



## DISCUSSÃO DE APROXIMAÇÕES PARA O GRADIENTE DE PRESSÃO NO MÉTODO DE VOLUMES FINITOS EM DIAGRAMAS DE VORONOI

**Luciano Amaury dos Santos**

Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC  
CEP 88.040-900, Florianópolis, SC, Brasil

**João Flávio Vieira de Vasconcellos**

Instituto Politécnico, UERJ  
Cx.P. 97.282, CEP 28.601-970, Nova Friburgo, RJ, Brasil

**Antônio Fábio Carvalho da Silva**

**Clovis Raimundo Maliska**  
Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC  
CEP 88.040-900, Florianópolis, SC, Brasil

***Resumo.** Na simulação de escoamentos incompressíveis por Volumes Finitos é usual tratar a contribuição da pressão no balanço de quantidade de movimento como um termo fonte, de um modo em que precisa-se calcular um valor aproximado do gradiente de pressão correspondente a cada volume de controle através de uma expressão apropriada. Neste artigo são discutidas quatro expressões alternativas para realizar este cálculo. Usando argumentos matematicamente simples e resultados computacionais os autores procuram identificar as vantagens e desvantagens de cada uma delas.*

***Palavras-chave:** Volumes finitos, Malhas não-estruturadas, Diagramas de Voronoi*

### 1. INTRODUÇÃO

É usual no Método dos Volumes Finitos, como apresentado por Maliska (1995a), escrever as equações aproximadas de conservação da quantidade de movimento como equações para o cálculo das componentes de velocidade. Para o cálculo da componente na direção  $x$  da velocidade, designada pela letra  $u$ , tem-se

$$a_p u_p = \sum_k a_k u_k - L[P^u]_p \Delta V_p + B_p^u \quad (1)$$

onde,  $L[P^u]_P = \left. \frac{\Delta p}{\Delta x} \right|_P$  é uma aproximação para a componente na direção  $x$  do vetor gradiente de pressão,  $\Delta V_P$  é o volume do volume de controle associado ao subscrito  $P$  (o subscrito  $k$  denota seus vizinhos) e, finalmente,  $B_P^u$  denota a aproximação para um termo fonte adicional que possa existir, já integrado ao longo do volume  $\Delta V_P$ . Pode-se escrever, alternativamente, o segundo termo do lado direito da Eq. (1), como

$$F_P^u = L[P^u]_P \Delta V_P \approx \iiint_{\Delta V_P} P^u dV = \oiint_{\Delta \sigma_P} (\vec{n} \cdot \vec{i})_P p d\sigma \quad (2)$$

onde  $\Delta \sigma_P$  é a superfície que envolve o volume  $\Delta V_P$ ,  $\vec{n}$  é o vetor unitário normal externo a esta superfície,  $\vec{i}$  é o vetor unitário na direção  $x$  e  $p$  é a pressão.

$P^u$  nada mais é que  $\frac{\partial p}{\partial x} = \nabla p \cdot \vec{i}$ . Por isto pôde-se aplicar o teorema de Green na expressão (2) tornando mais evidente o seu significado: ela representa a componente na direção  $x$  da força exercida pela pressão sobre a superfície  $\Delta \sigma_P$  do volume de controle.

Deseja-se enfatizar, com o auxílio da expressão (2), que a Eq. (1) é o resultado da integração de uma equação diferencial sobre o volume  $\Delta V_P$ . De fato  $L[P^u]_P$  é uma aproximação para o valor médio de  $P^u$  sobre  $\Delta V_P$

$$L[P^u]_P \approx \frac{1}{\Delta V_P} \iiint_{\Delta V_P} P^u dV \quad (3)$$

De um modo geral, também  $u_P$  e  $p_P$  representam valores médios nos volumes de controle, embora muitas vezes (particularmente em malhas cartesianas igualmente espaçadas) possam ser tratados como valores localizados em pontos nodais, conforme a prática usual em Diferenças Finitas.

A Fig. 1 mostra parte de um diagrama de Voronoi bidimensional, identificando a área de interface  $\sigma_k$  entre o volume de controle  $P$  e seu  $k$ -ésimo vizinho, bem como a distância  $L_k$  entre os pontos geradores destes volumes.

