



CONTROLE DE VIBRAÇÕES DE UM BRAÇO ROTATIVO FLEXÍVEL PELO MOVIMENTO DE UMA MASSA SOBRE O BRAÇO

Frederico Ricardo Ferreira de Oliveira

Universidade de São Paulo - USP

Escola Politécnica, Departamento de Engenharia Mecânica

Av. Prof. Mello Moraes, 2231 - Sala MC 01 - 05508-900 - São Paulo, SP, Brasil

Agenor de Toledo Fleury

Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo - IPT

Divisão de Mecânica e Eletricidade

Agrupamento de Sistemas de Controle

Cx. P. 0141 - 01064-970 - São Paulo, SP, Brasil

***Resumo.** O modelo dinâmico de um braço rotativo flexível sobre o qual desliza uma massa móvel é deduzido através do Princípio de Hamilton, resultando em um sistema de equações íntegro-diferenciais acopladas, variável no tempo e no espaço devido à variação dos termos de inércia. A modelagem por subestruturação foi o meio empregado para contornar algumas das dificuldades matemáticas daí decorrentes, considerando isoladamente o braço flexível e a massa móvel. Empregando posteriormente o Método dos Modos Assumidos, obtém-se um modelo suficientemente simples para ser empregado na síntese do controlador. O movimento da massa sobre a viga pode ser visto sob duas abordagens distintas: primeira, admitindo pré-especificada sua trajetória sobre o braço durante a manobra de rotação, o que significa tratar seu posicionamento como uma variável de estado; segunda, a posição da massa é empregada como uma segunda variável de controle, além do torque sobre a viga, usado para imprimir a rotação. Um controlador LQR foi implementado para o primeiro caso, e os resultados numéricos da simulação são mostrados e analisados. Estratégias para a segunda abordagem são discutidas, já que a combinação torque-posição da massa mostra-se como excelente alternativa para controle de estruturas rotativas.*

***Palavras-chave:** estruturas flexíveis, modelagem dinâmica, controle, braço rotativo*

1. INTRODUÇÃO

A dinâmica e o controle de estruturas flexíveis têm despertado um crescente interesse, na última década, em particular devido às perspectivas que abre em áreas importantes como a Engenharia Espacial e a Robótica. Esse interesse tem levado a inúmeros trabalhos no campo da modelagem dinâmica dessas estruturas. Simo & Vu-Quoc (1986) apresentam um estudo detalhado da dinâmica de barras flexíveis sujeitas a manobras de grandes dimensões. Özguner & Barbieri (1988) propõem um modelo já clássico e que tem sido uma referência na área. Outros trabalhos têm-se debruçado sobre o estudo e implementação de técnicas de controle otimizado. Book (1990) apresenta uma importante análise do estado da arte em dinâmica e controle de braços flexíveis. Um dos problemas que se apresenta nesse campo é o da atenuação e controle da vibração induzida durante uma manobra. Entre as diversas formas de atuação que têm sido propostas estão o emprego de atuadores piezoelétricos e atuadores de posicionamento e/ou carga variáveis.

Neste trabalho propõe-se avaliar o controle de vibrações de um braço rotativo flexível, empregando como atuadores não apenas o torque aplicado pelo motor de rotação, mas também a posição de uma massa móvel que desliza longitudinalmente pelo braço.

2. MODELAGEM DINÂMICA DO BRAÇO ROTATIVO

A Figura 1 mostra um diagrama esquemático da flexão provocada no braço, quando uma manobra de rotação é realizada. Admite-se que a manobra se realiza num plano horizontal (Oxy), de modo que as forças-peso não são consideradas. As variáveis presentes na Fig. 1 estão definidas ao longo do texto.

