



CORRELAÇÃO DE FORMAS MODAIS E GRAUS DE LIBERDADES DE MODELOS OBTIDOS POR ELEMENTOS FINITOS E POR ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

Alexandre Luiz Amarante Mesquita

Universidade Federal do Pará, Departamento de Engenharia Mecânica, Belém, PA, Brasil
E-mail: amarante@sc.usp.br

Paulo Sérgio Varoto

Universidade de São Paulo, Laboratório de Dinâmica, EESC, São Carlos, SP, Brasil
E-mail: varoto@sc.usp.br

***Resumo.** A verificação da qualidade de um modelo dinâmico de uma estrutura obtido pelo método dos elementos finitos inicia-se através de uma correlação entre os parâmetros modais deste modelo com os parâmetros modais obtidos por análise modal experimental. A correlação entre as formas modais (vetores modais) dos dois modelos (numérico e experimental) fornece uma indicação global do nível de similaridade entre os mesmos, enquanto que a correlação entre os graus de liberdade fornece uma indicação da contribuição de cada grau de liberdade nos valores globais da correlação entre os vetores modais. Neste trabalho são apresentados resultados de aplicação de algumas técnicas de correlação de formas modais e graus de liberdade. As técnicas usadas para a correlação entre as formas modais são o MAC, MSF e o POC, enquanto que para correlação entre graus de liberdade são usados o CoMAC e Diferença de Módulo. A verificação da correlação, através destas técnicas é realizada sem uso das matrizes de massa e rigidez do modelo de elementos finitos. As técnicas são aplicadas em resultados para uma viga de aço livre-livre, em que no teste modal é usada excitação por impacto.*

***Palavras-chave:** Análise Modal, Formas Modais, Vetores Modais, Graus de Liberdade, Correlação.*

1. INTRODUÇÃO

Existem diferentes técnicas para a comparação de vetores modais teóricos e experimentais. Estas técnicas podem ser classificadas em duas classes: aquelas relacionadas a comparação entre os próprios vetores e aquelas relacionadas à correlação entre os graus de liberdade dos vetores (Avitabile & Foster, 1996).

Este trabalho apresenta resultados de comparação e correlação de formas modais e graus de liberdade de uma viga, obtidos por simulação numérica por elementos finitos e via análise modal experimental. As técnicas usadas para a correlação entre as formas modais são o MAC

(“Modal Assurance Criterion”), o MSF (“Modal Scale Factor”) e o POC (“Pseudo Orthogonality Check”). Estas técnicas possuem a vantagem de não necessitar da matriz de massa do modelo de elementos finitos, proporcionando assim uma redução em tempo e memória computacional no cálculo da correlação. As técnicas usadas para a correlação entre graus de liberdade são o CoMAC (“Coordinate Modal Assurance Criterion”), que fornece uma indicação da contribuição de cada grau de liberdade para os valores do MAC e a Diferença de Módulo (“Modulus Difference”), que serve para complementar os resultados do CoMAC. Ambas também não necessitam da matriz de massa para o cálculo da correlação.

As técnicas são aplicadas em resultados modais de uma viga sob condição de contorno livre – livre. Na fase experimental, foram desenvolvidos 3 modelos geométricos para a viga a fim de verificar a influência do número de pontos de medição. Como mecanismo de excitação nos testes modais, foi usado o martelo de impacto.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O MAC (Allemang & Brown, 1982), também conhecido como MSCC (“Mode Shape Correlation Coefficient”), é um coeficiente de correlação entre dois vetores modais (formas modais) quaisquer. Este coeficiente é uma quantidade real, inclusive se os elementos dos vetores modais forem complexos. Se o MAC entre duas formas modais for igual a 1,0, então estes vetores estão perfeitamente correlacionados. Na prática, qualquer valor entre 0,9 e 1,0 é considerada uma boa correlação (Application Note HP 243, 1986). Se o coeficiente tiver valor menor, então haverá um grau de inconsistência inversamente proporcional ao valor do coeficiente. A expressão matemática do MAC, entre dois vetores, é dada por:

$$MAC(e_i, u_j) = \frac{|\{e_i\}^T \{u_j^*\}|^2}{(\{e_i\}^T \{e_i^*\})(\{u_j\}^T \{u_j^*\})} \quad (1)$$

onde “ e_i ” é o i -ésimo vetor modal experimental, “ u_j ” o j -ésimo vetor modal do modelo numérico e “*” denota o complexo conjugado do vetor.

