

O MÉTODO DOS DOMÍNIOS PONTUAIS E APLICAÇÕES EM PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS

Alessandro Teixeira Neto

Fernando Iguti

Alberto Costa Nogueira Jr.

Euclides de Mesquita Neto

Departamento de Mecânica Computacional

Faculdade de Engenharia Mecânica

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

C.P. 6122, CEP 13.083-970, Campinas, SP, Brasil

E-mail: teixeira@fem.unicamp.br

Resumo. Neste trabalho apresenta-se a versão bidimensional do Método dos Domínios Pontuais (MDP) e aplicações em problemas envolvendo a equação de Poisson. Este consiste em um operador algébrico linear baseado em campos de interpolação com continuidade das derivadas de alta ordem para a resolução numérica de equações diferenciais ordinárias ou parciais. São discutidos os aspectos mais relevantes sobre o método proposto: metodologia sistemática para o desenvolvimento das funções MDP, discretização independente da malha e da equação diferencial de um problema específico. Alguns problemas de valores de contorno envolvendo a equação de Poisson são analisados. Um problema padrão é proposto e são comparadas as soluções obtidas, através de sistemas lineares da mesma ordem, empregando-se o método dos domínios pontuais e o Método da Reciprocidade Dual (MRD). O MDP também é usado para a solução de problemas clássicos de torção na teoria da elasticidade. Os casos de seções transversais triangular, retangular e retangular trincada são estudados e comparados com resultados conhecidos da literatura.

Palavras-chave: Métodos Computacionais, Equações Diferenciais, Aproximações com continuidade de alta ordem

1. INTRODUÇÃO

Recentemente a versão unidimensional do método dos domínios pontuais foi apresentada e aplicada às equações diferenciais referentes aos comportamentos estático e dinâmico de estruturas reticuladas (barras e vigas). Discretizações grosseiras e refinadas, além de funções MDP considerando-se diferentes níveis de continuidade, foram testadas extensivamente de forma a levantar-se as características numéricas de estabilidade, convergência e precisão do operador. O método apresentou resultados mais apurados que as soluções de elementos finitos baseadas na mesma ordem dos sistemas lineares finais, Neto e Iguti (1998).

O método dos domínios pontuais têm sido desenvolvido buscando explorar-se ao máximo o conceito de generalidade. Na prática isto significa a flexibilidade para o tratamento

de uma larga faixa de problemas, a facilidade de aplicação das condições de contorno e a possibilidade da introdução de descontinuidades em diferentes níveis da aproximação (função ou derivadas), conduzindo à soluções suaves para a aproximação e suas derivadas.

Para atender a este conceito de generalidade, o MDP apresenta funções fracamente estruturadas, e portanto distintas daquelas empregadas nos esquemas numéricos tradicionais. Enquanto observa-se a natureza altamente estruturada das aproximações de elementos finitos e de elementos de contorno, baseadas na forte dependência da malha de discretização, o método dos domínios pontuais caracteriza-se por simples funções polinomiais construídas por partes.

A versão bidimensional do MDP e aplicações na solução de problemas envolvendo a equação de Poisson são apresentadas neste trabalho. Deve-se observar que, à princípio, a função e seu domínio são genéricos, de modo que qualquer problema bidimensional descrito por equações diferenciais pode ser analisado segundo esta abordagem.

2. APROXIMAÇÕES MDP LINEARES EM $u^{(4,4)}(x, y)$

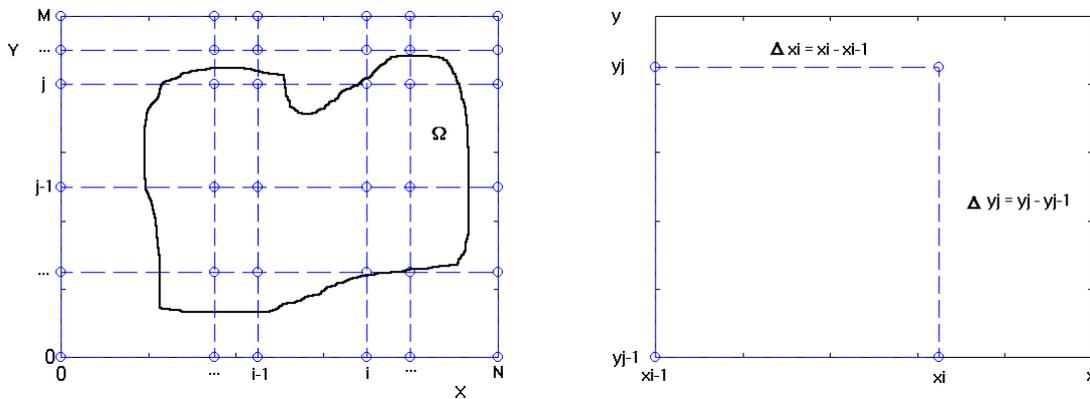


Figura 1 - Discretização de área em domínios pontuais

O lado esquerdo da Figura 1 apresenta uma área retangular do espaço bidimensional representada pela discretização em $(N+1) \times (M+1)$ domínios pontuais. Os domínios pontuais constituem os pontos de referência desta região do espaço bidimensional e estão localizados nas posições $(x_i, y_j), (i = 0, \dots, N), (j = 0, \dots, M)$. Para a análise de um problema, necessita-se apenas que o domínio Ω do mesmo esteja contido na área retangular discretizada, como mostrado no lado esquerdo da Figura 1.