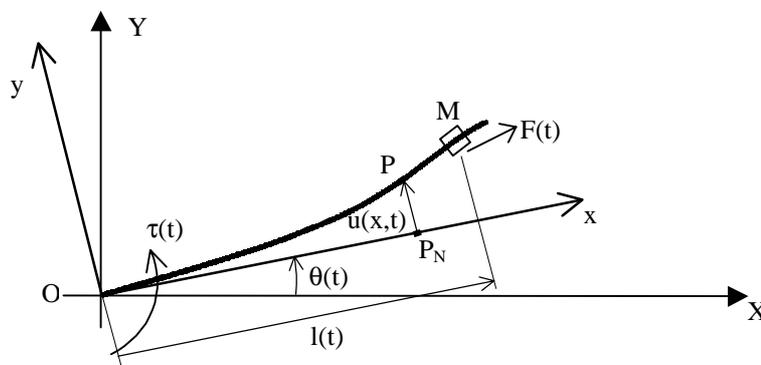


Figura 1 - Flexão do braço rotativo durante manobra de rotação (vista de topo).

2.1 Energia potencial elástica e energia cinética do braço

Durante a manobra de rotação, a vibração provocada resulta em um armazenamento de energia potencial elástica, devido à flexão do braço. Em um instante t , é igual a

$$U(t) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L E \cdot I_V \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (1)$$

onde E é o módulo de Young do material, I_V é momento de inércia transversal do braço e $u = u(x,t)$ é a flexão transversal do mesmo, como ilustra a Fig. 1. $\partial^2 u / \partial x^2$ denota a derivada parcial segunda de $u(x,t)$ em relação a x .

A energia cinética total armazenada no braço é

$$T_V(t) = \int_0^L \frac{1}{2} \rho \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + 2 \cdot x \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \left(\frac{d\theta}{dt} \right) + (x^2 + u^2) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] dx, \quad (2)$$

onde L e ρ são o comprimento do braço e sua densidade linear de massa, respectivamente. $\theta(t)$ é o ângulo de rotação da viga-sombra, isto é, uma viga rígida que acompanha o movimento do braço flexível, como ilustra a Fig. 1.

2.2 Energia cinética da massa móvel

Considerando a composição de movimentos da massa móvel sobre o braço, a rotação e a vibração deste, é possível mostrar que a energia cinética da massa é igual a

$$T_M(t) = \frac{1}{2} M \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=l}^2 + 2 \cdot l \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=l} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right) + [l^2 + u^2(l)] \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 - 2 \cdot u(l) \cdot \left(\frac{dl}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \right], \quad (3)$$

onde M é o valor da massa e $l(t)$, a projeção ortogonal de sua posição no sistema de referência girando com o braço, como mostra a Fig. 1.

2.3 Modelo contínuo do sistema

O Princípio de Hamilton estabelece que, entre dois instantes t_1 e t_2 ,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0, \quad (4)$$

onde o Lagrangiano L, para o sistema considerado, é

$$L = T - U = T_V + T_M - U. \quad (5)$$

O trabalho virtual das forças externas é dado por

$$\delta W = \tau \cdot \delta\theta + F \cdot \delta l, \quad (6)$$

sendo $\tau(t)$ o torque aplicado ao cubo e $F(t)$, a força atuante sobre a massa móvel no instante t, de direção tangencial ao braço em $l(t)$.

O Princípio de Hamilton, para o sistema em análise, reduz-se então a

$$\int_0^L \left\{ E \cdot I_V \cdot \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) + \rho \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + x \cdot \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) - u \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + M \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + l \cdot \left(\frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) + 2 \cdot \left(\frac{dl}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right) - u \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \cdot \Delta_l \right\} dx = 0 \quad (7)$$

$$\int_0^L \left\{ \rho \cdot \left[u^2 \cdot \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + 2 \cdot u \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right) + x \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + x^2 \cdot \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \right] - \right. \\ \left. - M \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \cdot l - u \cdot \left(\frac{d^2 l}{dt^2} \right) + u^2 \cdot \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + 2 \cdot u \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \right] \cdot \Delta_l \right\} dx + \\ + M \cdot \left[l^2 \cdot \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + 2 \cdot l \cdot \left(\frac{\partial l}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \right] = \tau \quad (8)$$

$$M \cdot \left[\frac{d^2 l}{dt^2} - l \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] - \int_0^L M \cdot \left[u \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \right] \cdot \Delta_l dx = F, \quad (9)$$

onde Δ_l é o delta de Kronecker, introduzido por motivos de simplificação da notação. As Equações (7-9) constituem o modelo contínuo do sistema, restrito às condições de contorno

$$u(0,t) = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0,t} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x=L,t} = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{x=L,t} = 0. \quad (10)$$

