XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica
15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering
22 - 26 de Novembro de 1999 / November 22 - 26, 1999 Águas de Lindóia, São Paulo,

DEFORMAÇÕES CONTROLÁVEIS EM MATERIAIS TRANSVERSALMENTE HEMITRÓPICOS

Nelson Achcar
Escola Politécnica da USP
Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações

Fernando P. Duda
Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE
Programa de Engenharia Mecânica, C.P. 68503, 21945-970 - Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Resumo. *É determinada uma condição necessária e suficiente para que uma deformação que é universal para a classe dos materiais transversalmente isotrópicos tambem o seja para a classe dos transversalmente hemitrópicos. Mostra-se que a torção, que é universal para a classe dos transversalmente isotrópicos, é controlável em certos materiais transversalmente hemitrópicos mas não é universal para esta classe.*

Palavras-chave: *deformações controláveis, deformações universais, elasticididade não linear, anisotropia.*

1. INTRODUÇÃO

Uma deformação que pode ser produzida em um material apenas pela aplicação de forças de superfície é chamada de *deformação controlável.* Entre as deformações controláveis estão aquelas que podem ser realizadas para todo material em uma certa classe. Tais deformações são chamadas *deformações universais* para a classe de materiais. O conhecimento de deformações universais, nas quais as forças de superfície podem ser medidas, é de grande utilidade para a determinação das propriedades do material. Este procedimento foi utilizado com sucesso por Rivlin & Saunders (1951) para a borracha, considerando-a como um material hiperelástico, homogêneo, isotrópico e incompressível. O problema de determinar o conjunto completo das deformações universais para uma dada classe de materiais foi considerado por Ericksen, e que por essa razão chamamos de Problema de Ericksen, para as duas classes de materiais abaixos:

M1: Materiais hiperelásticos, homogêneos, isotrópicos e incompressíveis (Ericksen, 1954);

M2: Materiais hiperelásticos, homogêneos, isotrópicos e compressíveis (Ericksen, 1955).

Para a classe de materiais $M1$, seis famílias de deformações universais são conhecidas:

Família 0. Deformações homogêneas;

Família 1. Flexão, estiramento e cisalhamento de um bloco retangular;

Família 2. Retificação , estiramento e cisalhamento de um setor de cilindro vazado;

Família 3. Inflação , flexão, torção , extensão e cisalhamento de uma cunha anular;

Família 4. Inflação ou eversão do setor de uma casca esférica;

Família 5. Inflação , flexão, extensão e cisalhamento radial de uma cunha anular.

A existência ou não de uma outra família de deformações universais para $M1$ continua em aberto (ver por exemplo, Antman (1995) e Beatty (1987)). Já para a classe $M2$, as únicas deformações universais são as deformações homogêneas.

O problema de Ericksen para materiais hiperelásticos, homogêneos, incompressíveis com alguma espécie de anisotropia ainda não foi considerado, ao menos no conhecimento dos autores. Contudo, Truesdell & Noll (1966) mostraram que as Famílias de 1 a 4 são universais para certos tipos de anisotropia. Para a classe de materiais hiperelásticos, homogêneos, incompressíveis e transversalmente isotrópicos, Ericksen & Rivlin (1954) mostraram que a parte plana da Família 1 e a Família 3 são universais, enquanto que Huilgol (1966) mostrou que a Família 5 é universal.

Neste trabalho mostraremos que a torção , que é um caso especial da Família 3, não é universal para a classe de materiais hiperelásticos, homogêneos, incompressíveis e transversalmente hemitrópicos. Em seguida, mostraremos que a torção de um eixo vazado é controlável para um material especial, e que para este material, a torção de um eixo maciço apresenta uma singularidade no campo de tensões.

A notação usada neste trabalho é a comumente emprega em Mecânica do Contínuo (Gurtin, 1982).

2. PRELIMINARES

Seja $\mathbf{f}$ uma deformação que ao ponto material $\mathbf{X}$ associa o ponto espacial $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$. Denotaremos por $\mathbf{F}$ o gradiente de $\mathbf{f}$, $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{f}$, por $\mathbf{B}$ o tensor de Cauchy Green esquerdo, $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$, e por $\mathbf{C}$ o tensor de Cauchy-Green direito, $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$.

Para um material hiperelástico, a resposta mecânica é caracterizada pela função densidade de energia de deformação $\hat{\sigma}$, que a uma deformação $\mathbf{f}$ associa o escalar $\hat{\sigma}(\mathbf{F})$ e, pelo principio da invariância do observador, $\hat{\sigma}(\mathbf{F}) = \tilde{\sigma}(\mathbf{C})$.