As formas modais dos modelos numéricos e experimentais podem ser comparadas graficamente, onde os valores dos elementos dos vetores numéricos e experimentais, para cada modo, são apresentados em um gráfico, um versus o outro. É necessário para se fazer a comparação, que os elementos dos vetores modais experimentais e numéricos estejam normalizados da mesma maneira e que os elementos dos vetores modais experimentais sejam números reais. O resultado ideal é quando os pontos nos gráficos fiquem dispostos em uma linha reta de inclinação 1,0. Este tipo de apresentação tem a vantagem de se perceber erros sistemáticos. O coeficiente MSF (Ewins, 1984) representa a inclinação da melhor linha reta que passa através dos pontos no gráfico. A expressão do MSF pode ser escrita como:

$$MSF(e_i, u_j) = \frac{|\{e_i\}^T \{u_j^*\}|}{\{u_j\}^T \{u_j^*\}} \quad (2)$$

Vale ressaltar que o MSF não dá indicação do desvio dos pontos em relação a melhor linha reta que passa através dos mesmos, simplesmente a inclinação desta melhor reta. O parâmetro que fornece uma medida do desvio mínimo quadrático dos pontos em relação à linha de correlação é o MAC, definido anteriormente. O gráfico dos elementos dos vetores

modais também fornece uma indicação dos graus de liberdade que contribuem para a qualidade da correlação entre os vetores.

Uma outra forma de avaliar a correlação entre vetores modais experimentais e os obtidos numericamente é o uso do POC (Avitabile *et al.*, 1988). O POC foi primeiramente idealizado para verificar a correlação utilizando a matriz de massa do modelo numérico. Matematicamente este coeficiente é dado como:

$$POC = [U]^T [M] [E] \quad (3)$$

onde $[E]$ é a matriz modal do modelo experimental, $[U]$ a matriz modal do modelo numérico e $[M]$ a matriz de massa do modelo numérico.

Para a obtenção do POC, a ordem dos modelos deve ser igual. A matriz de massa do modelo numérico deve ser reduzida ou os vetores modais experimentais expandidos. O POC foi definido a partir do Método de expansão/redução SEREPE (O'Callahan *et al.*, 1989). Na apresentação dos resultados desta técnica, se os vetores modais forem bem correlacionados a matriz de POC terá valores na diagonal principal bem próximos a 1, variando levemente para mais ou menos.

Em um trabalho, Avitabile e O'Callahan (1995) mostraram que o POC pode também ser encontrado sem a utilização da matriz de massa. Neste caso o POC pode ser escrito como:

$$POC = [U_a]^g [E] \quad (4)$$

Na equação, $[U_a]$ é a matriz modal reduzida do modelo numérico e o sobrescrito “g” indica a matriz inversa generalizada, que é dada por:

$$[U_a]^g = ([U_a]^T [U_a])^{-1} [U_a]^T \quad (5)$$

O uso da matriz inversa generalizada deve-se ao fato das matrizes envolvidas no cálculo do POC não serem quadradas.

O CoMAC (Lieven & Ewins, 1988) correlaciona os graus de liberdade contidos nos vetores modais numéricos e experimentais. O CoMaC fornece uma indicação da contribuição de cada grau de liberdade para os valores do MAC. Os valores do CoMAC variam de 0 a 1, e a sua expressão matemática é igual a:

$$CoMAC(i) = \frac{\left[\sum_{j=1}^m |u_{ij} \times e_{ij}^*| \right]^2}{\sum_{j=1}^m |u_{ij}|^2 \times \sum_{j=1}^m |e_{ij}|^2} \quad (6)$$

onde “i” é a coordenada modal (grau de liberdade) e “m” é o número de modos.

A Diferença de Módulo (“Modulus Difference”) (Avitabile & Foster, 1996) foi desenvolvida para complementar os resultados do CoMAC e é formulada como o valor absoluto da diferença do módulo dos valores dos graus de liberdade “i” para cada par de vetor modal numérico e experimental “j”, ou seja:

$$Modulus\ Difference(i) = ||u_{ij}| - |e_{ij}|| \quad (7)$$

3. APLICAÇÃO

As técnicas apresentadas na seção anterior são aplicadas na análise de correlação das formas modais numéricas e experimentais de uma viga de aço, medindo 1000 mm × 25,25 mm × 6,60 mm, sob condição de contorno livre-livre.