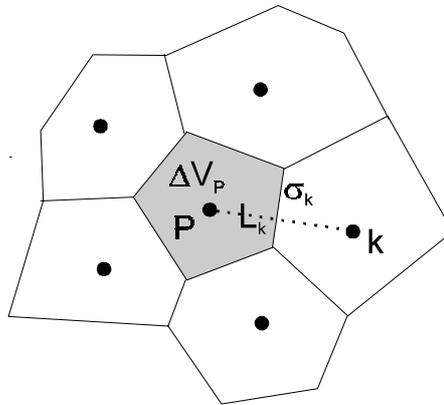


Figura 1 - Volume de controle, parte de um diagrama de Voronoi.

Detalhes da metodologia considerada no presente trabalho podem ser encontradas nos trabalhos de Vasconcellos (1999), Vasconcellos & Maliska (1998) e Maliska (1995a).

Neste artigo são discutidas diversas expressões utilizadas na avaliação de  $L[P^u]_P$  no Método dos Volumes Finitos em diagramas de Voronoi. A discussão é baseada em resultados numéricos apresentados por Vasconcellos *et al.* (1999). Os resultados destes experimentos são interpretados à luz de considerações matematicamente simples, seguindo o que se expôs nesta introdução.

## 2. DESENVOLVIMENTO

Nesta seção são apresentadas e discutidas as quatro propostas para aproximação de  $L[P^u]_P$  consideradas neste artigo. Inicialmente são tratadas as propostas mais simples, cujos problemas são mais facilmente identificáveis. A seguir parte-se para as propostas consideradas mais promissoras (que apresentam problemas mais sutis). Para simplificar esta discussão faz-se uso de exemplos bidimensionais, em que são calculados valores aproximados (segundo as diversas expressões propostas) do gradiente de um campo escalar dado.

### 2.1 Média de Gradientes Projetados

A expressão inicialmente denominada como Média dos Gradientes Projetados (Maliska, 1995b), utilizada por Vasconcellos & Maliska (1998) e Cardoso (1997), é dada por

$$L[P^u]_P = \frac{\sum_k \left. \frac{\Delta p}{\Delta n} \right|_k (\vec{n}_k \cdot \vec{i}) L_k}{\sum_k |\vec{n}_k \cdot \vec{i}| L_k} \quad (4)$$

onde

$$\left. \frac{\Delta p}{\Delta n} \right|_k = \frac{p_k - p_P}{L_k} \approx \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_k = (\nabla p \cdot \vec{n})_k \quad (5)$$

é uma aproximação para a derivada da pressão na direção normal à k-ésima face do volume de controle. Posteriormente foi proposta uma modificação nesta expressão que evita a relativa deficiência encontrada nos resultados da Eq. (4) quando ela é aplicada em malhas hexagonais (Vasconcellos *et al.*, 1999). De uma forma geral a nova expressão é válida quando os volumes de controle que formam a malha forem simétricos em relação a planos que sejam ortogonais aos eixos coordenados e cortem os volumes passando pelo seu ponto gerador. Com a modificação tem-se

$$L[P^u]_P = \frac{\sum_k \left. \frac{\Delta p}{\Delta n} \right|_k (\vec{n}_k \cdot \vec{i}) \frac{L_k}{|\vec{n}_k \cdot \vec{i}|}}{\sum_k |\vec{n}_k \cdot \vec{i}| L_k} \quad (6)$$

Mesmo modificada, no entanto, a expressão da Média dos Gradientes Projetados vai apresentar problemas em malhas como, por exemplo, a malha cartesiana inclinada de  $30^\circ$  em relação à direção  $x$ , mostrada na Fig. 2.

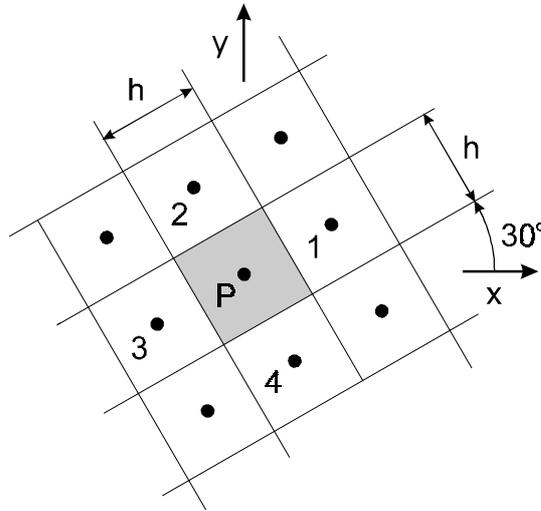


Figura 2 - Malha cartesiana inclinada.

