



ESTRATÉGIAS NUMÉRICAS PARA ANÁLISES GEOMETRICAMENTE NÃO-LINEARES

Ricardo A. M. Silveira

Gentil Rocha

Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, Campus Universitário (Morro do Cruzeiro), CEP: 35400-000, Ouro Preto, MG, Brasil
ricardo@em.ufop.br

Paulo B. Gonçalves

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)

Rua Marquês de São Vicente, 225 – Gávea, CEP: 22453-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
paulo@civ.puc-rio.br

***Resumo.** Este trabalho apresenta uma metodologia geral de solução de sistemas de equações algébricas não-lineares, que baseia-se no emprego do método dos elementos finitos junto com uma formulação Lagrangiana atualizada. Pretende-se então, implementar procedimentos numéricos que, associados às iterações usuais do tipo Newton, permitem alcançar respostas da estrutura além dos pontos críticos. Entre esses procedimentos, vale destacar a forma original linearizada do método do comprimento de arco e suas variações, que têm propiciado o desenvolvimento de estratégias de solução que diferem apenas na forma da restrição e na maneira como ela é forçada durante o processo iterativo.*

***Palavras-chave:** Análise não-linear, Estratégias de incremento de carga, Estratégias de iteração, Trajetórias de equilíbrio.*

1. INTRODUÇÃO

Tornar os sistemas estruturais mais econômicos através da redução do consumo de materiais, sem, contudo, diminuir a sua segurança e durabilidade, tem sido o principal objetivo da engenharia estrutural. Isto pode ser alcançado usando-se novos materiais e métodos de cálculo, racionalizando-se o uso dos materiais já existentes e, ultimamente, usando-se ferramentas gráficas e numéricas desenvolvidas a partir do emprego de computadores. O emprego desses procedimentos pode levar ao projeto de sistemas estruturais mais leves e, conseqüentemente, elementos estruturais mais esbeltos, tornando a consideração das não-linearidades e da estabilidade imprescindíveis no projeto estrutural.

A análise da estabilidade de elementos estruturais esbeltos através do MEF envolve, portanto, a solução de um sistema de equações algébricas não-lineares. Os métodos que procuram resolver essas equações passo a passo parecem ser os mais eficientes (Riks, 1979), em particular os procedimentos incrementais-iterativos. Em 1968 Mallet & Marcal utilizaram

iterações do tipo Newton-Raphson para uma análise não-linear, pois observaram a existência de possíveis erros na aproximação incremental durante a resolução do problema. Em Zienkiewicz & Taylor (1991) é apresentada uma modificação neste método, fazendo com que a matriz de rigidez seja atualizada apenas a cada passo de carga.

Uma dificuldade inerente a esse tipo de solução é que o método convencional de Newton-Raphson tem como estratégia a manutenção do parâmetro de carga, λ , constante durante o ciclo de iterações, de modo que a solução diverge próxima a pontos limites devido ao mau condicionamento da matriz de rigidez tangente, ou simplesmente porque para o nível de carga estabelecido não há solução. Com o propósito de resolver esses problemas de convergência, têm sido desenvolvidos procedimentos numéricos que, associados às iterações usuais do tipo Newton, permitem alcançar respostas da estrutura além dos pontos limites. Utilizando um "parâmetro de rigidez corrente" como indicador do grau de não-linearidade do sistema, Bergan *et al.* (1978) suprimiram as iterações de equilíbrio nas zonas críticas da trajetória, até os pontos limites serem ultrapassados. Em 1979 Batoz & Dhatt apresentaram uma técnica na qual o ciclo iterativo é realizado não à carga constante, mas a deslocamento constante (uma componente do vetor de deslocamentos é mantida constante durante o processo iterativo), o que permitiu obter pontos limite de carga, mas não de deslocamento. Também em 1979 Riks apresentou um método capaz de calcular pontos limites de carga e de deslocamento. Como base desse método, tem-se a introdução de um parâmetro que controla o progresso dos cálculos ao longo do caminho de equilíbrio. A restrição de controle proposta por Riks corresponde ao comprimento do arco da trajetória a ser computada. Esse comprimento de arco, Δl , é introduzido na análise por meio de uma equação auxiliar, ou de restrição, que é somada às equações de equilíbrio da estrutura.