Na modelagem numérica da viga por elementos finitos foram usados 22 elementos de viga de Euler-Bernoulli, elemento contendo dois graus de liberdade por nó – um de translação e outro de rotação. Contudo, na análise de comparação, apenas os graus de liberdade de translação foram usados devido à impossibilidade de medição dos graus de liberdade rotacionais com a instrumentação utilizada.

Os resultados desta modelagem serviram para a definição da posição dos pontos de medição na viga e conseqüentemente a localização do “drive-point”, ou seja, o ponto na estrutura onde será colocado o transdutor fixo no teste de uma entrada e uma saída (“single input – single output test – SISO”). No caso de utilização do martelo de impacto, o transdutor fixo é o acelerômetro e o martelo de impacto aplica a excitação nos pontos selecionados na estrutura, possibilitando assim a determinação de uma linha da matriz de função de resposta em freqüência, o que é suficiente para a determinação dos parâmetros modais da estrutura (Ewins, 1984).

O procedimento de escolha do “drive-point”, realizado conforme proposto por Jarvis (1991), consiste primeiramente, em selecionar a faixa de freqüência de interesse. Nessa faixa (com o modelo de elementos finitos possuindo “n” modos de vibração), para cada grau de liberdade “i”, o produto dos elementos dos autovetores (vetores modais)

$$(\phi_i)_1 \times (\phi_i)_2 \times (\phi_i)_3 \times \dots \times (\phi_i)_{n-1} \times (\phi_i)_n \quad (8)$$

pode ser determinado.

O grau de liberdade com o maior valor para o produto (8) terá termos significativos em cada modo de interesse e é então uma boa escolha para o “drive-point” (além da garantia de não ser um ponto nodal de algum modo pois o seu produto (8) não é nulo). Os demais pontos de medida são escolhidos através da mesma metodologia. Para o caso da viga livre-livre, os pontos que terão maiores deslocamentos significativos são os pontos nas extremidades da viga. Portanto, foi escolhido o ponto 1 (ver modelo geométrico na figura 2) como o “drive-point”.

Na modelagem experimental, para a simulação da condição de contorno livre-livre, a viga foi suspensa por fios elásticos conforme mostra a figura 1.

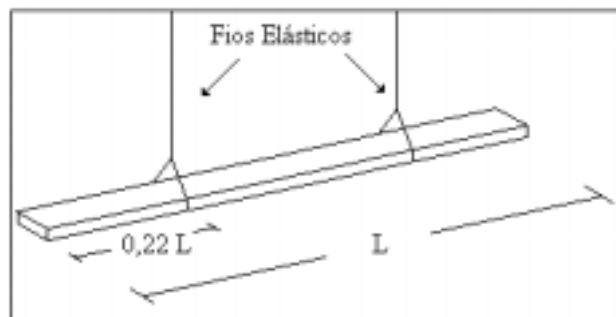


Figura 1 – Viga sob a condição simulada de condição de contorno livre-livre.

De acordo com a figura 1, os fios elásticos que sustentam a viga, simulando a condição de contorno livre-livre, estão presos a uma distância de 0,22×L de cada extremidade da viga

de comprimento L . A região em torno de $0,22 \times L$ é a faixa onde se concentra o maior número de pontos nodais levando-se em consideração vários modos. Portanto, esta região é uma boa localização para se inserir os fios elásticos e assim minimizar a influência destes nos resultados.

Os testes modais foram realizados em três tipos de modelos geométricos experimentais da viga. O primeiro modelo (modelo geométrico 1) consiste em 7 pontos de medição, que correspondem aos nós 1, 5, 8, 11, 16, 19 e 23 da malha de elementos finitos, conforme figura 2a. Neste modelo geométrico, nenhum dos pontos de medição corresponde a um ponto nodal de qualquer modo. No segundo modelo geométrico (modelo geométrico 2), também com 7 pontos, os pontos de medição correspondem aos nós 1, 5, 8, 12, 16, 19 e 23 da malha de elementos finitos (figura 2b), onde o nó 12 corresponde ao centro da viga, que é portanto um ponto nodal para todos os modos pares. Finalmente, um terceiro modelo geométrico (figura 2c) consistindo de 9 pontos. A análise modal com este modelo foi realizada a fim de verificar a influência de um número maior de pontos nas análises das técnicas de correlação.