De acordo com esta metodologia, as variáveis de discretização estão associadas aos domínios pontuais, e daí o nome do método. A maior parte das variáveis representa os valores de uma derivada de alta ordem que é linearmente aproximada por partes entre os domínios pontuais. E as demais variáveis representam os valores das derivadas de ordem mais baixa e da própria função em alguns domínios pontuais estrategicamente posicionados.

Como as variáveis MDP geralmente representam as derivadas da função $\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}(x_i, y_j)$ nos domínios pontuais $(i = 0, \dots, N), (j = 0, \dots, M)$, é conveniente introduzir-se uma notação simplificada, como apresentada na Equação 1.

$$u^{(p,q)}(i, j) \equiv \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}(x_i, y_j) \quad (1)$$

Neste trabalho as funções bidimensionais MDP são construídas a partir da derivada parcial $\frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4}(x, y)$ que é linearmente aproximada por partes entre os domínios pontuais. Assim, as ordens de derivação (p, q) da Equação 1 podem assumir os valores possíveis da combinação de $(p = 4, \dots, 0)$ e $(q = 4, \dots, 0)$.

O lado direito da Figura 1 apresenta um sistema referencial local convenientemente adotado para o desenvolvimento das funções MDP entre os domínios pontuais vizinhos (x_{i-1}, y_{j-1}) , (x_{i-1}, y_j) , (x_i, y_{j-1}) e (x_i, y_j) . Estas aproximações são válidas para todo (x, y) contido no intervalo $0 \leq x \leq \Delta x_i$, $0 \leq y \leq \Delta y_j$, onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. Portanto, permitindo-se que os índices i e j variem dentro das possibilidades $(i = 1, \dots, N), (j = 1, \dots, M)$, é possível avaliar-se os valores da função em qualquer posição (x, y) interior à área retangular de discretização original, apresentada no lado esquerdo da Figura 1.

A Equação 2 representa a aproximação MDP linear por partes da derivada de alta ordem $\frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4}(x, y)$.

$$u^{(4,4)}(x, y) = u^{(4,4)}(i-1, j-1)\left(1 - \frac{x}{\Delta x_i}\right)\left(1 - \frac{y}{\Delta y_j}\right) + u^{(4,4)}(i, j)\left(\frac{x}{\Delta x_i}\right)\left(\frac{y}{\Delta y_j}\right) + u^{(4,4)}(i-1, j)\left(1 - \frac{x}{\Delta x_i}\right)\left(\frac{y}{\Delta y_j}\right) + u^{(4,4)}(i, j-1)\left(\frac{x}{\Delta x_i}\right)\left(1 - \frac{y}{\Delta y_j}\right) \quad (2)$$

Todas as demais aproximações MDP das derivadas de ordem mais baixa e da própria função de interesse são obtidas através de procedimentos sucessivos de integração exata da Equação 2. Sendo assim, é conveniente representar-se por notações simplificadas as expressões polinomiais que resultam destes procedimentos de integração, uma vez que as mesmas aparecem repetidas vezes nas aproximações MDP. Estas notações simplificadas das expressões polinomiais são apresentadas nas Equações 3 à 5. Notações análogas à estas são usadas para a representação das expressões polinomiais na dimensão y .

$$x1 \equiv x, \quad x2 \equiv \frac{x^2}{2}, \quad x3 \equiv \frac{x^3}{6}, \quad xa1 = \left(1 - \frac{x}{\Delta x_i}\right), \quad xb1 = \left(\frac{x}{\Delta x_i}\right) \quad (3)$$

$$xa2 = \left(x - \frac{x^2}{2\Delta x_i}\right), \quad xb2 = \left(\frac{x^2}{2\Delta x_i}\right), \quad xa3 = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6\Delta x_i}\right), \quad xb3 = \left(\frac{x^3}{6\Delta x_i}\right) \quad (4)$$

$$xa4 = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24\Delta x_i}\right), \quad xb4 = \left(\frac{x^4}{24\Delta x_i}\right), \quad xa5 = \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120\Delta x_i}\right), \quad xb5 = \left(\frac{x^5}{120\Delta x_i}\right) \quad (5)$$

A aproximação MDP final $u(x, y)$, obtida a partir de procedimentos sucessivos de integração exata da Equação 2, é apresentada na Equação 6.