Considere-se o campo de pressão linear dado por

$$p(x, y) = p_0 + \frac{\partial p}{\partial x}x + \frac{\partial p}{\partial y}y \quad (7)$$

Em uma pequena região suficientemente próxima da origem qualquer função contínua  $p(x, y)$  pode ser aproximada por esta expressão. Cabe lembrar que, nas análises que serão feitas a partir deste campo de pressão, o valor correto de  $L[P^u]_P$  será  $L[P^u]_P = \frac{\partial p}{\partial x}$ .

Para aplicar as Eqs. (4) e (6) é necessário conhecer os valores de pressão médios associados a cada volume de controle. No caso de um campo linear de pressão  $p(\vec{x}) = p_0 + \nabla p \cdot \vec{x}$  como o dado pela Eq. (7), é fácil ver que o valor médio de pressão

$p_P = \frac{1}{\Delta V_P} \iiint_{\Delta V_P} p dV$  é igual ao valor da pressão no centróide<sup>1</sup> do volume de controle, cuja posição é dada por  $\vec{x}_c = \frac{1}{\Delta V_P} \iiint_{\Delta V_P} \vec{x} dV$ .

Utilizando os dados geométricos da malha e substituindo os valores de pressão médios de cada volume de controle nas expressões para  $L[P^u]_P$  chega-se aos resultados mostrados na Tabela 1. As abreviaturas MGP e MGPC são utilizadas para designar as Eqs. (4) e (6) respectivamente. As abreviaturas MRQ e BF são utilizadas para designar as expressões de mínimos resíduos quadráticos e do balanço de forças que serão discutidas adiante. A terceira coluna da Tabela 1 refere-se a uma malha discutida na próxima seção.

<sup>1</sup> Este fato concorda com a prática, bastante difundida em metodologias do tipo *cell-centered*, de se associar as quantidades médias calculadas para os volumes de controle com a posição dos centróides desses volumes, como se vê em Mathur & Murthy (1997) e Kobayashi *et al.* (1998).

Tabela 1 - Valores para  $L[P^u]_P$  no volume  $P$ , em duas malhas diferentes.

Malha	Fig. 2	Fig. 4(a)
MGP	$(\sqrt{3}-1)\frac{\partial p}{\partial x}$	$\frac{\partial p}{\partial x}$
MGPC	$\frac{\partial p}{\partial x} - (2-\sqrt{3})\frac{\partial p}{\partial y}$	$\frac{\partial p}{\partial x}$
MRQ	$\frac{\partial p}{\partial x}$	$\frac{5}{3}\frac{\partial p}{\partial x}$
BF	$\frac{\partial p}{\partial x}$	$\frac{\partial p}{\partial x}$

O erro apresentado pelas expressões baseadas na Média dos Gradientes Projetados, que depende da orientação da malha em relação ao sistema de coordenadas para o qual se escreveu as equações de conservação de quantidade de movimento, pode ser creditado ao fato de as Eqs. (4) e (6) representarem uma média de projeções da derivada normal na direção  $x$ . Mas a derivada normal é apenas uma componente do gradiente conforme ilustra a Fig. 3. Se fossem conhecidas todas as componentes do gradiente em todas as faces, poder-se-ia fazer a média de suas projeções na direção  $x$  e assim obter a derivada parcial da pressão em relação a  $x$ . Como se tem uma expressão simples como a Eq. (5) somente para a derivada normal torna-se difícil dar a generalidade que seria desejável à idéia da Média dos Gradientes Projetados.

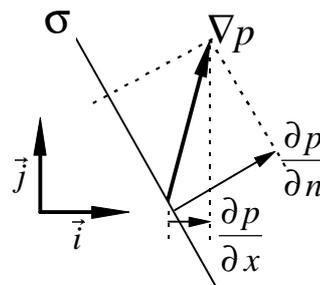


Figura 3 - Componentes do gradiente de pressão.