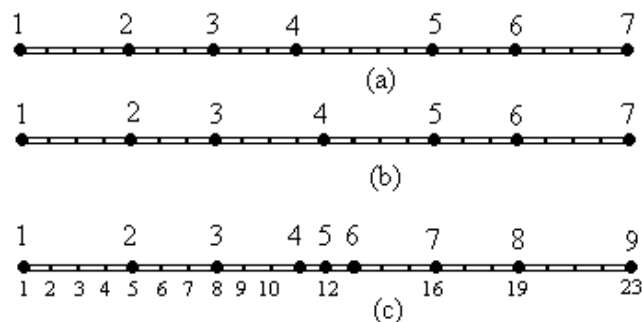


Figura 2 – Modelos geométricos : (a) Modelo 1, (b) Modelo 2, (c) Modelo3. Os pontos acima da viga correspondem às coordenadas modais (pontos de medição) e os pontos abaixo da viga correspondem aos nós da malha de elementos finitos.

4. RESULTADOS

Os resultados das correlações entre as frequências naturais e formas modais do modelo numérico com cada um dos modelos experimentais (obtidos através do “software” de análise modal STAR) são mostrados a seguir. A faixa de frequência para a análise foi de 500 Hz, onde nesta faixa foram encontrados 5 modos de vibração.

4.1 Comparação das Frequências Naturais e Formas Modais

A maior diferença percentual entre as frequências naturais numéricas e experimentais ficou abaixo de 4%. Este valor corresponde às frequências do 5º modo de vibração da viga. Na figura 3 pode-se observar a boa correlação entre esses parâmetros. As frequências naturais experimentais são as mesmas para os três modelos experimentais.

4.2 Resultados de Correlação entre Formas Modais para o Modelo Geométrico 1

Na tabela 1 estão listados os valores do MAC e MSF. O resultado ideal para a matriz do MAC seriam valores próximos a 1,0 na diagonal principal e próximos de 0 para os elementos fora desta diagonal. De acordo com tabela, os valores na diagonal principal mostram uma boa correlação entre os modos numéricos e experimentais. O menor valor surgiu no 1º modo. Quanto aos elementos fora da diagonal principal, observam-se valores altos de correlação

entre o 1º e 3º, 1º e 5º, 2º e 4º, e 3º e 5º modos. Segundo a mesma tabela, os valores de MSF mais distantes do valor ideal 1,0 foram para o 1º e 4º modos.

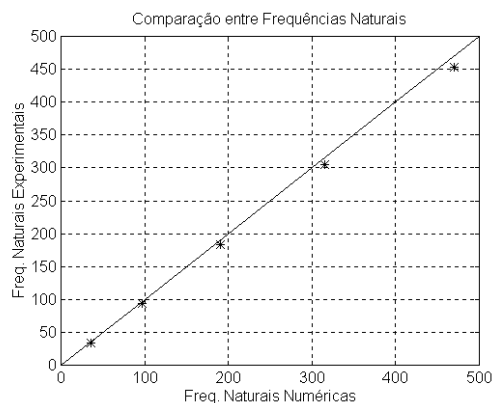


Figura 3 – Comparação entre frequências naturais numéricas e experimentais em Hz.

Tabela 1 – Resultados do MAC e MSF para o Modelo 1

Modos	MAC					Modos	MSF
	1º	2º	3º	4º	5º		
1º	0,9555	0,0289	0,3372	0,0077	0,2051	1º	0,8342
2º	0,0000	0,9961	0,0072	0,3160	0,0001	2º	1,0753
3º	0,2762	0,0038	0,9874	0,0134	0,2445	3º	1,0268
4º	0,0149	0,2531	0,0020	0,9821	0,0137	4º	1,1169
5º	0,2640	0,0000	0,2865	0,0016	0,9868	5º	1,0237

Para se fazer a comparação gráfica entre cada par de vetores modais é preciso transformar os elementos complexos dos vetores modais experimentais. Esta complexidade é devido ao amortecimento não proporcional de estruturas reais. Para estruturas levemente amortecidas, como é este caso, uma simples transformação seria utilizar a magnitude do número complexo com o seu sinal dependendo do ângulo de fase (“+” para ângulos próximos de 0º e “-” para ângulos próximos de 180º). Este foi o procedimento adotado no presente caso.

As figuras 4a, 4b e 5a mostram gráficos de elementos para o 1º, 3º e 4º pares de modos respectivamente. Nestes gráficos são notados pontos discrepantes em relação a linha reta ideal de inclinação 1,0 (linha cheia).