$$u(x, y) = u^{(4,4)}(i-1, j-1)xa5ya5 + u^{(4,4)}(i, j)xb5yb5 + u^{(4,4)}(i-1, j)xa5yb5 +$$

$$\begin{aligned}
& + u^{(4,4)}(i, j-1)xb5ya5 + u^{(4,3)}(i-1, j-1)xa5y3 + u^{(4,3)}(i, j-1)xb5y3 + \\
& + u^{(4,2)}(i-1, j-1)xa5y2 + u^{(4,2)}(i, j-1)xb5y2 + u^{(4,1)}(i-1, j-1)xa5y1 + \\
& + u^{(4,1)}(i, j-1)xb5y1 + u^{(4,0)}(i-1, j-1)xa5 + u^{(4,0)}(i, j-1)xb5 + \\
& + u^{(3,4)}(i-1, j-1)x3ya5 + u^{(3,4)}(i-1, j)x3yb5 + u^{(3,3)}(i-1, j-1)x3y3 + \\
& + u^{(3,2)}(i-1, j-1)x3y2 + u^{(3,1)}(i-1, j-1)x3y1 + u^{(3,0)}(i-1, j-1)x3 + \\
& + u^{(2,4)}(i-1, j-1)x2ya5 + u^{(2,4)}(i-1, j)x2yb5 + u^{(2,3)}(i-1, j-1)x2y3 + \\
& + u^{(2,2)}(i-1, j-1)x2y2 + u^{(2,1)}(i-1, j-1)x2y1 + u^{(2,0)}(i-1, j-1)x2 + \\
& + u^{(1,4)}(i-1, j-1)x1ya5 + u^{(1,4)}(i-1, j)x1yb5 + u^{(1,3)}(i-1, j-1)x1y3 + \\
& + u^{(1,2)}(i-1, j-1)x1y2 + u^{(1,1)}(i-1, j-1)x1y1 + u^{(1,0)}(i-1, j-1)x1 + \\
& + u^{(0,4)}(i-1, j-1)ya5 + u^{(0,4)}(i-1, j)yb5 + u^{(0,3)}(i-1, j-1)y3 + \\
& + u^{(0,2)}(i-1, j-1)y2 + u^{(0,1)}(i-1, j-1)y1 + u(i-1, j-1)
\end{aligned} \tag{6}$$

Observa-se que, devido ao seu procedimento construtivo, qualquer uma das aproximações MDP, de $u(x, y)$ ou de suas derivadas, pode ser descrita como uma função linear dos valores $u(0,0)$, $u^{(1,0)}(0,0)$, $u^{(2,0)}(0,0)$, $u^{(3,0)}(0,0)$, $u^{(0,1)}(0,0)$, $u^{(1,1)}(0,0)$, $u^{(2,1)}(0,0)$, $u^{(3,1)}(0,0)$, $u^{(0,2)}(0,0)$, $u^{(1,2)}(0,0)$, $u^{(2,2)}(0,0)$, $u^{(3,2)}(0,0)$, $u^{(0,3)}(0,0)$, $u^{(1,3)}(0,0)$, $u^{(2,3)}(0,0)$, $u^{(3,3)}(0,0)$, $u^{(0,4)}(0, j)$, $u^{(1,4)}(0, j)$, $u^{(2,4)}(0, j)$, $u^{(3,4)}(0, j)$, $u^{(4,0)}(i, 0)$, $u^{(4,1)}(i, 0)$, $u^{(4,2)}(i, 0)$, $u^{(4,3)}(i, 0)$ e $u^{(4,4)}(i, j)$, onde $(i = 0, \dots, N)$, $(j = 0, \dots, M)$. Têm-se então $(N+5)(M+5)$ valores associados aos domínios pontuais. Estes $(N+5)(M+5)$ valores são denominados variáveis MDP.

A solução desejada de um problema é obtida através de uma nuvem de pontos de aproximação tomada de forma a representar-se convenientemente o domínio do mesmo. A equação diferencial do problema é aplicada nos pontos de aproximação interiores ao domínio Ω . E as condições de contorno são aplicadas nos pontos de aproximação localizados na fronteira. Para que isto seja possível, é utilizada a colocação por pontos, resultando em uma equação para cada um dos pontos de aproximação, sendo estas funções lineares das variáveis MDP.

São necessárias pelo menos $(N+5)(M+5)$ equações, obtidas a partir da colocação por pontos, para o cálculo dos valores das variáveis MDP. O sistema de equações resultante é então resolvido empregando-se um esquema de mínimos quadrados.

Uma vez conhecidos os valores das variáveis MDP, as próprias funções MDP são utilizadas no pós-processamento, produzindo resultados suaves. É possível assim avaliar-se as aproximações de $u(x, y)$ e de suas derivadas até $u^{(4,4)}(x, y)$ em qualquer posição da área retangular de discretização, apresentada no lado esquerdo da Figura 1. Observa-se que esta metodologia sistemática para o desenvolvimento das funções é independente do domínio do problema ou de uma equação diferencial específica, e isto assegura a generalidade do método dos domínios pontuais.