Em 1984 Meek & Tan apresentaram um resumo das principais técnicas para se ultrapassar os pontos limites, das quais a técnica do comprimento de arco foi reconhecida como uma das mais eficiente. Contribuíram para o desenvolvimento dessa técnica: Ramm (1981) e Crisfield (1991 e 1997). Uma nova estratégia foi proposta por Krenk em 1995, introduzindo uma condição de ortogonalidade entre o resíduo da iteração corrente e o incremento de deslocamento correspondente. Os trabalhos de Bergan *et al.* (1978) e Den Heijer & Rheinboldt (1981) destacam-se por fornecerem diferentes estratégias de incremento de carga. Experiências computacionais mostraram que o sinal do determinante da matriz de rigidez tangente, \mathbf{K}_T , conforme sugerido por Crisfield (1981), pode ser tomado como um critério de sucesso na maioria dos casos para determinação do sinal do parâmetro inicial de carga, $\Delta\lambda^0$. Como relatado em Meek & Tan (1984), esse procedimento pode falhar em estruturas exibindo múltiplos autovalores negativos. Bergan *et al.* (1978) verificaram que os pontos limites da trajetória de equilíbrio poderiam ser detectados checando o sinal do incremento do trabalho externo. Em Clarke & Hancock (1990) é comentado que esse critério pode tornar-se inseguro na vizinhança de pontos limites de deslocamento.

Alves (1995) apresenta uma formulação teórica e técnicas numéricas para análise não-linear geométrica de sistemas estruturais, usando um Referencial Lagrangiano Atualizado (RLA), onde ao final de cada passo de carga o referencial é transferido para a nova configuração de equilíbrio recém calculada. Em 1995 Silveira apresentou uma estratégia numérica para resolver problemas não-lineares com restrições de contato. Nessa trabalho foram utilizados, juntamente com o método dos elementos finitos (MEF), técnicas de programação matemática. Silveira & Gonçalves (1997) verificaram a eficiência do método do comprimento de arco e suas variações (linear, cilíndrico e esférico) neste tipo de problema.

Deseja-se com este trabalho fornecer uma metodologia geral de solução de sistemas de equações algébricas não-lineares, que, num contexto computacional, pode ser resumida em duas etapas: (i) a partir de uma dada configuração de equilíbrio da estrutura é calculada uma solução incremental inicial; (ii) a seguir, esta solução é corrigida com iterações do tipo

Newton-Raphson até ser atingida a nova configuração de equilíbrio. Com o propósito de evitar problemas de convergência da solução próxima a pontos limites e de bifurcação, pretende-se implementar procedimentos numéricos que, associados às iterações usuais do tipo Newton, permitam alcançar respostas da estrutura além desses pontos críticos. São implementados nesse trabalho as seguintes estratégias de iteração: comprimento de arco cilíndrico (Crisfield, 1991), deslocamento constante (Powell & Simons, 1981) e norma mínima dos deslocamentos residuais (Chan, 1988). Essas e outras estratégias foram também implementadas por Clarke & Hancock (1990). Através da análise da estabilidade de dois arcos esbeltos, pretende-se estabelecer qual a melhor estratégia numérica para o traçado completo de uma trajetória de equilíbrio (curva carga-deslocamento), incluído pontos limites de carga ("*snap through*") e de deslocamento ("*snap back*").

2. METODOLOGIA DE SOLUÇÃO NÃO-LINEAR

O problema não-linear a ser resolvido pode ser expresso da seguinte forma:

$$f_{int}(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{R}_{ref} \quad (1)$$

onde \mathbf{f}_{int} é vetor das forças internas, função dos deslocamentos dos pontos nodais da estrutura \mathbf{u} , λ é o parâmetro de carga e \mathbf{R}_{ref} é o vetor de cargas de referência com magnitude arbitrária, já que apenas a sua direção é importante.

A solução da Eq. (1) é obtida de forma incremental, ou seja, para uma seqüência de incrementos do parâmetro de carga $\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2, \Delta\lambda_3, \dots$, são calculados a seguinte seqüência de incrementos de deslocamentos nodais $\Delta\mathbf{u}_1, \Delta\mathbf{u}_2, \Delta\mathbf{u}_3, \dots$. Como \mathbf{f}_{int} é uma função não-linear dos deslocamentos, a solução do problema não satisfaz a Eq. (1). Tem-se então uma força residual \mathbf{g} , que é definida dada por:

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{R}_{ref} - f_{int}(\mathbf{u}) \quad (2)$$

