COBEM 99
XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica
15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering
22 - 26 de Novembro de 1999 / November 22 - 26, 1999 Águas de Lindóia, São Paulo,

SOBRE DESLOCAMENTOS PLANOS EM ELASTICIDADE LINEAR INCOMPRESSÍVEL

Fernando P. Duda
Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE
PEM, C.P. 68503, 21945-970 - Rio de Janeiro, RJ, Brasil
Angela C. Souza
Universidade Federal Fluminense, UFF
LMTA, TEM, 24210-240 - Niterói, RJ, Brasil

Resumo. *Neste trabalho obtemos uma família de soluções das equações de campo que descrevem o comportamento de corpos linearmente elásticos, homogeneos, isotrópicos e incompressíveis, em equilíbrio na ausência de forças de corpo .*

Palavras-chave: *Elasticidade linear, corpos incompressíveis, deformação plana*

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho obtemos uma solução especial para as equações de campo que descrevem o comportamento de um corpo linearmente elástico, homogeneo, isotrópico e incompressível, em equilíbrio na ausência de forças de corpo.

As equações de campo: *relação deformação -deslocamento*, *equação constitutiva*, *equação de equilíbrio* e *restrição de incompressibilidade*, formam um sistema de equações diferenciais para o deslocamento $\mathbf{u}$, o tensor deformação infinitesimal $\mathbf{E}$, o tensor tensão $\mathbf{T}$ e a pressão p. O sistema de equações de campo pode ser equivalentemente escrito em termos somente do tensor $\mathbf{E}$.

A solução especial obtida corresponde ao caso em que: i) $\mathbf{E}$ tem um autovetor fixo, ii) a derivada direcional de $\mathbf{E}$ na direção do autovetor fixo é nula e iii) os autovalores de $\mathbf{E}$ são constantes. Nessas circunstâncias, as equações de campo são reduzidas a um sistema de equações para o angulo β que determina a orientação dos autovetores de $\mathbf{E}$. Este sistema foi resolvido por Fosdick e Schuler (1969) usando variáveis complexas e de outra forma por Martins e Duda (1998) e Duda e Martins (1999).

Conhecido o angulo β, os autovalores de $\mathbf{E}$ são escolhidos de modo a satisfazerem a condição de incompressibilidade. Em seguida, o campo de deslocamentos e de pressão são calculados via integração e o campo de tensão é obtido pela relação constitutiva.

Na seção 2 formulamos as equações de campo em termos de $\mathbf{E}$. Na seção 3 apresentamos o problema plano generalizado, com as equações para a obtenção do deslocamento e da pressão em termos de **E**, via integração . Finalmente, obtemos, na seção 4, o tensor **E** e a seguir os campos de deslocamento, pressão e tensão.

A notação utilizada neste trabalho é a notação padrão usada em mecânica do contínuo (Gurtin, 1981).

2. PRELIMINARES

O sistema de equações de campo que descreve o comportamento de um corpo linearmente elástico homogêneo isotrópico e incompressível, na ausência de forças de corpo, é formado pela relação deformação - deslocamento:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T), \tag{1}$$

pela equação constitutiva:

$$\mathbf{T} = -p\,\mathbf{I} + 2\mu\,\mathbf{E}, \tag{2}$$

pela equação de equilibrio:

$$\operatorname{div}\mathbf{T} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

e pela restrição de incompressibilidade:

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \tag{4}$$

onde μ é a constante de Lamé do material.

O sistema de equações (1) - (4) é equivalente a:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0},\\ &\operatorname{rot}\operatorname{div}\mathbf{E} = \mathbf{0},\\ &\operatorname{tr}\mathbf{E} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

De fato, a equação (5.1) é obtida da equação (1) (Gurtin, 1972), sendo conhecida como condição de compatibilidade de Saint-Venant-Beltrami. Para obter a equação (5.2), inicialmente substitui-se (2) em (3):

$$\nabla p = 2\mu\,\operatorname{div}\mathbf{E}, \tag{6}$$

e elimina-se a pressão utilizando-se o operador rotacional. A equação (5.3) decorre da definição de divergente e traço.

Calculado o campo **E** em (5), usamos a fórmula de Cesàro para obter o deslocamento **u** (Cesàro, 1906, ver tambem Gurtin, 1972). O campo de pressão p é calculado por integração de (6) e o campo de tensão **T** é calculado através de (2).

3. PROBLEMA PLANO GENERALIZADO

Seja $\mathbf{E}$ um campo de tensores simétrico. Pelo teorema da decomposição espectral:

$$\mathbf{E} = \lambda_1 \, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \tag{7}$$

onde λ_i é o autovalor de $\mathbf{E}$ associado ao autovetor $\mathbf{e}_i$.
De agora em diante assumiremos que:

(i) $\mathbf{E}$ tem um autopar constante, digamos $\{\lambda_3, \mathbf{e}_3\}$,

(ii) O campo $\mathbf{E}$ é tal que:

$$\nabla(\mathbf{E}\mathbf{a})\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}, \quad \forall \, \mathbf{a}. \tag{8}$$

Nessas condições , o sistema de equações (5) pode ser reescrito como (ver Duda (1996), Duda e Martins (1999) e Martins e Duda (1998)):