## 2.2 Mínimos Resíduos Quadráticos

A expressão dos Mínimos Resíduos Quadráticos, utilizada por Taniguchi *et al.* (1991), baseia-se na idéia de minimizar, em cada volume de controle, o somatório (ponderado com pesos  $g_k$ ) dos quadrados dos resíduos definidos como

$$R_k = L[\nabla p]_P \cdot \vec{n}_k - \frac{\Delta p}{\Delta n} \Big|_k \quad (8)$$

em cada face  $k$ . Isto dá origem a um sistema de equações para o cálculo das componentes do vetor gradiente de pressão aproximado  $L[\nabla p]_P$  no volume  $P$ . No caso bidimensional

$$R_k = \frac{\Delta p}{\Delta x}\bigg|_P (\vec{i} \cdot \vec{n}_k) + \frac{\Delta p}{\Delta y}\bigg|_P (\vec{j} \cdot \vec{n}_k) - \frac{\Delta p}{\Delta n}\bigg|_k \quad (9)$$

onde  $\vec{j}$  é o vetor unitário na direção  $y$  e  $\frac{\Delta p}{\Delta x}\bigg|_P$  e  $\frac{\Delta p}{\Delta y}\bigg|_P$  são as componentes do vetor gradiente de pressão aproximado nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente. Taniguchi *et al.* utilizaram como pesos as razões  $g_k = \frac{\sigma_k}{L_k}$ .

Dados os valores de pressão em um ponto  $P$  e em alguns pontos  $k$  vizinhos, a Eq. (8) leva à melhor aproximação possível para o gradiente de pressão no ponto  $P$ . No entanto, constatando-se que os Mínimos Resíduos Quadráticos não levam a bons resultados em algumas malhas que têm seus pontos geradores localizados sistematicamente fora dos centróides dos volumes de controle, como as mostradas na Fig. 4, percebe-se algo que freqüentemente é negligenciado: no método de Volumes Finitos, como considerado aqui, não se conhece o valor da pressão nos pontos geradores dos volumes  $P$  e  $k$  (e nem se deseja avaliar o gradiente de pressão no ponto gerador do volume  $P$ ).

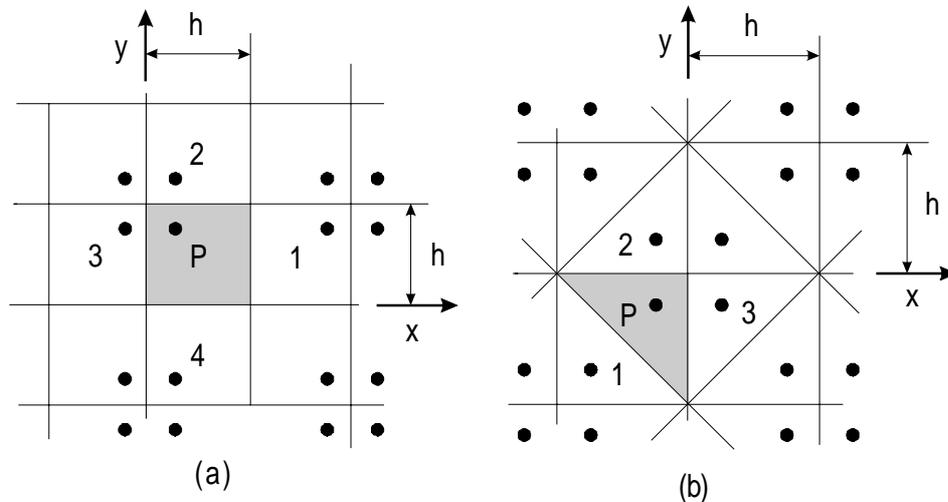


Figura 4 - Malhas de Voronoi com pontos geradores localizados fora dos centróides dos volumes de controle.

Considere-se novamente o campo de pressão linear dado pela Eq. (7), agora para avaliar  $L[P^u]_P$  no volume  $P$  mostrado na Fig. 4(a). Usando dados desta geometria tem-se os resultados mostrados na terceira coluna da Tabela 1. O ponto gerador do volume  $P$  se encontra em  $(x_g, y_g) = (h/4, 3h/4)$ .