Os vários algoritmos existentes apresentam como passo fundamental a avaliação dessas forças residuais \mathbf{g} , e de uma nova estimativa para os deslocamentos através da relação:

$$\mathbf{K}_T \delta\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (3)$$

onde \mathbf{K}_T é a matriz de rigidez tangente e $\delta\mathbf{u}$ é o vetor de deslocamentos residuais. A diferença entre as várias técnicas para a resolução da eq. (1) está na estratégia usada para se obter incrementos de carga e de deslocamentos. Uma das estratégias usada nesse trabalho é baseada no emprego da técnica do comprimento de arco constante, que consiste em adicionar à Eq. (1) a seguinte restrição:

$$\Delta\mathbf{u}^T \Delta\mathbf{u} + \Delta\lambda^2 \mathbf{R}_{ref}^T \mathbf{R}_{ref} = \Delta l^2 \quad (4)$$

onde Δl é o comprimento de arco da trajetória de equilíbrio. A adição de (4) ao sistema permite que se faça ajuste no parâmetro de carga λ durante o ciclo iterativo, e dessa forma ultrapassar possíveis pontos limites. Um novo estado de equilíbrio é estabelecido, após a realização de uma série de iterações. A iteração k fornece os subincrementos $\delta\lambda$ e $\delta\mathbf{u}$, e portanto após essa iteração o incremento total é escrito da seguinte forma:

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad \text{e} \quad \Delta\mathbf{u}^k = \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^k \quad (5)$$

Num contexto computacional, é vantajoso introduzir a equação de restrição seguindo as duas etapas de solução apresentadas a seguir:

1. A partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, é selecionado um incremento de carga, definido aqui como incremento inicial do parâmetro de carga — $\Delta\lambda^0$ —, procurando satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema. Após a seleção de $\Delta\lambda^0$, determina-se o incremento inicial dos deslocamentos nodais $\Delta\mathbf{u}^0$. As aproximações $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{u}^0$ caracterizam a chamada **solução incremental predita**. Os detalhes desta etapa de solução são fornecidos na seção seguinte;
2. Na segunda etapa de solução, procura-se, através de uma dada estratégia de iteração, corrigir a solução incremental inicialmente proposta na etapa anterior, com o objetivo de restaurar o equilíbrio da estrutura o mais rápido possível. Se as iterações realizadas envolvem não só os deslocamentos \mathbf{u} , mas também o parâmetro de carga λ , então uma equação adicional de restrição é requerida. A forma desta equação de restrição é o que distingue as várias estratégias de iteração. Na Seção 4 são apresentadas algumas estratégias de iteração implementadas nesse trabalho.

Um resumo dos procedimentos descritos nessa seção é apresentado na Fig. 1.

-
1. Configuração inicial: ${}^\omega\mathbf{u}$ e ${}^\omega\lambda$
 2. Definição da solução predita: $\Delta\lambda^0$ e $\Delta\mathbf{u}^0$
usando: $\mathbf{K}_T \delta\mathbf{u}_T = \mathbf{R}_{\text{ref}}$ e $\Delta\mathbf{u}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{u}_T$ (6)

onde: $\delta\mathbf{u}_T$ = vetor de deslocamentos tangenciais

3. Iterações - *problema de equilíbrio*: $k = 1, 2, \dots, I_{\text{máx}}$

4. Verifica a convergência: $\zeta_1 = \|\mathbf{g}^{(k-1)}\| / \|\Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{R}_{\text{ref}}\| \leq \zeta$?

Sim: pare o ciclo de iterações, siga para o passo 7.

- Não: calcule $\delta\mathbf{u}^k = \delta\mathbf{u}_g^k + \delta\lambda^k \delta\mathbf{u}_R^k$, (7)

onde: $\delta\mathbf{u}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)}$ e $\delta\mathbf{u}_R^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)} \mathbf{R}_{\text{ref}}$

5. Atualização das variáveis:

- i. incrementais: $\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k$ e $\Delta\mathbf{u}^k = \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^k$ (8)

- ii. totais: ${}^{\omega+\Delta\omega}\lambda^k = {}^\omega\lambda + \Delta\lambda^k$ e ${}^{\omega+\Delta\omega}\mathbf{u}^k = {}^\omega\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^k$

6. Retorne ao passo 3

7. Faça novo incremento de carga e recomece o processo
-

Figura 1 - Solução para um incremento de carga.