3. MODELO POR SUBESTRUTURAÇÃO

O modelo contínuo constitui-se, como se verifica, de um conjunto de equações íntegro-diferenciais acopladas, em derivadas parciais. Trata-se, portanto, de um modelo de difícil manipulação matemática. Técnicas de subestruturação, descritas por Meirovitch (1980) e outros diversos autores, têm sido empregadas satisfatoriamente no estudo de estruturas mecânicas complexas. Trata-se de uma abordagem possível ao estudo em questão, alternativa à solução direta das equações do sistema.

A interação entre o braço rotativo e a massa móvel, analisados isoladamente, é modelada como uma força $F_E(l)$, externa ao braço e puntual, aplicada sobre ele na posição da massa, $l(t)$.

3.1 Modelo do braço flexível considerado isoladamente

Considera-se agora um subsistema dinâmico composto do braço rotativo flexível e do cubo ao qual aquele se acopla. Sobre ele atuam duas forças externas: um torque $\tau(t)$, aplicado ao cubo; e uma força $F_E(l)$, de direção normal ao braço no ponto $l(t)$, onde é aplicada.

O trabalho virtual das forças externas, neste caso, é dado por

$$\delta W = \tau \cdot \delta\theta + F_E(l) \cdot \delta u(l). \quad (11)$$

Considerando a Eq. (5), o Princípio de Hamilton reduz-se, então, a

$$E \cdot I_V \cdot \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) + \rho \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \rho \cdot x \cdot \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) = F_E(l), \quad (12)$$

$$\int_0^L \rho \cdot x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx + J_V \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau, \quad (13)$$

sistema restrito às condições de contorno iguais às indicadas na Eq. (10). Na Eq. (13), J_V é o momento de inércia do braço flexível.

No modelo descrito pelas Eq. (12-13) supõe-se que os termos quadráticos são pequenos e podem ser desprezados.

A solução do sistema íntegro-diferencial é proposta por Özgüner & Barbieri (1988). Se $z(x,t)$ é uma variável auxiliar definida por

$$z(x,t) = u(x,t) + x \cdot \theta(t), \quad (14)$$

então

$$E \cdot I_V \cdot \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} \right) + \rho \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) = F_E(l), \quad (15)$$

$$\int_0^L \rho \cdot x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dx = \tau. \quad (16)$$

O desacoplamento das equações diferenciais é obtido pela separação de variáveis

$$z(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \cdot \eta_r(t), \quad (17)$$

onde $\phi_r(x)$ é o r -ésimo modo natural da estrutura e $\eta_r(t)$, a função de tempo correspondente.

Os modos naturais do braço são determinados pela solução do problema homogêneo, expresso por

$$E \cdot I_V \cdot \frac{d^4 \phi_r}{dx^4} - \omega_r^2 \cdot \rho \cdot \phi_r = 0. \quad (18)$$

Por inspeção, verifica-se que a forma geral

$$\begin{aligned} \phi(x) = \sum_r \phi_r(x) = \sum_r [a_r \cdot \text{sen}(\beta_r \cdot x) + b_r \cdot \text{cos}(\beta_r \cdot x) + \\ + c_r \cdot \text{senh}(\beta_r \cdot x) + d_r \cdot \text{cosh}(\beta_r \cdot x)] \end{aligned} \quad (19)$$

satisfaz a equação dos modos. Os coeficientes a_r , b_r , c_r , d_r e β_r da Eq. (19) são função dos parâmetros do sistema, como demonstrado por Özgüner & Barbieri (1988).

