livres. Assim, é apresentado na figura 12 uma simplificação da figura 6, onde representa-se somente os elementos que interessam para esta análise.

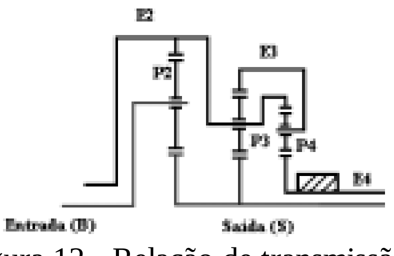

Figura 12 - Relação de transmissão 4

Como nas relações anteriores, também será dividido o esquema da figura 12 em planetários simples, a única diferença é que agora existem três planetários, de maneira que a analise terá inicio pelo da direita. O objetivo é utilizar o planetário da direita para se escrever uma equação que expresse a rotação da engrenagem E3 em função da rotação da engrenagem E2 e do número de dentes das demais engrenagens envolvidas, para isto será utilizada novamente a equação (8).

$$W_{E3} = \frac{N_{E2,4} W_{E2}}{2\left(N_{E4} + N_{p4}\right)} \qquad (21)$$

Seguindo para o planetário do meio, tem-se como objetivo encontrar uma relação que expresse a rotação da engrenagem E2 em função da rotação do eixo de saída, utilizando para isso as equações (8) e (21)

$$W_{E2} = \frac{N_{s2} W_s}{\left(\dfrac{-N_{E3} N_{E2,4} + 4\left(N_{s2} + N_{p3}\right)\left(N_{E4} + N_{p4}\right)}{2\left(N_{E4} + N_{p4}\right)}\right)} \qquad (22)$$

Pode-se agora ir para o planetário da esquerda e usar novamente a equação (8) para finalmente encontrar-se W_s :

$$W_s = \frac{2\left(N_{s2} + N_{p2}\right) W_b - N_{E2,2} W_{E2}}{N_{s1}} \qquad (23)$$

Por fim será substituído W_{E2} advindo da expressão (22) e isolado novamente W_s, obtendo assim uma expressão somente em função da rotação de saída e do número de dentes dos componentes envolvidos no calculo .

$$W_s = \frac{2\left(N_{s2} + N_{p2}\right) W_b \left(\dfrac{-N_{E3} N_{E2,4} + 4\left(N_{s2} + N_{p3}\right)\left(N_{E4} + N_{p4}\right)}{2\left(N_{E4} + N_{p4}\right)}\right)}{N_{E2,2} N_{s2} + N_{s1} \left(\dfrac{-N_{E3} N_{E2,4} + 4\left(N_{s2} + N_{p3}\right)\left(N_{E4} + N_{p4}\right)}{2\left(N_{E4} + N_{p4}\right)}\right)} \qquad (24)$$

Finalmente a ultima relação de transmissão a ser deduzida é aquela em que o eixo de saída é acoplado com a engrenagem E2 (linha pontilhadana figura 13), possuindo desta forma a mesma rotação.

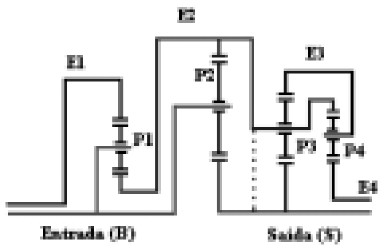

Figura 13 - Relação de transmissão direta

Para se encontrar esta relação de transmissão basta observar o planetário que possui o Planeta P2, pois com o Sol (Saída) e a Coroa (E2) deste planetário, girando juntos, fica impossível ao Planeta P2 possuir rotação própria, ou seja, todos os elementos deste planetário irão girar juntos, como se fossem um só corpo, inclusive o Braço, que é o eixo de Entrada. Logo, esta relação de transmissão é 1, independente do número de dentes de cada engrenagem.

4. DISCUSSÃO

Uma longa pesquisa bibliográfica foi realizada com o intuito de se encontrar as equações das relações de transmissão para a caixa Wilson, além de outras informações relativas ao projeto deste mecanismo. Porém, muito pouco foi encontrado. Diante desta ausência de referências todas as equações das relações de transmissão da caixa Wilson foram deduzidas neste trabalho, fato que só foi possível com o conhecimento adquirido com os trabalhos de Lima (1980) e Kurihara (1997), que possibilitaram a divisão da caixa Wilson em pequenas partes, permitindo a utilização das equações cinemáticas de Holmes (1977) e Doughty(1988).

5. REFERÊNCIAS

Lima, C. S.,1980, Trens de engrenagens planetários: análise, síntese e aplicação em veículo híbrido, Tese de Mestrado, UNICAMP.

Kurihara, R.,1997, Rotina de cálculo e dimensionamento de trens planetários, 1° Relatório de Iniciação Científica (SAE), UNICAMP.

Kurihara, R.,1997, Rotina de cálculo e dimensionamento de trens planetários, Relatório Final de Iniciação Científica (SAE), UNICAMP.

Doughty, S., Mechanics of Machines, John Wiley & Sons, 1988, USA, ISBN 0-471-84276-1.

Holmes, R. , The Characteristics of Mechanical Engineering Systems, Pergamon Press, GB, 1977, ISBN 0-08-021033-3

Study of Complex Planetary Gear Train

Given its small dimensions, high relation weight/power transmitted and compact assemble of components, the planetary gearboxes appear like ideal components in machines and in small and medium vehicles. The high difficult of design the planetary boxes can be easy solved by an appropriate implementation of an optimization process by useful lifetime, reliability or any other parameter considered essential in the project. The work consist, first in a review of the development process of the planetary trains, associated methodologies, beyond a bibliography review about types, modern applications and project details that will be incorporated like information in a support and optimization software. It is done a kinematic and typological evaluation of the planetary kinematics chains, particularly the planetary gearboxes used in motor cars known like Wilson box. The model of recognition of the kinematic chains and the transmission relation will be insert in software of kinematic synthesis and dynamic analysis of planetary.

Key words: *Planetary, Epicyclic, Complex Planetary gear trains*