3. ESTRATÉGIAS DE INCREMENTO DE CARGA

A obtenção da solução incremental inicial tem como passo fundamental a definição do parâmetro de carga inicial $\Delta\lambda^0$. A seleção automática do incremento desse parâmetro deve refletir o grau de não-linearidade corrente do sistema, isto é, deve fornecer grandes incrementos quando a resposta da estrutura for quase linear e levar à pequenos incrementos quando a resposta da estrutura for fortemente não-linear. Além disto, o algorítmico deve ser capaz de escolher o sinal correto para o incremento, introduzindo medidas capazes de detectar quando pontos de máximo e mínimo são ultrapassados.

Crisfield (1991) e Ramm (1982) sugeriram estratégias de incremento automático de carga e de outros parâmetros (deslocamento, comprimento de arco, trabalho externo) baseadas na relação: $(I_d / I_{p,a})^\xi$; onde, I_d é o número de iterações desejadas para convergência do processo iterativo corrente, especificado pelo usuário, $I_{p,a}$ é o número de iterações que foram necessárias para convergência no passo anterior e ξ é um expoente cujo valor encontra-se usualmente entre 0.5 e 1.0. Duas estratégias baseadas nessa relação serão descritas a seguir.

A relação anterior pode ser empregada na definição do incremento do comprimento de arco a ser adotado como parâmetro de controle no passo de carga corrente, ou seja:

$$\Delta l = \Delta l_{p,a} (I_d / I_{p,a})^{1/2} \quad (9)$$

onde $\Delta l_{p,a}$ e Δl representam os incrementos do comprimento de arco no passos de carga anterior (valor conhecido) e no passo de carga corrente (incógnita), respectivamente.

Através da condição de restrição escrita para a solução incremental inicial,

$$\Delta \mathbf{u}^{0T} \Delta \mathbf{u}^0 = \Delta l^2 \quad (10)$$

onde é desprezado o termo do carregamento, chega-se, substituindo-se a Eq. (6) em (10), à expressão do incremento inicial do parâmetro de carga:

$$\Delta \lambda^0 = \pm \Delta l / \sqrt{\delta \mathbf{u}_T^T \delta \mathbf{u}_T} \quad (11)$$

Caso seja adotado o método baseado no controle de deslocamento, o incremento de uma dada componente do vetor de deslocamentos da estrutura deve ser escolhido com o objetivo de limitar o incremento inicial do parâmetro de carga. Como na técnica do comprimento de arco, pode-se calcular o incremento de uma dada componente j do vetor de deslocamentos para o passo corrente de carga de acordo com:

$$\Delta u_j = \Delta u_{j(p,a)} (I_d / I_{p,a})^{1/2} \quad (12)$$

onde $\Delta u_{j(p,a)}$ e Δu_j são os incrementos da componente j do vetor deslocamento no passo de carga anterior e no passo de carga corrente, respectivamente. Tem-se, então, que a componente j da solução incremental predita, $\Delta \mathbf{u}^0$, deve satisfazer à seguinte relação:

$$\Delta \mathbf{u}^0(j) = \Delta u_j \quad (13)$$

Usando-se a Eq. (6) em (13) chega-se à expressão procurada para $\Delta \lambda^0$, ou seja:

$$\Delta \lambda^0 = \Delta u_j / \delta \mathbf{u}_T(j) \quad (14)$$

4. ESTRATÉGIAS DE ITERAÇÃO

O parâmetro de carga iterativo, $\delta \lambda$, é função da estratégia de iteração, ou equação de restrição escolhida. Não se pode esperar de nenhuma estratégia a mesma eficiência na resolução de problemas fortemente não-lineares. Procurando, então, uma maior flexibilidade

na escolha da estratégia de solução, foram implementadas no programa aqui desenvolvido os seguintes métodos: iteração a deslocamento constante; iteração a comprimento de arco constante; iteração com base na norma mínima dos deslocamentos residuais.