Normalizando os modos segundo

$$\int_0^L \rho \cdot \phi_s \cdot \phi_r dx = \delta_{rs}, \quad (20)$$

$$\int_0^L \left(\frac{d^2 \phi_s}{dx^2} \right) \cdot \left(\frac{d^2 \phi_r}{dx^2} \right) dx = \frac{\omega_r^2}{E \cdot I_V} \cdot \delta_{rs}, \quad (21)$$

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 0, & r \neq s \\ 1, & r = s \end{cases}, \quad (22)$$

o problema da resposta reduz-se a

$$\frac{d^2\eta_r}{dt^2} + \omega_r^2 \cdot \eta_r = \tau \cdot \left(\frac{d\phi_r}{dx} \right)_{x=0} + F_E(l) \cdot \phi_r(l). \quad (23)$$

A resolução da Eq. (23) permite determinar as funções de tempo $\eta_r(t)$. Assim, os infinitos modos $\phi_r(x)$, expressos pela Eq. (18), e as respectivas funções $\eta_r(t)$, podem ser determinados.

3.2 Modelo da massa considerada isoladamente

Supõe-se que a aceleração normal da massa móvel sobre o braço é

$$a_N = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=l} + l \cdot \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right)_{x=l}, \quad (24)$$

isto é, igual à aceleração do ponto $x = l(t)$ do braço onde se localiza a massa no instante t . Considera-se reduzida a resultante das forças de direção tangencial (tais como forças de atrito e esforços diretos aplicados sobre o braço pela força atuante F). Deste modo, a componente normal da força exercida pelo braço sobre a massa é

$$-F_E(l) = -M \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=l} + l \cdot \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \right] = -M \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right)_{x=l}. \quad (25)$$

Conseqüentemente, a força $F_E(l)$, exercida pela massa móvel sobre o braço rotativo é expressa também pela Eq. (25), com o sinal trocado.

3.3 Manobra pré-determinada da massa móvel

Substituindo a Eq. (25) na Eq. (23), conclui-se que

$$\frac{d^2\eta_r}{dt^2} + \omega_r^2 \cdot \eta_r(t) = \tau \cdot \left(\frac{d\phi_r}{dx} \right)_{x=0} - M \cdot \phi_r(l) \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \phi_s(l) \cdot \frac{d^2\eta_s}{dt^2}. \quad (26)$$

Em uma manobra pré-especificada da massa, $l(t)$ é uma função conhecida. Como os modos são conhecidos, é possível determinar a resposta $\eta_r(t)$ no tempo como função direta de $l(t)$. Para p modos, a Eq. (26) reduz-se a um sistema matricial do tipo

$$\frac{d^2\eta_i}{dt^2} = -B(t) \cdot \omega_i^2 \cdot \eta_i + \tau \cdot B(t) \cdot \left(\frac{d\phi_i}{dx} \right)_{x=0}, \quad (27)$$

onde a matriz $B(t)$ é função do parâmetro M , dos modos naturais e da posição da massa, $l(t)$.

A Eq. (27) é a equação de controle do braço rotativo, quando o movimento da massa móvel é pré-especificado. Observa-se que $l(t)$ está implícita no estado do sistema, sendo $\tau(t)$, o torque aplicado ao cubo, a única variável de controle.

3.4 Controle em malha fechada em $\tau(t)$ e $l(t)$

Como se deduz da Eq. (27), o controle em malha fechada no torque e na posição da massa móvel requer determinar $\eta_r(t)$ como função explícita de $l(t)$, o que não é imediato, pois $\phi_r(x)$ não é uma função unívoca em $l(t)$. Para um determinado valor ótimo $\phi_r^0(x)$ de $\phi_r(x)$ que minimize a função objetivo do controlador, é evidente que há mais de uma posição $l(t)$ tal que

$$\phi_r(l(t)) = \phi_r^0(x). \quad (28)$$

Uma solução direta para este problema não é simples. Uma estratégia que permite contorná-lo é a determinação progressiva da manobra da massa, escolhendo a cada passo, dentre as diversas posições ótimas possíveis, aquela que se encontra mais próxima da posição imediatamente anterior. Trata-se, portanto, de uma solução numérica. Se l_i é a posição da massa no i -ésimo passo, então é possível determinar, através do controlador ótimo, um vetor ótimo $\phi^0(x)$, para o qual a função objetivo atinge seu ponto mínimo. Como os modos são conhecidos, é possível determinar os diversos valores $l_1, l_2, l_3, \dots, l_p$ que satisfazem a Eq. (28). Assume-se, então, que $l_{i+1} = l_j$, tal que

$$\|l_j - l_i\| \leq \|l_k - l_i\|, \text{ para todo } k = 1, 2, \dots, p. \quad (29)$$

Conhecida a posição inicial da massa sobre o braço, é possível determinar progressivamente a manobra ótima.