Observa-se na Tabela 1 o mau resultado da expressão dos Mínimos Resíduos Quadráticos quando aplicada em malhas como as mostradas na Fig. 4. Como há um fator peso  $g_k$  escolhido de forma um pouco arbitrária, é tentador responsabilizar esta escolha pelo fracasso

colhido. Entretanto é importante notar que este fator pondera a importância dos valores da derivada normal em cada face  $k$  do volume de controle no cálculo do gradiente. Mas a derivada normal está mal avaliada (usando a Eq. (5)) em todas as faces do volume de controle. Portanto não é provável que o fator de ponderação resolva o problema. A este respeito pode-se acrescentar ainda que no caso da malha triangular mostrada na Fig. 4(b), o resíduo é anulado em todas as faces, de modo que o fator peso deixa de influenciar os resultados (que mesmo assim são ruins).

Os resultados obtidos para a malha da Fig. 4(b) são similares aos obtidos para a Fig. 4(a), com duas diferenças importantes. A primeira provém do fato de a distância entre o centróide do volume  $P$ , localizado em  $(x_c, y_c) = (-h/3, -h/3)$ , e o ponto gerador, localizado em  $(x_g, y_g) = (-h/4, -h/4)$  ser menor que no caso anterior. Por isso o erro encontrado na avaliação de  $L[P^u]_P$  por MRQ agora é menor. A segunda é que nesta malha triangular, em todas as expressões, aparece uma influência da derivada na direção vertical, que entretanto se cancela quando consideramos a média dos resultados obtidos em dois volumes vizinhos como o volume  $P$  e o volume 3 na Fig. 4(b). A Tabela 2 foi elaborada para ilustrar estes fatos.

Tabela 2 - Valores para  $L[P^u]$  na malha da Fig. 4(b).

volume	$P$	3
MGP	$\frac{2}{3} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\sqrt{2}}{6} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \right)$	$\frac{2}{3} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\sqrt{2}}{6} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right)$
MGPC	$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial p}{\partial y}$	$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial p}{\partial y}$
MRQ	$\frac{7}{6} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{6} \frac{\partial p}{\partial y}$	$\frac{7}{6} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{6} \frac{\partial p}{\partial y}$
BF	$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial p}{\partial y}$	$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial p}{\partial y}$

Finalmente é importante voltar a um ponto que provoca confusão: se ao invés de utilizar-se os valores médios de pressão em cada volume de controle para avaliar as derivadas normais, fossem utilizados valores de pressão avaliados nos pontos geradores dos volumes de controle, o resultado da expressão dos mínimos resíduos quadráticos seria exato,  $L[P^u]_P = \frac{\partial p}{\partial x}$ , em todos os volumes de ambas as malhas mostradas na Fig. 4. Entretanto os resultados numéricos apresentados nas Figs. 7 e 11 do trabalho de Vasconcellos *et al.* (1999) vêm mostrar que, na metodologia que está sendo considerada, não se conhecem os valores da pressão (nem de nenhuma das incógnitas) nos pontos geradores do diagrama de Voronoi.

### 2.3 Balanço de Forças

A expressão a seguir, usada por Jameson & Mavriplis (1986) é o caso mais simples de expressão baseada na aplicação do teorema de Green (como sugere a expressão (2)) para

avaliação de  $L[P^u]_P$ . Nela a pressão na interface entre dois volumes é avaliada utilizando, por assim dizer, o esquema de diferenças centrais (CDS)<sup>2</sup>, obtendo-se

$$L[P^u]_P = \frac{\sum_k (\vec{n}_k \cdot \vec{i}) \left( \frac{p_P + p_k}{2} \right) \sigma_k}{\Delta V_P} \quad (10)$$

A partir do que foi mostrado até aqui, particularmente nas Tabelas 1 e 2, e dos resultados do trabalho de Vasconcellos *et al.* (1999), nota-se que a expressão (10) passou melhor pelos testes a que foi submetida do que as demais. Além disso, a expressão (10) reflete melhor a idéia em que se baseia o Método de Volumes Finitos: ela representa um balanço de forças sobre a superfície de controle do volume  $P$  e é conservativa, visto que a força que o  $k$ -ésimo vizinho faz sobre o volume  $P$  é igual à força que o volume  $P$  exerce sobre o seu  $k$ -ésimo vizinho. Portanto um balanço de forças global sobre o domínio é satisfeito exatamente.