O grupo de simetria G de um material hiperelástico é definido da seguinte forma:

$$G = \{\mathbf{Q} \in Ort \mid \tilde{\sigma}(\mathbf{C}) = \tilde{\sigma}(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T)\}, \tag{1}$$

onde Ort é o conjunto dos tensores ortogonais. Um material é isotrópico se $G = Ort$.

Seja $\mathbf{k}$ um vetor unitário. Denotaremos por $\mathbf{P}$ o tensor projeção na direção $\mathbf{k}$, $\mathbf{P} = \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$, e por $\mathbf{W}$ o tensor antissimétrico que tem $\mathbf{k}$ como vetor axial.

Um material é dito *transversalmente isotrópico* com direção preferencial $\mathbf{k}$ quando

$$G = \{\mathbf{Q} \in Ort \mid \mathbf{Q}\mathbf{k} = \mathbf{k}\}, \tag{2}$$

e *transversalmente hemitrópico* com direção preferencial $\mathbf{k}$ quando

$$G = \{\mathbf{Q} \in Ort^+ \mid \mathbf{Qk} = \mathbf{k}\}, \tag{3}$$

onde Ort^+ é o conjunto das rotações .

Pelo teorema da representação para materiais transversalmente hemitrópicos (ver por exemplo, Achcar (1995), Duda et al (1998), Zheng (1994)) e incompressíveis,

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{C}) = \sigma(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5), \tag{4}$$

onde $I_1 = trC$, $I_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}^2\mathbf{C} - \mathrm{tr}\mathbf{C}^2)$, $I_3 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}$, $I_4 = \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{P}$, $I_5 = \mathbf{C}^2\mathbf{WC} \cdot \mathbf{P}$. Neste caso, o tensor tensões de Cauchy é

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \sum_{i=1}^{5} \sigma_i \mathbf{A}_i, \tag{5}$$

onde $\sigma_i = \frac{\partial \sigma}{\partial I_i}$ e $\mathbf{A}_i = \mathbf{F}\frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}}\mathbf{F}^T$.

A equação de equilíbrio na ausência de forças de corpo,

$$\mathrm{div}\mathbf{T} = \mathbf{0}, \tag{6}$$

levando em conta (5), é neste caso escrita como

$$\nabla p = \mathrm{div}(\sum_{i=1}^{5} \sigma_i \mathbf{A}_i), \tag{7}$$

ou equivalentemente,

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{div}(\sum_{i=1}^{5} \sigma_i \mathbf{A}_i) = \mathbf{0}. \tag{8}$$

3. DEFORMAÇÕES CONTROLÁVEIS E UNIVERSAIS

Seja M uma classe de materiais. Denotaremos por $U(M)$ o conjunto de deformações universais para M, isto é, o conjunto de deformações tal que (6) é satisfeita para qualquer material em M. É imediato observar que se M e N são classes de materiais e $N \subset M$, então $U(M) \subset U(N)$.

De agora em diante, usaremos a palavra material como abreviação para material hiperelástico, homogêneo e incompressível.

Denotaremos por M_i a classe de materiais isotrópicos, M_{ti} a classe de materiais transversalmente isotrópicos, e por M_{th} a classe de materiais transversalmente hemitrópicos. É imediato observar que $M_i \subset M_{ti} \subset M_{th}$. Portanto, $U(M_{th}) \subset U(M_{ti}) \subset U(M_i)$.

Para que uma deformação $\mathbf{f} \in U(M_{th})$ é necessário e suficente que (8) seja satisfeita para quaisquer escolha de σ_i. Agora, se $\mathbf{f} \in U(M_{ti})$, uma condição necessária e suficente para que $\mathbf{f} \in U(M_{th})$ é

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{div}\,\sigma_5 \mathbf{A}_5 = \mathbf{0}, \tag{9}$$

para qualquer escolha de σ_5. De outro modo, se (9) for satisfeita para uma escolha especial de σ_5, embora $\mathbf{f} \in U(M_{ti})$, a mesma é apenas controlável para um material em M_{th}.