3. MÉTODO DA RECIPROCIDADE DUAL

A equação de Poisson, onde b é uma função conhecida da posição $b = b(x, y)$, é apresentada na Equação 7.

$$\nabla^2(x, y) = u^{(2,0)}(x, y) + u^{(0,2)}(x, y) = b(x, y) \tag{7}$$

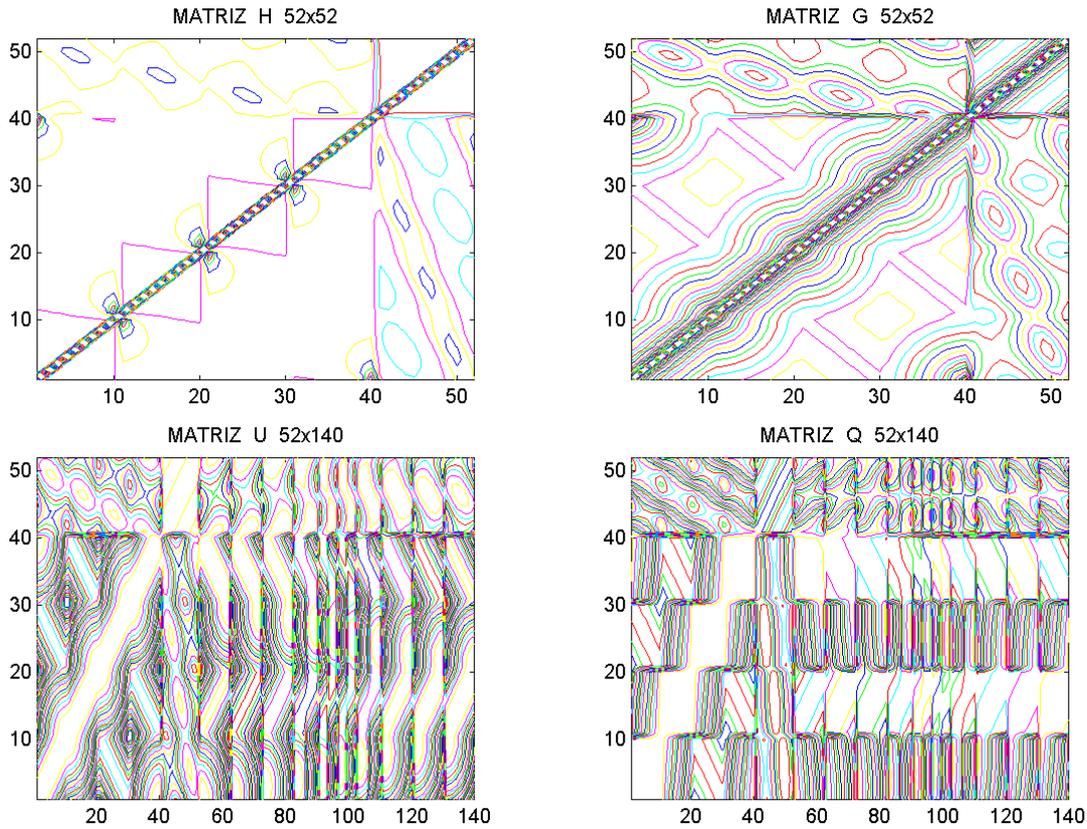


Figura 2 - Matrizes MRD

O Método da Reciprocidade Dual (MRD) é uma variante do método dos elementos de contorno que possibilita a análise de problemas envolvendo a equação de Poisson. Neste caso, a solução da Equação 7 é expressa através da soma da solução homogênea, associada a equação de Laplace, e de uma solução particular, associada a função b . A segunda identidade de Green é então aplicada à ambos os lados da Equação 7; Partridge, Brebbia e Wrobel (1992). O resultado discretizado desta operação é apresentado na Equação (8).

$$Hu - Gq = (H\hat{U} - G\hat{Q})\alpha \quad (8)$$

Para a solução do problema padrão, que será definido a seguir, são empregados 52 elementos de contorno constantes com um nó central para a representação da solução homogênea. Também são utilizadas 140 funções de aproximação nodais para a representação da solução particular, sendo 88 delas definidas no interior do domínio do problema e as 52 restantes em posições coincidentes com os nós dos elementos de contorno. A Figura 2 apresenta curvas de nível das matrizes H , G , \hat{U} e \hat{Q} obtidas da discretização do problema padrão segundo o MRD.

O problema padrão consiste num problema de valores de contorno definido no domínio $-1.2 \leq x \leq 1.2$, $-1.2 \leq y \leq 1.2$, $x^2 + y^2 \geq 0.25$. A Equação 9 representa a equação diferencial do problema.

$$\nabla^2 u(x, y) = 4 \cos(x^2 + y^2) - 4(x^2 + y^2) \sin(x^2 + y^2) \quad (9)$$