4.1 Iteração a deslocamento constante

Powell & Simons (1981) estabeleceram uma estratégia incremental-iterativa baseada nos seguintes procedimentos:

1. na solução incremental predita, uma dada componente j do vetor de deslocamentos é acrescida de uma certa quantidade especificada, conforme Eq. (12);
2. essa componente, entretanto, é mantida constante durante as iterações subseqüentes, de modo que a seguinte equação de restrição deve ser respeitada:

$$\delta \mathbf{u}^k(j) = \delta \mathbf{u}_g^k(j) + \delta \lambda^k \delta \mathbf{u}_R^k(j) = 0 \quad (15)$$

Resolvendo-se, então, a equação acima para $\delta \lambda^k$, chega-se a:

$$\delta \lambda^k = -\delta \mathbf{u}_g^k(j) / \delta \mathbf{u}_R^k(j) \quad (16)$$

4.2 Iteração a comprimento de arco constante

Crisfield (1981) e Ramm (1982) observaram, através de vários exemplos numéricos, que, em problemas práticos com número elevado de variáveis, o "termo de carga" da Eq. (4) era desprezível. Crisfield então propôs, que, a cada iteração, a seguinte equação simplificada:

$$\Delta \mathbf{u}^{kT} \Delta \mathbf{u}^k = \Delta l^2 \quad (17)$$

Usando as Eqs. (8) e (7) em (17), chega-se a uma equação quadrática em $\delta \lambda$, ou seja:

$$A \delta \lambda^2 + B \delta \lambda + C = 0 \quad (18)$$

onde, $A = \delta \mathbf{u}_R^{kT} \delta \mathbf{u}_R^k$; $B = 2 \delta \mathbf{u}_R^{kT} (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k)$; e

$$C = (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k)^T (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k) - \Delta l^2.$$

Com a resolução da Eq. (18), chega-se a dois valores de $\delta \lambda$, $\delta \lambda_1$ e $\delta \lambda_2$, de forma que deve-se escolher entre as soluções:

$$\Delta \mathbf{u}_1^k = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k + \delta \lambda_1^k \delta \mathbf{u}_R^k \quad \text{e} \quad \Delta \mathbf{u}_2^k = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k + \delta \lambda_2^k \delta \mathbf{u}_R^k \quad (19)$$

aquela que mais se aproxima da solução incremental da iteração anterior, $\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}$. Essa escolha deve prevenir que a solução regrida ao longo do caminho já calculado. Um procedimento simples a ser seguido, e que foi implementado nesse trabalho, consiste em se achar o menor ângulo entre $\Delta \mathbf{u}^k$ e $\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}$. Isso equivale a achar o máximo cosseno do ângulo:

$$\cos \theta_{1,2} = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)T} \Delta \mathbf{u}^k / \Delta l^2 = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)T} (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^k) / \Delta l^2 + \delta \lambda_{1,2} \Delta \mathbf{u}^{(k-1)T} \delta \mathbf{u}_R^k / \Delta l^2 \quad (20)$$

Como (18) é uma equação quadrática, ela poderá ter raízes imaginárias se B^2-4AC for menor que zero. Essa situação pode existir quando o incremento inicial do parâmetro de carga for grande, ou se a estrutura exibir múltiplos caminhos de equilíbrio (Meek & Tan, 1984).

4.3 Iteração a norma mínima dos deslocamentos residuais

Chan (1988) apresentou uma estratégia onde, ao invés de se usar restrições geométricas e de energia, elimina-se diretamente os deslocamentos residuais (deslocamentos iterativos, $\delta \mathbf{u}^k$) em função das forças desequilibradas. O procedimento fornece a norma mínima dos deslocamentos residuais a cada iteração (Método dos Deslocamentos Residuais - MDR).

Para implementar o MDR, deve-se rescrever a componente j do vetor de deslocamentos $\delta \mathbf{u}^k$, numa dada iteração k , na forma:

$$e_j^k = \delta \mathbf{u}(j) = \delta \mathbf{u}_g^k(j) + \delta \lambda^k \delta \mathbf{u}_R^k(j) \quad (21)$$

onde e_j é definido como um dado erro. A condição de mínimos quadrados desse erro, para um sistema de m graus de liberdade, pode ser expressa por:

$$d\left(\sum_{j=1}^m (e_j^k)^2\right) / d\delta \lambda^k = 0 \quad (22)$$

A equação anterior é equivalente à condição da norma mínima dos deslocamentos residuais, escrita numa forma mais adequada como:

$$d\left[\delta \mathbf{u}^{kT} \delta \mathbf{u}^k\right] / d\delta \lambda^k = 0 \quad (23)$$

Substituindo, então, a Eq. (7) em (23), e derivando essa com relação a $\delta \lambda^k$, chega-se a:

$$\delta \lambda^k = -\delta \mathbf{u}_R^{kT} \delta \mathbf{u}_g^k / (\delta \mathbf{u}_R^{kT} \delta \mathbf{u}_R^k) \quad (24)$$

5. EXEMPLOS

Dois exemplos são analisados nesta seção: um arco abatido e um arco pouco abatido. Essas análises são feitas usando-se o modelo de elemento finito não-linear proposto por Alves (1995) para sistemas estruturais reticulados planos e o método de Newton-Raphson modificado acoplado às estratégias fornecidas na Tabela 1.