A obtenção de estratégias em malha fechada usando torque e posição da massa como variáveis de controle está em andamento e deverá ser publicada em breve (Oliveira, 1999).

4. SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

A simulação computacional de uma manobra em tempo mínimo foi implementada empregando o *software* MATLAB-SIMULINK. Nessa manobra, a massa móvel se desloca segundo trajetórias pré-especificadas, enquanto o braço gira de 0 a 180° no menor tempo possível, considerando limitações no torque. Um controlador LQR agindo sobre o torque externo foi projetado para girar o conjunto e tentar minimizar as vibrações induzidas.

Os valores dos parâmetros físicos estão indicados na Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros físicos para o sistema em análise

Parâmetros físicos	Nomenclatura	Valor	Unidade
Módulo de Young do braço	E	$7,1 \cdot 10^{10}$	Pa
Espessura do braço	h	0,001	m
Altura do braço	b	0,0254	m
Comprimento do braço	L	0,7	m
Densidade volumétrica do braço	ρ_v	2710	kg/m ³
Massa do braço	m	$\rho_v \cdot L \cdot b \cdot h$	kg
Densidade linear do braço	ρ	m / L	kg/m ²
Momento de inércia de área relativo ao eixo de rotação	I_v	$b \cdot h^3 / 12$	m ⁴
Massa móvel	M	0,01	kg

Foram selecionados os três primeiros modos de vibração para integrar o modelo.

A Fig. 2 ilustra a ação do controlador para um sistema mecânico composto somente pelo braço rotativo, sem massa acoplada. A malha é fechada apenas no torque $\tau(t)$. O controlador emprega a função LQE do MATLAB-SIMULINK, com parâmetros $Q=I_{3 \times 3}$ e $R=0,1$.

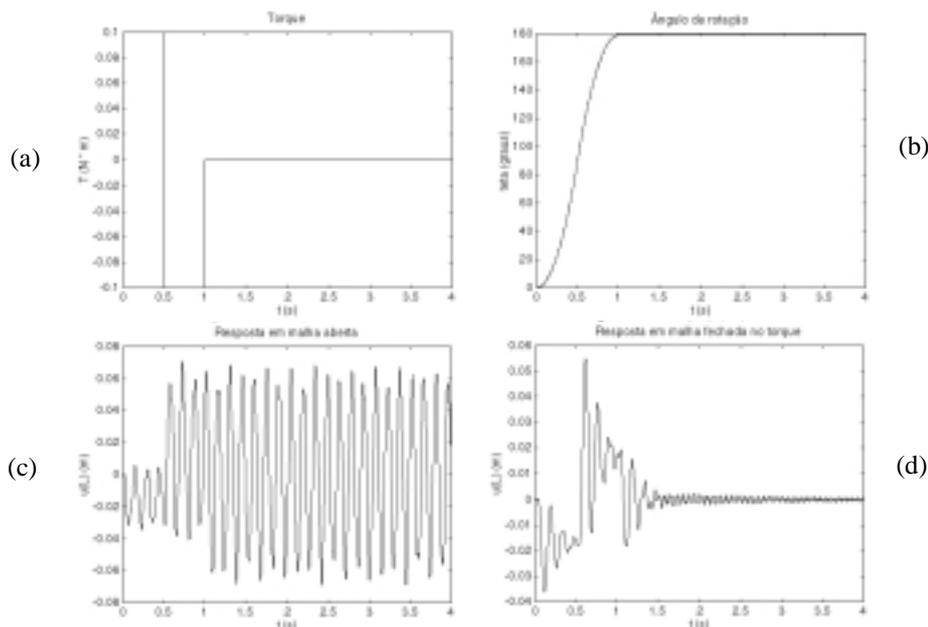


Figura 2 - Manobra de rotação do braço sem massa acoplada. (a): torque de entrada para controlador em malha aberta. (b): ângulo $\theta(t)$. (c): $u(L,t)$ em malha aberta. (d) $u(L,t)$ para controlador em malha fechada em $\tau(t)$.