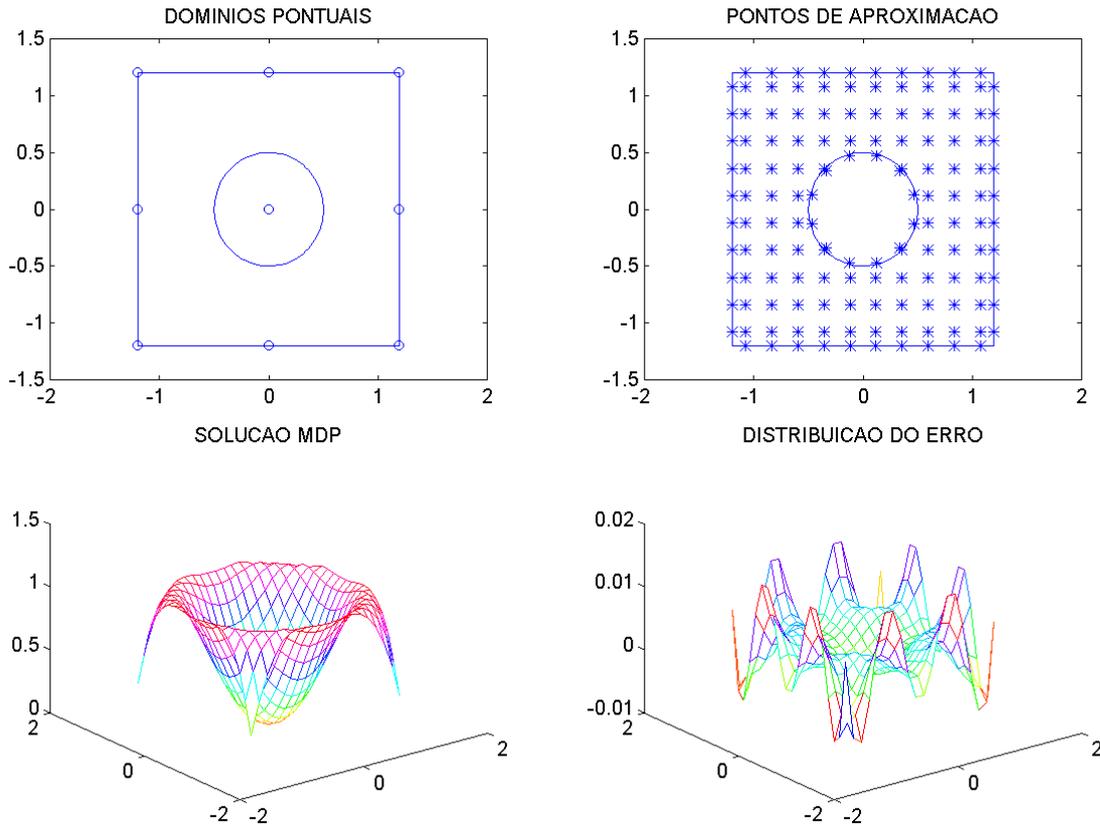


Figura 3 - Análise MDP do problema padrão

As condições de contorno consideradas no problema padrão são descritas pela Equação 10. O contorno Γ_1 é definido como $x^2 + y^2 = 0.25$. O contorno Γ_2 é dado por $(x = -1.2, -1.2 \leq y \leq 1.2)$ e $(x = 1.2, -1.2 \leq y \leq 1.2)$. E o contorno Γ_3 é definido como $(-1.2 \leq x \leq 1.2, y = -1.2)$ e $(-1.2 \leq x \leq 1.2, y = 1.2)$.

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \sin(0.25), (x, y) \in \Gamma_1 \\
 u^{(1,0)}(x, y) &= 2x \cos(x^2 + y^2), (x, y) \in \Gamma_2 \\
 u^{(0,1)}(x, y) &= 2y \cos(x^2 + y^2), (x, y) \in \Gamma_3
 \end{aligned} \tag{10}$$

A solução exata do problema padrão é conhecida e apresentada na Equação 11. Este problema é então discretizado e estudado, empregando-se o método dos domínios pontuais e o método da reciprocidade dual, de forma a obter-se a mesma ordem dos sistemas lineares.

$$u(x, y) = \sin(x^2 + y^2) \tag{11}$$

O canto superior direito da Figura 3 representa a discretização MRD do problema padrão utilizando-se 52 elementos de contorno constantes com um nó central, definidos nos contornos do problema, além de 88 pontos de aproximação, localizados no interior do domínio. Este procedimento possibilita a representação do problema através de um sistema linear de ordem 52.