Tabela 1. Estratégias de solução.

	Incremento de Carga	Iteração
Estratégia 1: CD	Eq. (14): $\Delta \lambda^0 = \Delta u_j / \delta \mathbf{u}_T(j)$	Eq. (16): $\delta \lambda^k = -\delta \mathbf{u}_g^k(j) / \delta \mathbf{u}_R^k(j)$
Estratégia 2: CA	Eq. (11): $\Delta \lambda^0 = \pm \Delta l / \sqrt{\delta \mathbf{u}_T^T \delta \mathbf{u}_T}$	Eq. (18): $A\delta \lambda^{k^2} + B\delta \lambda^k + C = 0$
Estratégia 3: MD	Eq. (11): $\Delta \lambda^0 = \pm \Delta l / \sqrt{\delta \mathbf{u}_T^T \delta \mathbf{u}_T}$	Eq.(24): $\delta \lambda^k = -\delta \mathbf{u}_R^{kT} \delta \mathbf{u}_g^k / (\delta \mathbf{u}_R^{kT} \delta \mathbf{u}_R^k)$

A Figura 2 fornece a trajetória de equilíbrio do arco abatido ($h/L = 0,02$). Os resultados obtidos pelo presente trabalho, usando a Estratégia 2: CA, são comparados com aqueles de Bergan (1980). Foram utilizados 8 elementos finitos na modelagem de apenas metade do arco. Na Tabela 2 é feita uma comparação entre as diferentes estratégias implementadas nesse trabalho. Bergan (1980) encontrou os seguintes valores para a carga p e o deslocamento do ponto central do arco: $p = 0,35$ e $v/h = 0,52$ (1º Ponto Limite); $p = 0,08$ e $v/h = 1,47$ (2º Ponto Limite). Outros parâmetros relevantes empregados na solução numérica deste trabalho são destacados: incremento inicial do parâmetro de carga: $\Delta\lambda_1^0 = 0,25$; número de iterações desejadas: $I_d = 5$; e tolerância: $\zeta = 10^{-3}$; número máximo de iterações: 21.

Observe, através da Tabela 2, a eficiência computacional das estratégias numéricas implementadas nesse trabalho, onde se destaca a Estratégia 1: Controle de Deslocamentos. Com apenas 6 passos de carga se chegou ao primeiro ponto limite; já o segundo ponto limite foi alcançado com 19 passos de carga. O tempo de processamento nessa tabela está relacionado ao uso de um Pentium II 300 MHz, com 64 Mbytes de memória RAM.