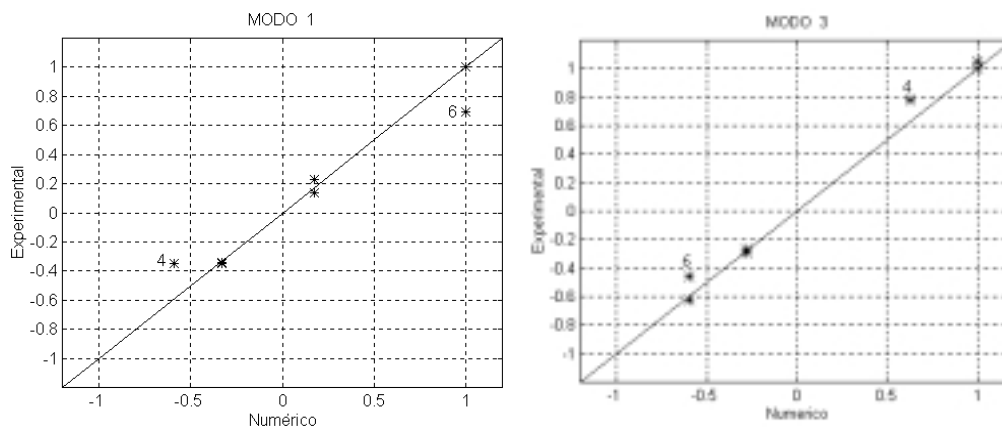


Figura 4 – Gráficos de elementos de vetores numérico e experimental:(a) Modo 1. (b)Modo 3.

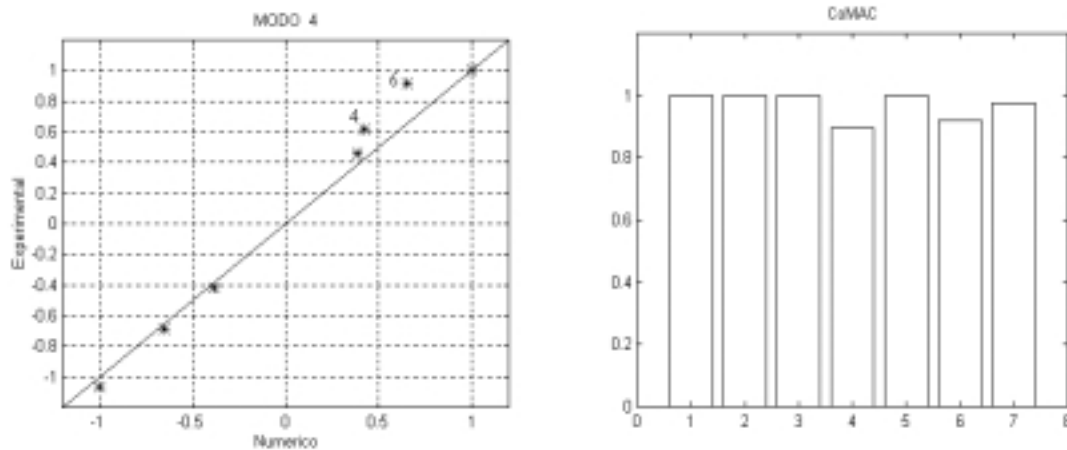


Figura 5 – (a) Gráfico dos elementos do 4º par de vetores modais. (b) Gráfico do CoMAC para as coordenadas modais do modelo 1.

No gráfico do CoMAC, mostrado na figura 5b, podem-se observar a valores baixos no 4º e no 6º graus de liberdade (ou 4ª e 6ª coordenadas modais). Estas coordenadas causaram valores de MSF distantes de 1,0 no 1º e no 4º modos. O MAC não foi sensível a essas coordenadas mal correlacionadas. O gráfico da Diferença de Módulo para cada par de vetores modais também indica a má correlação entre essas coordenadas, como ilustra a figura 6.

A matriz dos valores do POC (tabela 2) mostra que há problemas de correlação entre o 1º e o 4º modos, pois os valores correspondentes ficaram distantes do valor ideal 1,0. Pode-se também observar a não correlação dos modos fora da diagonal principal.