As Fig. 3 e 4 ilustram a atenuação das vibrações do braço, devido ao movimento da massa segundo trajetórias pré-especificadas. No 1º caso, Fig. 3, a massa se desloca da extremidade livre para o cubo em 4 segundos, enquanto no 2º, Fig. 4, oscila entre as posições 0,42 e 0,56 m sobre o braço, com frequência de 4 Hz.

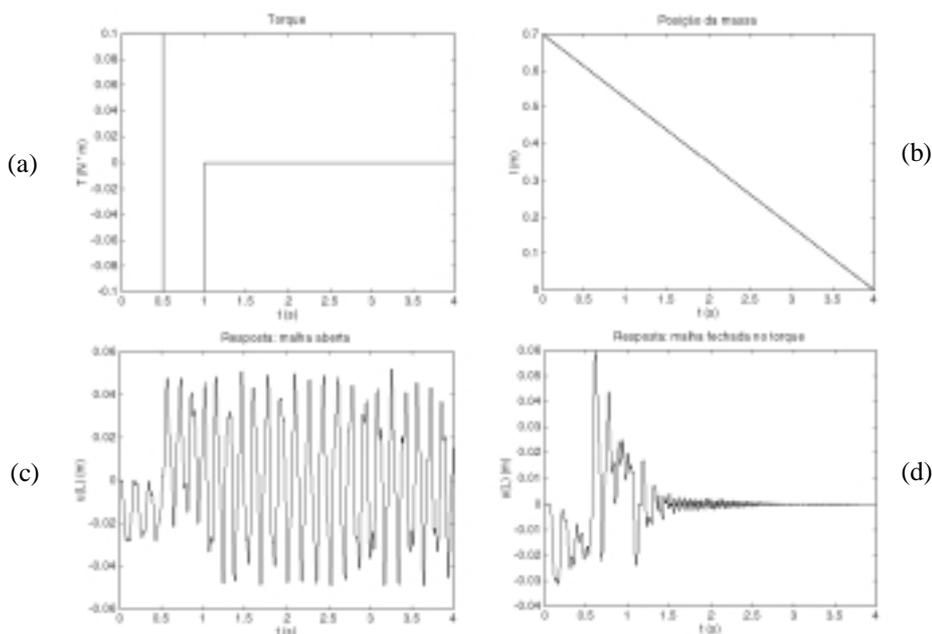


Figura 3 - Manobra de rotação do braço com massa acoplada seguindo a trajetória pré-especificada. (a): torque de entrada para controlador em malha aberta. (b): descolamento $l(t)$ da massa. (c): $u(L,t)$ em malha aberta. (d) $u(L,t)$ para controlador em malha fechada em $\tau(t)$.