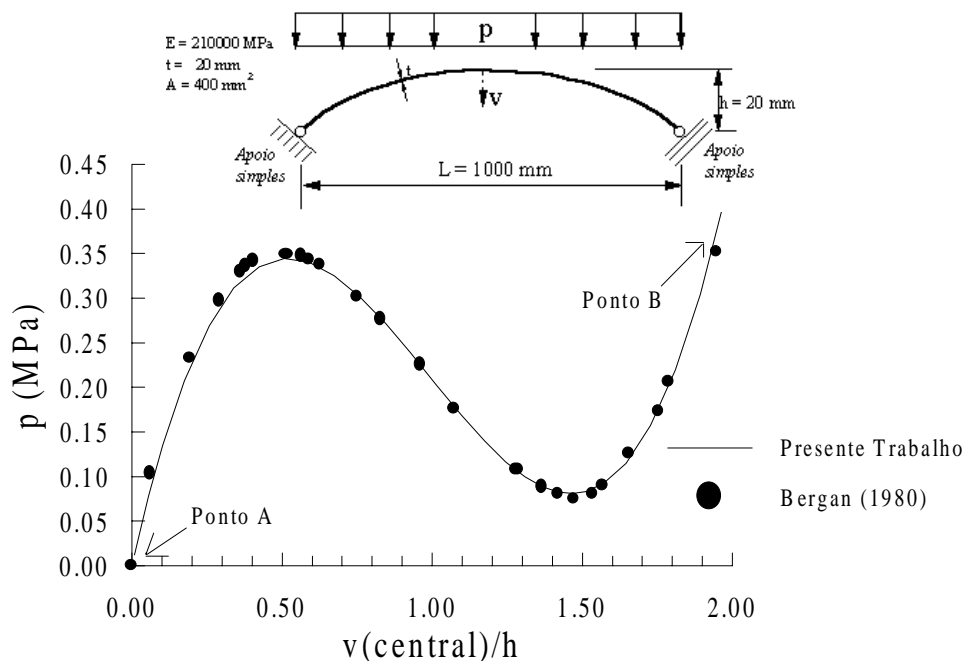


Figura 2 – Trajetória de equilíbrio do arco abatido.

Tabela 2. Estratégias de solução para o arco abatido.

Estrat.	1º PL: p	1º PL: v	2º PL: p	2º PL: v	NPC: AB	t(s): AB
1: CD	0,34	0,50	0,08	1,48	25	2,3
2: CA	0,34	0,51	0,08	1,47	47	7,8
3: MD	0,34	0,51	0,08	1,47	47	7,6

Obs. PL = ponto limite; NPC = número de passos de carga; t(s) = tempo em segundos.

Os resultados da análise do arco pouco abatido ($h/L = 0,25$) são apresentados na Fig. 3 e Tabela 3. Na Fig. 3 são mostrados os caminhos de equilíbrio considerando os casos de deformação simétrica (ponto limite, trajetória primária) e assimétrica (ponto de bifurcação, trajetória secundária). No caso de deformação simétrica foram considerados 16 elementos para metade do arco; para obtenção da resposta pré e pós-bifurcação do arco, utilizou-se um modelo estrutural completo discretizado com 32 elementos finitos. As coordenadas dos pontos nodais desses elementos foram então desviadas de suas posições originais (perfeita) introduzindo-se pequenas perturbações aleatórias.

A Figura 3 indica boa concordância dos resultados obtidos neste trabalho, usando a Estratégia 1: CD, com aqueles extraídos da literatura (Meek, 1991). Na Tabela 3 pode ser visto o desempenho computacional das estratégias de iteração implementadas. Mais uma vez destaca-se o emprego da estratégia que utiliza controle de deslocamento. O tempo computacional, bem como o número de passos de carga, estão relacionados com o caso de deformação simétrica (trajetória primária, ponto A até ponto B).

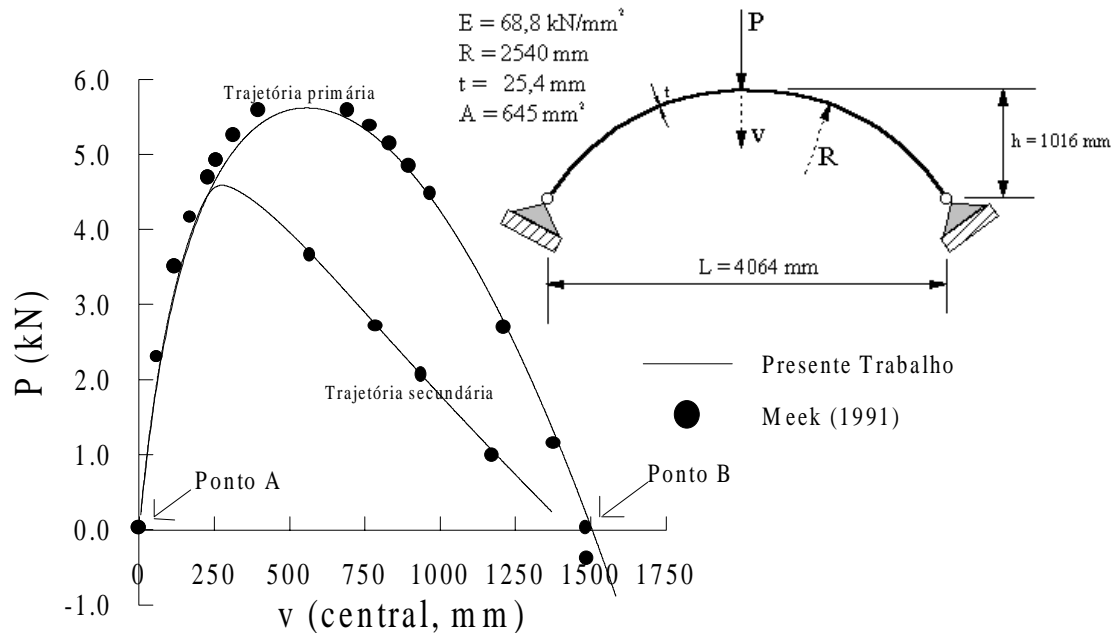


Figura 3 – Trajetórias de equilíbrio do arco pouco abatido.