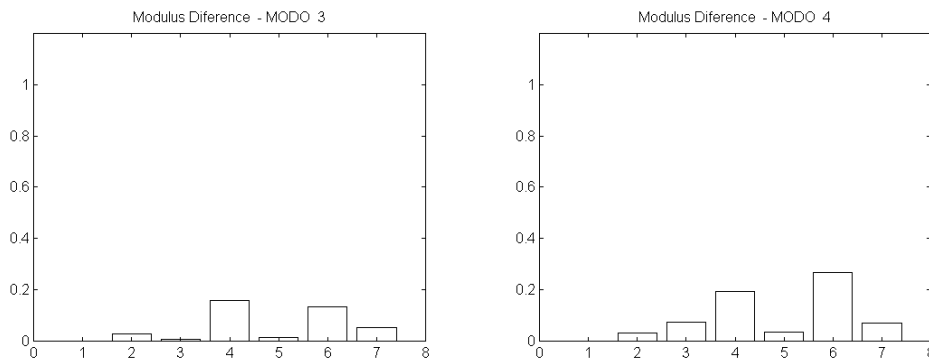


Figura 6 – Valores da Diferença de Módulo para as coordenadas do 3º e 4º pares de modos.

Tabela 2 – Resultados do POC para o Modelo 1

Modos	POC				
	1º	2º	3º	4º	5º
1º	0,8561	-0,0229	-0,0023	0,0017	-0,0206
2º	0,0467	1,0716	-0,0458	-0,0746	-0,0646
3º	0,0675	-0,0125	1,0427	-0,0204	-0,0014
4º	0,0946	0,0092	0,0570	1,1557	0,0558
5º	-0,0893	-0,0296	-0,0377	-0,0469	1,0390

4.3 Resultados de Correlação entre Formas Modais para o Modelo Geométrico 2

Os resultados da correlação entre os vetores modais numéricos e os vetores experimentais do modelo 2 não diferiram substancialmente dos resultados apresentados para o modelo 1, discutidos na seção anterior. Ainda persistem problemas no 1º e no 4º modos, mas os valores do MSF e POC melhoraram em relação ao caso anterior. Isto deve-se principalmente à não inclusão da coordenada referente ao nó 11 da malha de elementos (figura 2), que era a coordenada modal 4 do caso anterior. Contudo, ainda persistem problemas na 6ª coordenada modal, que é a mesma do caso anterior. A figura 7 mostra o resultado do CoMAC para análise dos graus de liberdade numéricos e experimentais do modelo 2.

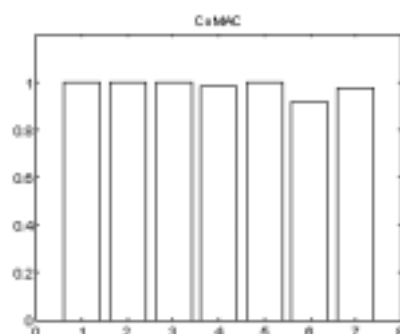


Figura 7 – Gráfico do CoMAC para Modelo 2

4.4 Resultados de Correlação entre Formas Modais para o Modelo Geométrico 3

Os resultados da correlação usando o modelo 3 mostraram a sensibilidade do MAC em relação ao número de pontos do modelo geométrico. De acordo com a tabela 3, os valores na diagonal principal melhoraram, assim como os valores fora da diagonal principal. Contudo, persiste a correlação, indicada pelo MAC, no 1º e 5º e no 2º e 4º modos. O MSF não foi sensível ao aumento do número de pontos, o mesmo acontecendo com o POC (tabela 4).

Tabela 3 – Resultados do MAC e MSF para o Modelo 3

Modos	MAC					Modos	MSF
	1º	2º	3º	4º	5º		
1º	0,9618	0,0126	0,0738	0,0211	0,2968	1º	0,8173
2º	0,0022	0,9957	0,0006	0,2549	0,0025	2º	1,0788
3º	0,0413	0,0002	0,9900	0,0010	0,0462	3º	1,0228
4º	0,0004	0,2020	0,0017	0,9825	0,0017	4º	1,1233
5º	0,3625	0,0006	0,0592	0,0002	0,9888	5º	1,0245

Tabela 4 – Resultados do POC para o Modelo 3

Modos	POC				
	1º	2º	3º	4º	5º
1º	0,8561	-0,0229	-0,0023	0,0017	-0,0206
2º	0,0467	1,0716	-0,0458	-0,0746	-0,0646
3º	0,0675	-0,0125	1,0427	-0,0204	-0,0014
4º	0,0946	0,0092	0,0570	1,1557	0,0558
5º	-0,0893	-0,0296	-0,0377	-0,0469	1,0390

Para este modelo geométrico, o CoMAC (figura 8) novamente aponta problemas na coordenada modal correspondente ao 11^o nó da malha, que neste caso novamente é a coordenada 4. Há também problemas na 8^a coordenada modal, que corresponde ao 19^o nó da malha de elementos finitos, e conseqüentemente à 6^a coordenada modal dos dois modelos anteriores.