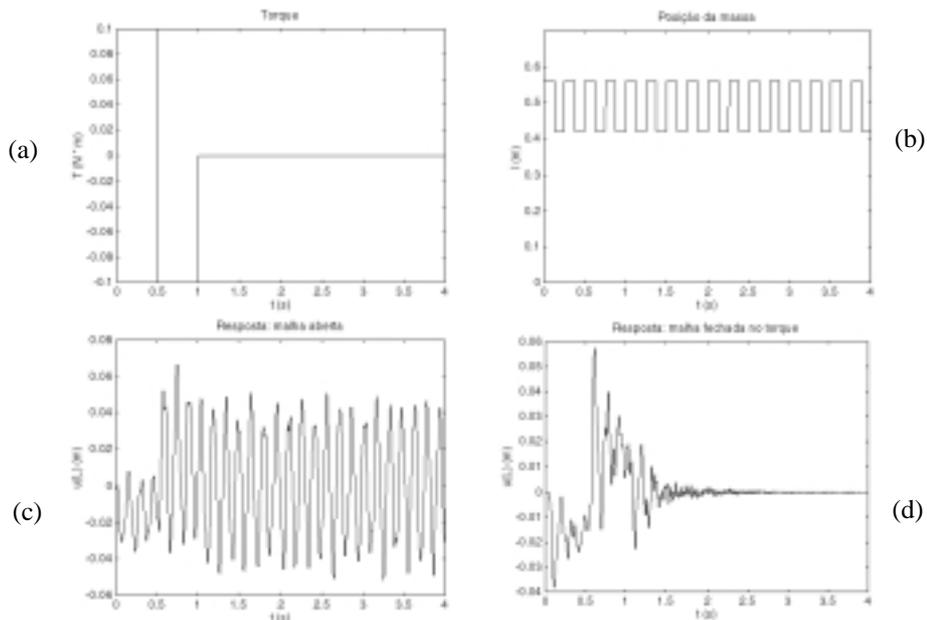


Figura 4 - Manobra de rotação do braço com massa acoplada seguindo a trajetória pré-especificada. (a): torque de entrada para controlador em malha aberta. (b): descolamento $l(t)$ da massa. (c): $u(L,t)$ em malha aberta. (d) $u(L,t)$ para controlador em malha fechada em $\tau(t)$.

Percebe-se nos gráficos uma diminuição razoável (cerca de 25%) nos picos em relação ao caso sem massa móvel, ainda que seu movimento não tenha sido projetado para isso.

5. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos permitem avaliar os efeitos dinâmicos de uma massa em movimento sobre as vibrações de um braço rotativo. A comparação com o caso de uma viga sem massa mostra que o movimento da massa acoplada pode exercer uma efetiva ação de controle sobre as vibrações induzidas. Desenvolvido o modelo do sistema, bastante complexo, outros casos estudados, mas não apresentados, indicam que a posição e a velocidade associadas ao movimento da massa estão diretamente ligadas à atenuação ou ao aumento das amplitudes de vibração do braço. As dificuldades matemáticas na resolução direta do problema de controle, entretanto, requerem a adoção de estratégias complicadas na determinação da posição ótima da massa, à medida que a manobra é executada. O projeto de estratégia de controle, como já ressaltado, deverá aparecer em futuro próximo.

REFERÊNCIAS

- Book., W.J., 1990, Modeling, design and control of flexible manipulator arms: a tutorial review, Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control, Honolulu, pp. 500-506.
- Meirovitch, L., 1980, Computational methods in structural dynamics, Alphen aan den Rijn Sijthoff, Noorthoof.
- Oliveira, F. R., 1999, Controle de vibrações de um braço rotativo flexível pelo movimento de uma massa sobre o braço, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil (em fase final).
- Özguner, Ü. & Barbieri, E., 1988, Unconstrained and constrained mode expansions for a flexible slewinglink, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, v. 110, n. 4, pp. 416-421.
- Simo, J. C. & Vu-Quoc, L., 1986, On the dynamics of flexible beams under large overall motions - The plane case, Journal of Applied Mechanics, v. 53, pp. 849-863.

VIBRATION CONTROL OF A ROTATING FLEXIBLE ARM THROUGH THE MOVEMENT OF A SLIDING MASS

Abstract. *The mathematical model of a flexible rotating arm carrying a sliding mass is deduced using the Hamilton's Principle. The resulting model is a coupled integro-differential system of equations, time and space variant due to changes in the inertia terms. Substructuring was used to circumvent some of the mathematical difficulties, considering the flexible beam and the moving mass separately. Applying then the Assumed Modes Method, a simpler model, suitable for control design, has been obtained. Two approaches are addressed for studying the mass movement. The first assumes that the mass trajectory over the arm is pre-specified and the external torque on the arm is the unique control variable. In the second approach, the mass position is used as a second control variable. This work presents results for the first approach considering a LQR regulator as the control strategy for the external torque. Strategies for the second approach are also discussed since the composed torque-mass position control seems to be a good alternative for vibration control of a rotating arm.*

Keywords: *flexible structures, dynamic modeling, control, rotating arms*