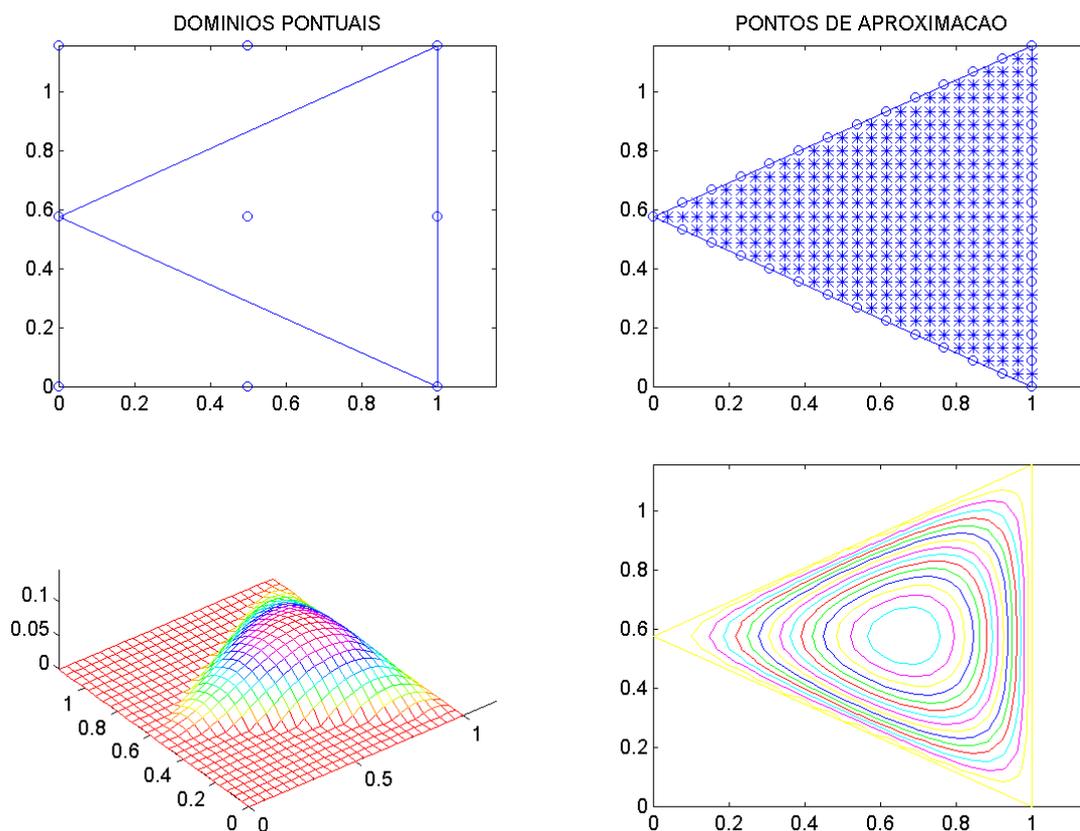


Figura 4 - Solução MDP para seção transversal triangular

A Figura 3 ilustra a aplicação MDP na solução do problema padrão. O canto superior esquerdo da figura apresenta os 9 domínios pontuais utilizados para a discretização de área. No canto superior direito da figura são mostrados 140 pontos de colocação. A Equação 9 diferencial do problema é aplicada nos 88 pontos de aproximação localizados no interior do domínio. E os 52 pontos de aproximação restantes são empregados para a aplicação da Equação 10 nos contornos do problema. Este procedimento conduz a um sistema linear de ordem 49. O canto inferior esquerdo da Figura 3 representa a solução MDP do problema teste. E no canto inferior direito é mostrada a distribuição do erro relativo à solução exata, Equação 11. Observa-se que o erro máximo absoluto da solução MDP é de 0.0131, considerando-se toda a área de discretização, e seu valor médio absoluto corresponde a 0.0034.

A Tabela 1 apresenta a comparação das soluções obtidas, segundo o método da reciprocidade dual e o método dos domínios pontuais, considerando-se os resultados tomados nas 52 posições nodais dos elementos de contorno. Na Tabela 1, o símbolo q representa a derivada normal da solução u do problema padrão.

Tabela 1 - Soluções MRD e MDP

esquema numérico	MRD	MDP
ordem do sistema	52	49
erro médio em u	1.2510 %	0.6960 %
erro máximo em u	2.9388 %	1.2613 %
erro médio em q	4.3519 %	1.0175 %
erro máximo em q	4.4595 %	1.4297 %