Tabela 3. Estratégias de solução para o arco pouco abatido.

Estrat.	PL: P	PL: v	PB: P	PB: v	NPC: AB	t(s): AB
1: CD	5,62	556,26	4,59	272,04	725	201
2: CA	5,62	555,73	4,59	273,73	7134	2079
3: MD	5,62	555,74	4,59	273,76	7134	2193

Obs. PB = ponto de bifurcação.

Agradecimentos

Os autores são gratos pelo suporte financeiro recebido da CAPES, CNPq e USIMINAS.

REFERÊNCIAS

- Alves, R.V., 1995, Instabilidade não-linear elástica de estruturas reticuladas espaciais, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.
- Batoz, J.L. & Dhatt, G., 1979, Incremental displacement algorithms for nonlinear problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 14, pp. 1262-1267.
- Bergan, P. G., Horrigmoe, G., Krakeland, B. & Soreide, T., 1978, Solution Techniques for Non-Linear Finite Element Problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 12, pp. 1677-1696.
- Bergan, P.G., 1980, Solution algorithms for nonlinear structural problems, *Computers & Structures*, vol. 12, pp. 497-509.

- Chan, S.L., 1988, Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 26, pp. 2657-2669.
- Clarke, M.J. & Hancock, M.J., 1990, .A study of incremental-iterative strategies for non-linear analyses, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 29, pp. 1365-1391.
- Crisfield, M.A., *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids And Structures*, 1991, vol. 1, John Wiley & Sons.
- Crisfield, M.A., 1997, *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids And Structures*, vol. 2, John Wiley & Sons.
- Den Heijer, C. & Rheinboldt, W.C., 1981, On steplength algorithms for a class of continuation methods, *SIAM J. Num. Analysis*, vol. 18, pp. 925-948.
- Krenk, S., 1995, An orthogonal residual procedure for non-linear finite element equations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 38, pp. 823-839.
- Mallett, R.H. & Marcal, P.V., 1968, Finite element analysis of nonlinear structures, *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE*, vol. 94, No. ST9, pp. 2081-2103.
- Meek, J.L., 1991, *Computer Methods in Structural Analysis*, E & FN SPON, Chapman & Hall.
- Meek, J.L. & Tan, H.S., 1984, Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 47, pp. 261-282.
- Powell, G. & Simons, J., 1981, Improved iteration strategy for nonlinear structures, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 17, pp. 1455-1467.
- Ramm, E., 1982, The Riks/Wempner approach - an extension of displacement control method in non-linear analysis, non-linear computational mechanics, ed. E. Hinton *et al.*, Pineridge, Swansea, pp. 63-86.
- Riks, E., 1979, An Incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, *Int. J. Solids Structures*, vol. 15, pp. 529-551.
- Silveira, R.A.M., 1995, Análise de elementos estruturais esbeltos com restrições unilaterais de contato, Tese de Doutorado, PUC-RJ, Rio de Janeiro.
- Silveira, R.A.M. & Gonçalves, P.B., 1997, Solução de sistemas de equações não-lineares - o método do comprimento de arco, XXVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, São Carlos/SP.
- Zienkiewicz, O.C. & Taylor, R.L., 1991, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill Book Company (UK), vol. 2.

NUMERICAL STRATEGIES FOR GEOMETRICALLY NON-LINEAR ANALYSIS;

Summary. This paper is concerned with the development of a general methodology for the solution of systems of non-linear algebraic equations. The finite element method together with an up-dated Lagrangian formulation is used to discretize the structure. The aim is to implement and compare various numerical procedures that, associated with the usual iterations of Newton type, allows one to obtain the response of the structure beyond critical points. Among the most effective numerical procedures, it is worth to mention the linear form of the arch-length method and its variations, the minimum unbalanced displacement norm technique and the displacement control method.

Word-key: Non-linear analysis, Load incrementation strategies, Iterative strategies, Equilibrium path.