A dificuldade de uso da expressão do balanço de forças, conforme observou Cardoso (1997) reside na necessidade de se avaliar a pressão nas fronteiras, se queremos utilizá-la em volumes de controle que têm alguma de suas faces sobre alguma fronteira. Uma possibilidade interessante é utilizar uma média dos gradientes de pressão calculados nos volumes vizinhos (que não são vizinhos da fronteira) para fazer, como Mathur & Murthy (1997), uma extrapolação do tipo  $p_f = p_P + L_f (\nabla p \cdot \vec{n}_f)$  onde  $L_f$  é a distância entre o ponto gerador do volume  $P$  e a fronteira  $f$ , e  $\vec{n}_f$  é o vetor unitário normal àquela fronteira. Expressões mais sofisticadas podem ser utilizadas, como a extrapolação proposta por Jameson & Mavriplis (1986) ou mesmo a expressão para a conservação da quantidade de movimento na direção normal à fronteira discutida por Gresho & Sani (1987).

De fato fez-se simplesmente  $p_f = p_P$  para obter os resultados mostrados por Vasconcellos *et al.* (1999). Entretanto, segundo Gresho & Sani (1987), ao assumir  $\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_f \approx 0$

faz-se uma aproximação (muito utilizada na Teoria de Camada Limite) que é válida no problema resolvido por Vasconcellos *et al.* (1999) porque ali o número de Reynolds é suficientemente alto e tem-se condições de não-deslizamento nas fronteiras.

### 3. OBSERVAÇÕES

No presente trabalho utilizou-se o estudo de casos particulares para identificar as causas de alguns problemas encontrados, no uso das aproximações discutidas, ao longo do trabalho de Vasconcellos (1999). Não se pode, com o tipo de investigação feita aqui, identificar rigorosamente as condições necessárias e/ou suficientes para o uso bem sucedido destas aproximações. O trabalho de Mishev (1998) parece aos autores uma importante contribuição em uma linha mais rigorosa matematicamente do que a adotada no presente trabalho.

Mesmo restrito à interpretação de resultados encontrados no uso das aproximações, o presente trabalho deixa várias questões em aberto. Por exemplo: identificou-se a falha na avaliação das derivadas normais como a causa do problema detectado no uso da expressão dos

<sup>2</sup> Uma razão psicológica para não utilizar esta expressão é a forma como foi desaconselhado o uso do CDS e do arranjo colocalizado de variáveis no trabalho seminal de Patankar (1980) e em outras obras da época. Criou-se de fato alguma mistificação em torno da avaliação do gradiente de pressão e do uso de diferenças centrais.

Mínimos Resíduos Quadráticos quando os pontos geradores estão afastados dos centróides dos volumes de controle na malha de Voronoi. Ora, as derivadas normais são avaliadas no termo de pressão das assim-chamadas Médias de Quantidade de Movimento (utilizadas para calcular os fluxos de massa através das interfaces entre volumes de controle) da mesma forma que na expressão de MRQ. O mesmo tipo de aproximação entra também na avaliação dos fluxos difusivos das equações de conservação. Por que aí elas não causam problemas? A resposta deve passar pelo cancelamento de erros encontrados em volumes vizinhos, como discutiu-se aqui a propósito da Tabela 2 e também no trabalho de Santos *et al.* (1996). A idéia de que aproximações localmente inconsistentes podem levar a resultados acurados, sob condições muito pouco restritivas em relação à malha, é discutida no trabalho de Manteuffel & White Jr. (1986). Na discussão de Manteuffel e White Jr. é fundamental a representação de uma equação de segunda ordem como um sistema de equações de primeira ordem, ou seja, como um balanço de fluxos que dependem da derivada da variável original.

Cabe notar, finalmente, que mesmo sem compreender todo o desenvolvimento matemático do trabalho de Mishev (1998), pode-se utilizar seus resultados na presente discussão. Mishev verificou a convergência da aproximação por diferenças centrais para o termo convectivo  $\vec{b} \cdot \nabla \phi$  da equação de convecção difusão de  $\phi$  que analisou. Como ele adotou um método conservativo e considerou um campo de velocidade  $\vec{b}$  bastante genérico pode-se concluir que a aproximação por diferenças centrais para o gradiente de pressão representada pela expressão do balanço de forças deve convergir respeitadas as condições para a convergência da aproximação para o termo convectivo discutida por Mishev.

#### 4. CONCLUSÃO

As expressões baseadas na Média dos Gradientes Projetados, embora muito simples, apresentam uma indesejável dependência dos resultados em relação à orientação do sistema de coordenadas para o qual estão escritas as equações de conservação da quantidade de movimento.