4. TORÇÃO

Considere a deformação $\mathbf{f}$ escrita em componentes como

$$r = R \quad \theta = \Theta + \tau Z \quad z = Z, \tag{10}$$

onde R, Θ, Z e r, θ, z são as coordenadas cilindricas nas configurações de referência e deformada, respectivamente, enquanto que τ é uma constante. A deformação acima é um caso particular da Família 3, e é conhecida como torção . Para esta deformação

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\Theta + \tau R \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_Z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z, \tag{11}$$

e

$$\mathbf{C} = \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\Theta \otimes \mathbf{e}_\Theta + \tau R(\mathbf{e}_\Theta \otimes \mathbf{e}_Z + \mathbf{e}_Z \otimes \mathbf{e}_\Theta) + (1 + \tau^2 R^2)\mathbf{e}_Z \otimes \mathbf{e}_Z. \tag{12}$$

Ericksen & Rivlin (1954) mostraram que a Família 3, e por isso a torção , pertencem a $U(M_{ti})$ quando $\mathbf{k} = \mathbf{e}_Z$. Nesta situação ,

$$\mathbf{A}_5 = -\tau^2 r^2 (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r). \tag{13}$$

Considerando que $\mathbf{C}$, e por isso σ, depende apenas de $r = R$, podemos reescrever (9) como

$$r^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dr}^2}\sigma_5 + 7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\sigma_5 + 8\sigma_5 = 0, \tag{14}$$

cuja solução é

$$\sigma_5 = \frac{m}{r^2} + \frac{n}{r^4}, \tag{15}$$

onde m e n são constantes. Observando que

$$I_1 = 3 + \tau^2 r^2, \tag{16}$$

podemos reescrever (15) como

$$\sigma_5 = \frac{A}{I_1 - 3} + \frac{B}{(I_1 - 3)^2}, \tag{17}$$

onde A e B são constantes. Integrando a equação acima obtemos

$$\sigma(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = \varphi(I_1, I_2, I_3, I_4) + (\frac{A}{I_1 - 3} + \frac{B}{(I_1 - 3)^2})I_5, \tag{18}$$

onde φ é um função qualquer.

Observemos então que

$$\lim_{r \to 0} \sigma_5 \mathbf{A}_5 = \infty. \tag{19}$$

Portanto, concluimos que

1) A torção não é universal para materiais transversalmente hemitrópicos, uma vez que (9) não é satisfeita para qualquer σ;

2) A torção é controlável para materiais transversalmente hemitrópicos com energia da forma (18);

3) O campo de tensões tem uma singularidade no eixo $r = R = 0$, uma vez que o último termo de $\mathbf{T}$ em (5) de acordo com (19) vai para o infinito.

REFERÊCIAS

Achcar, N., 1995, Hyperelastic materials possessing rotational symmetry, Applied Mechanics Reviews, vol 48, 11, pp.19-24

Antman, S., 1995, Nonlinear problems of Elasticity, Springer-Verlag.

Beatty, M., 1987, Topics in finite elasticity: Hyperelasticity of rubber, elastomers, and biological tissues-with examples, Applied Mechanics Reviews, 40, vol.12, pp.1699-1734.

Duda F. P., Martins L. C. & Podio-Guidugli 1998, On the representation of stored energy for elastic materials with full transverse response-symmetry, Journal of Elasticity, vol.51, pp.167-176. aceito para publicação em Mathematics and Solid Mechanics.

Ericksen, L., 1954, Deformations possible in every isotropic incompressible perfectly elastic body, Z. angew. Math. Phys., vol.5, pp.466-486.

Ericksen, L., 1955, Deformations possible in every compressible perfectly elastic body, J. Math. Phys., vol.34, pp.126-128.

Ericksen, L. & Rivlin, R., 1954, Large elastic deformations of homogeneous anisotropic materials, J. Rational Mech. Anal., vol.3, pp.281-301.

Fosdick, R. L. & Schuler, K. W., 1969, On Ericksen's problem for plane deformation with uniform transverse stretch, Int. J. Eng. Sci., vol.7, pp.217-223.

Gurtin, M. E., 1981, An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, New York.

Huigol, R., 1966, A finite deformation possible in transversely isotropic materials, Z. angew. Math. Phys., vol.17, pp.787-789.

Truesdell & Noll, 1965, The Non-Linear Fields Theories of Mechanics, In Handbuch der Physih III/3, Springer-Verlag.

Zheng, Q-S, 1994, Theory of representations for tensor functions - A unified invariant approach, Applied Mechanic Reviews, vol.47, pp.545-587.

CONTROLLABLE DEFORMATIONS OF TRANSVERSELY HEMITROPIC MATERIALS

Abstract. *It is presented a necessary and suficient condition for a universal deformation in the class of transversely isotropic materials to be universal in the class of the transversely hemitropic materials. It is shown that the torsion, although universal in the class of the transversely isotropic materials, is controllable only in some transversely hemitropic materials. .*

Keywords*: controllable deformations, universal deformations, non linear elasticity, anisotropy*