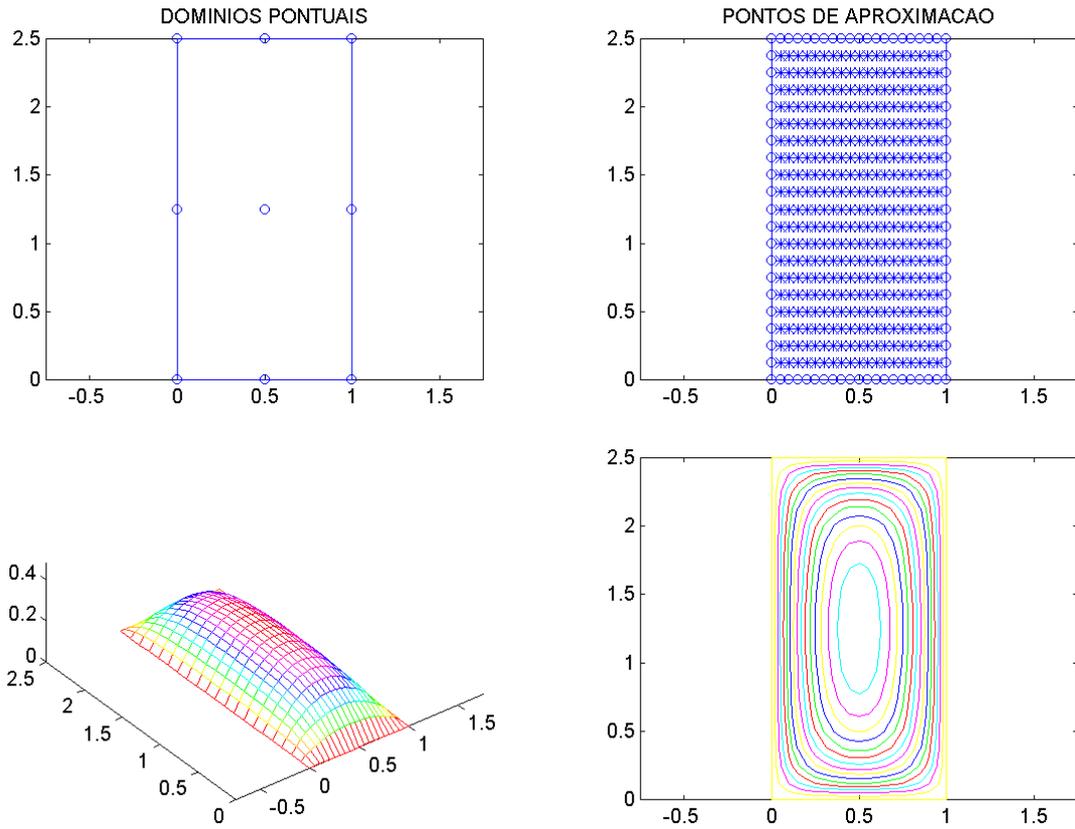


Figura 5 - Solução MDP para seção transversal retangular

4. PROBLEMAS DE TORÇÃO

Problemas de torção constituem problemas de valores de contorno na teoria da elasticidade que descrevem o comportamento da função de tensão $u(x, y)$ de acordo com a geometria da seção transversal do elemento. A Equação 12 representa o problema de torção, sendo válida em todo o domínio de uma seção transversal específica, onde G é o módulo de elasticidade transversal do material e θ é o ângulo de rotação por unidade de comprimento.

$$\nabla^2 u(x, y) = -2G\theta \quad (12)$$

Como condição de contorno do problema de torção exige-se que a função de tensão $u(x, y)$ seja nula em todo o contorno da seção transversal. Uma vez obtida a função de tensão $u(x, y)$ para uma geometria específica, as tensões de cisalhamento são dadas por $\tau_{yz}(x, y) = -u^{(1,0)}(x, y)$ e $\tau_{xz}(x, y) = u^{(0,1)}(x, y)$. Outro resultado importante obtido dos problemas de torção é o torque $M_t = 2 \iint_{\Omega} u(x, y) d\Omega$. Por simplicidade, assume-se neste trabalho que $G\theta = 1$ para os casos analisados.

A Figura 4 ilustra o procedimento MDP para a obtenção da função de tensão $u(x, y)$ para uma seção transversal triangular equilátera. O canto superior esquerdo da figura apresenta a discretização de área em 9 domínios pontuais. Este procedimento conduz a um sistema linear de ordem 49. O canto superior direito da Figura 4 apresenta os pontos de aproximação para a colocação da equação diferencial do problema, indicados por *, e os

pontos de aproximação para a colocação da condição de contorno, indicados por \circ . O canto inferior esquerdo da figura apresenta a função de tensão $u(x,y)$ MDP obtida, enquanto o canto inferior direito mostra as curvas de nível desta mesma função. A função de tensão $u(x,y)$ MDP é coincidente com a solução exata deste problema de torção, apresentada em Timoshenko e Goodier (1970).