A expressão dos Mínimos Resíduos Quadráticos, além de não ser simples, não funciona bem em malhas que têm os pontos geradores sistematicamente afastados dos centróides dos volumes de controle.

A expressão do Balanço de Forças, embora envolva a necessidade de avaliar as pressões nas fronteiras do domínio, parece ser a mais coerente com o método de Volumes Finitos, e forneceu bons resultados em todos os testes considerados no presente trabalho.

Poder-se-ia, a partir daqui, discutir a relevância das limitações das expressões de Média dos Gradientes Projetados e de Mínimos Resíduos Quadráticos consideradas neste trabalho, avaliar a importância destas limitações no uso prático da metodologia em que seriam empregadas. A discussão que parece mais interessante agora, entretanto, é a das melhores maneiras de avaliar a pressão nas fronteiras do domínio quando se utiliza um balanço de forças para avaliar o gradiente de pressão.

#### REFERÊNCIAS

- Cardoso, F.C., 1997, Algoritmo para a Simulação Numérica das Equações do Movimento pelo Método dos Volumes Finitos Usando Diagramas de Voronoi, Dissertação de Mestrado, UFSC.
- Gresho, P.M. & Sani, R.L., 1987, On Pressure Boundary Conditions for the Incompressible Navier-Stokes Equations, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 7, pp. 1111-1145.

- Kobayashi, M., Pereira, J.M.C & Pereira, J.C.F., 1998, A Second-Order Upwind Least-Squares Scheme for Incompressible Flows on Unstructured Hybrid Grids, Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 34, pp. 39-60.
- Jameson, A. & Mavriplis, D.J., 1986, Finite Volume Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on a Regular Triangular Mesh, AIAA Journal, vol. 24, pp. 611-618.
- Mishev, I.D., 1998, Finite Volume Methods on Voronoi Meshes, Numer. Methods on Partial Differential Eq., vol. 14, pp. 193-212.
- Maliska, C.R., 1995a, Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional, LTC Editora.
- Maliska, C.R., 1995b, Comunicação Pessoal.
- Manteuffel, T.A. & White Jr., A.B., 1986, The Numerical Solution of Second Order Boundary Value Problems on Nonuniform Meshes, Math. Comp., vol. 47, pp. 511-535.
- Mathur, S.R. & Murthy, J.Y, 1997, Pressure Boundary Conditions for Incompressible Flow Using Unstructured Meshes, Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 32, pp. 183-298.
- Patankar, S.V. , 1980, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere.
- Santos, L.A., Vasconcellos, J.F.V. & Maliska, C.R., 1996, Análise da Acurácia de Aproximação do Laplaciano em Volumes Finitos Usando Diagramas de Voronoi, Anais do VI ENCIT, pp. 565-570.
- Taniguchi, N., Arakawa, C. & Kobayashi, T., 1991, Construction of a Flow Simulating Method with Finite Volumes Based on a Voronoi Diagram, JSME International Journal, Series II, vol. 34, pp. 18-23.
- Vasconcellos, J.F.V., 1999, Um Método de Volumes Finitos Usando Malhas Não-Estruturadas para o Estudo de Escoamentos com Frentes Livres, Tese de Doutorado, UFSC.
- Vasconcellos, J.F.V. & Maliska, C.R., 1998, Solução Numérica de Escoamentos Incompressíveis Usando Malhas de Voronoi, Anais do VII ENCIT, pp. 890-895.
- Vasconcellos, J.F.V., Santos, L.A., Silva, A.F.C. & Maliska, C.R., 1999, Soluções Inconsistentes no Método de Volumes Finitos para Malhas de Voronoi, aceito para publicação no XV COBEM.

## **DISCUSSION OF APPROXIMATIONS FOR THE PRESSURE GRADIENT IN THE FINITE VOLUME METHOD ON VORONOI DIAGRAMS**

**Abstract.** *In the numerical simulation of incompressible fluid flows by the Finite Volume Method it is usual to take the pressure contribution in the momentum balance as a source term, in a way that makes necessary to approximate the value of the pressure gradient corresponding to each control volume through an appropriate expression. In this paper four alternative expressions to realize this evaluation are discussed. Using mathematically simple arguments and computational results, the authors try to identify the advantages and disadvantages of each of these expressions.*

**Key-words:** *Finite volume method, Non-structured grids, Voronoi meshes*