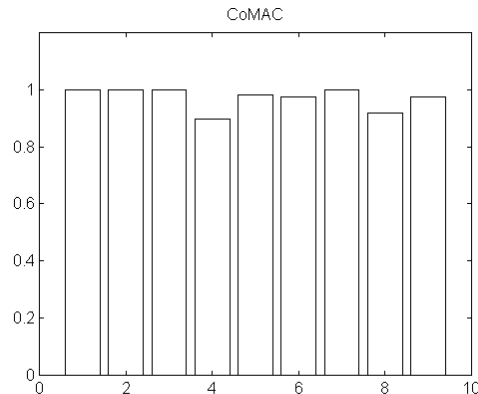


Figura 8 – Gráfico do CoMAC para Modelo 3

5. CONCLUSÕES

Os resultados das correlações segundo as técnicas do MSF e POC mostraram que existiram problemas na correlação entre o 1^o e 4^o pares de vetores modais numéricos e experimentais. As técnicas de correlação apresentadas no trabalho diagnosticaram nas coordenadas modais 4 e 6 o problema da correlação dos modos acima citados. Para estes modos foram apresentados os valores mais baixos de MAC, mas, ainda em uma faixa aceitável de valores. O MAC mostrou ser sensível ao número de coordenadas modais, no que diz respeito à indicação de modos que não são correlacionados, fato que não ocorreu com o MSF e POC.

6. REFERÊNCIAS

- Allemang, R. & Brown, D., 1982, A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis, First International Modal Analysis Conference, November, pp. 110-116.
- Application Note 243-3, 1986, The Fundamentals of Modal Testing, Hewlett Packard.
- Avitabile, P. & Foster, T., 1996, Evaluation of Degree of Freedom Based Vector Correlation Methods, Fourteenth International Modal Analysis Conference, February, pp. 1048-1056.
- Avitabile, P. & O'Callahan, J., 1995, Mass and Stiffness Orthogonality Checks Without Mass or Stiffness Matrix, Thirteenth International Modal Analysis Conference, pp.1515-1519.
- Avitabile, P., O'Callahan, J. & Milani, J., 1988, Model Correlation and Orthogonality Criteria, Sixth International Modal Analysis Conference, February, pp. 1039-1047.
- Ewins, D., 1984, Modal Testing: Theory and Practice, John Wiley & Sons Inc.
- Jarvis, B., 1991, Enhancements to Modal Testing Using Finite Elements, Ninth International Modal Analysis Conference, February, pp. 402-408.
- Lieven, N. & Ewins, D., 1988, Spatial Correlation of Mode Shapes, the Coordinate Modal Assurance Criteria (COMAC), Sixth Internat. Modal Analysis Conference, pp.690-695.
- O'Callahan, J., Avitabile, P. & Riemer, R., 1989, System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREPE), Seventh International Modal Analysis Conference, February, pp. 29-37.

CORRELATION OF MODE SHAPES AND DEGREES OF FREEDOM OF MODELS OBTAINED BY FINITE ELEMENT AND EXPERIMENTAL MODAL ANALYSIS

Abstract. *The verification of the quality of a dynamic model for a structure obtained by the finite element method begins through a correlation between the modal parameters of this model and the modal parameters obtained by experimental modal analysis. The correlation between the mode shapes (modal vectors) of the two models (numeric and experimental) provides a global indication of their similarity level, while the correlation between the degrees of freedom provides an indication of the contribution of each degree of freedom to the global values of the correlation between the modal vectors. This work presents application results of some techniques of correlation of mode shapes and degrees of freedom. The techniques used for the correlation between the mode shapes are MAC, MSF and POC, while for correlation among degrees of freedom CoMAC and Modulus Difference are used. The verification of the correlation, through these techniques is accomplished without using the mass and stiffness matrices of the finite element model. The techniques are applied in results for a free-free steel beam, where in the modal test, excitation by impact is used.*

Keywords: *Modal analysis, Mode Shapes, Modal Vectors, Degrees of Freedom, Correlation.*