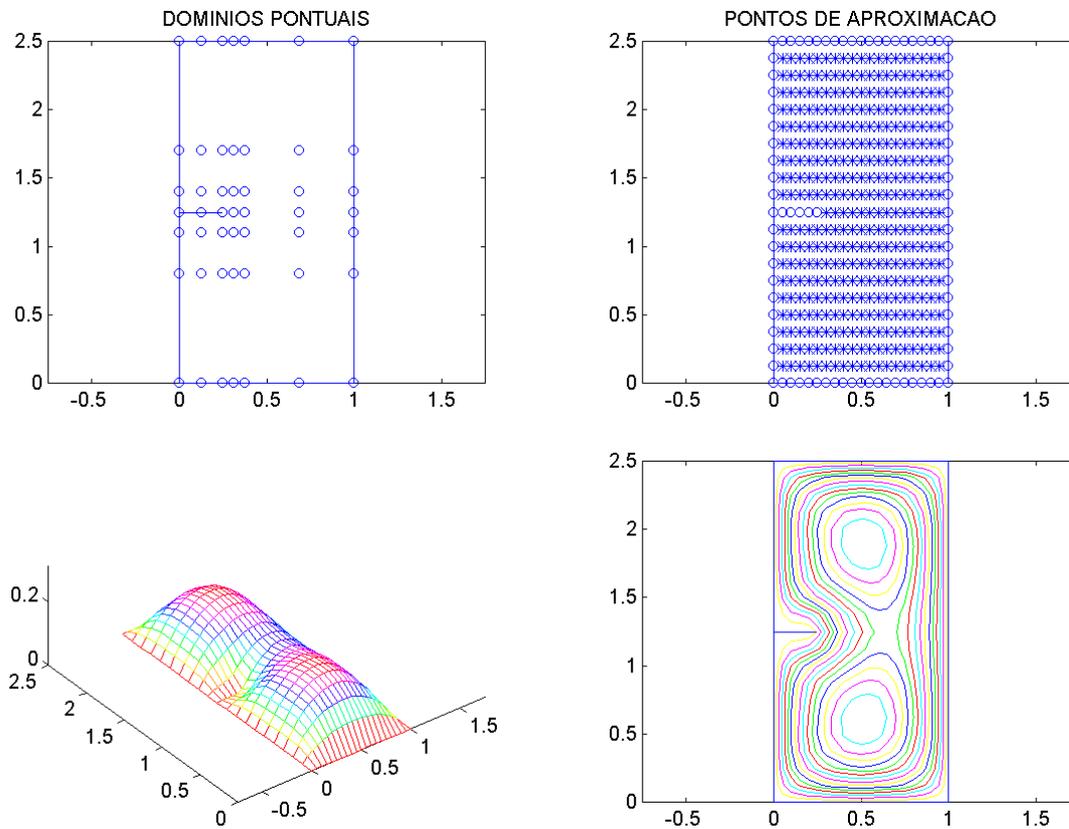


Figura 6 - Solução MDP para seção retangular trincada

A Figura 5 é análoga à Figura 4 e ilustra o procedimento MDP para a obtenção da função de tensão $u(x,y)$ para uma seção transversal retangular. A Tabela 2 apresenta resultados numéricos do torque adimensional $M_t / G\theta a^4$ para diferentes valores da razão b/a dos comprimentos dos lados da seção transversal. As soluções MDP são comparadas com os valores exatos do torque, apresentados em Timoshenko e Goodier (1970), e resultados SAN obtidos por Ioakimidis (1990). Os esquemas Semi-Analíticos/Numéricos (SAN) caracterizam-se por combinarem valores simbólicos e numéricos na aproximação, tendo aplicações especialmente em problemas de otimização.

Tabela 2 - Valores do torque para seções transversais retangulares

b/a	1.0	2.5	5.0	10.0
SAN	2.2489	9.9716	23.2891	49.7479
MDP	2.2490	9.9706	23.2517	49.4372
exatos	2.2496	9.96	23.28	49.92

A Figura 6 ilustra o procedimento MDP para a obtenção da função de tensão $u(x, y)$ para uma seção transversal retangular trincada. O canto superior esquerdo da figura apresenta a discretização de área em 49 domínios pontuais. Este procedimento conduz a um sistema linear de ordem 121. Observa-se que esta solução tem significado qualitativo, embora não tenha sido comparada com resultados da literatura.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho a versão bidimensional do método dos domínios pontuais foi apresentada e aplicada na solução de problemas envolvendo a equação de Poisson. Foram obtidas soluções equivalentes de um problema padrão, baseadas na mesma ordem dos sistemas lineares, segundo os procedimentos MDP e MRD. Observa-se que o método dos domínios pontuais apresentou a solução mais apurada para este problema padrão. O MDP também foi empregado na solução de problemas de torção na teoria da elasticidade. As soluções MDP para as seções transversais triangulares e retangulares apresentaram resultados de acordo com a literatura. E a solução MDP para uma seção retangular trincada mostrou-se qualitativamente correta.

A introdução de descontinuidades físicas em diferentes níveis da aproximação (função ou derivadas) e aplicações MDP na solução de problemas não-lineares constituem aspectos a serem explorados em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

- Ioakimidis, N. I., Application of Mathematica to the Direct Solution of Torsion Problems by the Energy Method, Computers & Structures, Vol. 43, No. 4, pp. 803-807, 1992.
- Neto, A. T., & Iguti, F., Método dos Domínios Pontuais (MDP), Anais do V Congresso de Engenharia Mecânica Norte e Nordeste, Vol. 2, pp. 96-103, Fortaleza, 1998.
- Partridge, P. W., Brebbia, C. A., & Wrobel, L. C., The Dual Reciprocity Boundary Element Method, Computational Mechanics Publications, 1992.
- Timoshenko, S. P., & Goodier, J. N., Theory of Elasticity, 3rd edition, pp. 291-321, McGrall-Hill, New York and Kogakusha, Tokyo, 1970.

POINT DOMAIN METHOD AND APPLICATIONS FOR 2-DIMENSIONAL POISSON PROBLEMS

Abstract. *The 2-dimensional version of the Point Domain Method (PDM) is presented and applied to the solution of classical Poisson problems. It consists of a linear algebra operator based on approximation fields which assures continuity of the higher order derivatives for the numerical solution of ordinary and partial differential equations. The main topics about the proposed method are discussed: systematic methodology for development of the PDM functions, meshless discretization and non-dependency of a specific differential equation. Different boundary valued problems concerning Poisson equation are analysed. A test problem is proposed and considerations about point domain method and Dual Reciprocity Method (DRM) solutions based in the same order of the linear systems are presented. The PDM is also used for the solution of torsion problems in the theory of elasticity. The cases of triangular, rectangular and rectangular cracked cross sections are studied and compared with known results from the literature.*

Keywords: *Computational methods, Differential equations, High order approximations*