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathbf{W} \operatorname{div} \mathbf{E}\mathbf{W} = 0, \\ &\operatorname{div}\mathbf{W}\operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \\ &\operatorname{tr} \mathbf{E} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

onde $\mathbf{W}$ é o tensor antissimétrico cujo eixo axial é $\mathbf{e}_3$.
Se $\mathbf{E}$ é a solução de (9), o campo de deslocamento será:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + \int (\mathbf{E} + \alpha \mathbf{W}) \mathrm{dx}, \tag{10}$$

onde α é obtido pela integração de:

$$\nabla \alpha = \operatorname{div}\mathbf{E}\mathbf{W}. \tag{11}$$

E a pressão p, então, será:

$$p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}_0) + 2\mu \int \operatorname{div}\mathbf{E} \cdot \mathrm{dy}. \tag{12}$$

4. UMA SOLUÇÃO ESPECIAL

Vamos considerar agora que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ são constantes (lembramos que se $\lambda_1 = \lambda_2$, a solução é trivial). Desta forma, o sistema formado pelas equações (9) é equivalente ao sistema:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \operatorname{div}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) = 0, \\ &\operatorname{div}\mathbf{W}\operatorname{div}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) = 0, \\ &\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Então, para encontrar uma solução $\mathbf{E}$ especial, basta resolver (13.1) e (13.2) e escolher λ_1, λ_2 e λ_3, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tal que (13.3) seja satisfeita.

Vamos utilizar agora um sistema de coordenadas cilíndrico $\{r, \theta, z\}$, com a base ortonormal $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$. Deste modo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \cos\beta\,\mathbf{e}_r + \sin\beta\,\mathbf{e}_\theta,\\
\mathbf{e}_2 &= -\sin\beta\,\mathbf{e}_r + \cos\beta\,\mathbf{e}_\theta,\\
\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_z.
\end{aligned} \tag{14}$$

Assim, as equações (13.1) e (13.2) formam um sistema de equações para β. Este sistema foi resolvido por Fosdick e Schuler (1969) usando variáveis complexas e de outra forma por Duda e Martins (1999) e Martins e Duda (1998), e a solução é:

$$\beta = \beta_0, \tag{15}$$

onde β_0 é uma constante.

Assim, substituindo (14) e (15) em (7), temos que:

$$\mathbf{E} = A\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + B\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + C(\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta) + \lambda_3\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \tag{16}$$

onde:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)\cos 2\beta_0,\\
B &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)\cos 2\beta_0,\\
C &= \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right)\sin 2\beta_0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Usando (16), o campo α é calculado através de (11):

$$\alpha = 2C\ln r \,+\, (B - A)\theta \,+\, D, \tag{18}$$

onde D é uma constante.

O campo de deslocamento, obtido substituindo (16) e (18) em (10), fica:

$$\mathbf{u} = u_r\,\mathbf{e}_r \,+\, u_\theta\,\mathbf{e}_\theta \,+\, \lambda_3\,z\,\mathbf{e}_z, \tag{19}$$

onde:

$$\begin{aligned}
u_r &= Ar + E\cos\theta + F\sin\theta,\\
u_\theta &= 2Cr\ln r + (B - A)\theta r + (D - C)r + F\cos\theta - E\sin\theta,
\end{aligned} \tag{20}$$

sendo E e F constantes.

A pressão p é calculada substituindo (16) em (12):

$$p = 2\mu((A - B)\ln r + 2C\theta) + G, \tag{21}$$

onde G é uma constante.

E, finalmente, a tensão $\mathbf{T}$ é calculada substituindo (21) e (16) em (2).

REFERÊCIAS

Cesàro, E., 1906, Sulle formole del Volterra, fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche, Rend. Napoli (3a), vol. 12, pp. 311-321.

Duda, F. P., 1996, Corpos elásticos com vínculo interno e soluções universais na classe de deformações planas com estiramento transversal uniforme, Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE/PEM, Rio de Janeiro, Brasil.

Duda F. P. & Martins L. C., 1999, Plane Deformations with Constant Stretches, aceito para publicação em Mathematics and Solid Mechanics.

Fosdick, R. L. & Schuler, K. W., 1969, On Ericksen's problem for plane deformation with uniform transverse stretch, Int. J. Eng. Sci., vol. 7, pp. 217-223.

Gurtin, M. E., 1972, The Linear Theory of Elasticity, em Handbuch der Physik, ed C. Trusdell, Springer, Berlin.

Gurtin, M. E., 1981, An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, New York.

Martins L. C. & Duda F. P., 1998, Constrained Elastic Bodies and Universal Solutions in the Class of Plane Deformation with Uniform Transverse Stretch, Math Mech Solids, vol. 3, pp. 91-106.

ON PLANE DISPLACEMENT IN INCOMPRESSIBLE LINEAR ELASTICITY

Abstract. *In this paper we obtain a family of solutions for the field equations that describe the behavior of an isotropic, homogeneous, incompressible linear elastic bodies, equilibrated in absence of body forces.*

Keywords*: Linear elasticity, incompressible bodies, plane deformation*