

ANÁLISE DO PROCESSO DE CONVECÇÃO NATURAL EM CAVIDADES ANULARES

Vicente L. Scalon

Alcides Padilha

UNESP-Campus de Bauru, FE/DEM

C.P. 473 - 17033-360 - Bauru, SP, Brasil.

Kamal A. R. Ismail

UNICAMP, FEM, DETF

C.P. 6122 - 13083-970, Campinas, SP, Brazil

Resumo. Este artigo apresenta o estudo da convecção natural no interior de uma cavidade, formada pela secção transversal anular entre dois cilindros concêntricos, para várias razões dos raios internos e externos, considerando o número de Rayleigh baseado no raio interno como constante e igual a 10^3 . A solução das equações diferenciais parciais é obtida aplicando o método dos elementos finitos com aproximação de mesma ordem para o campo de velocidades e pressões ao problema e resolvendo o sistema de equações resultantes de forma simultânea. Os resultados obtidos foram comparados com um outro resultado numérico e uma boa concordância foi verificada. Gráficos com resultados para diversas relações entre raio externo e interno (R_e/R_i) são apresentados e discutidos.

Palavras Chave: Convecção Natural, Geometria Anular, Elementos Finitos

1. INTRODUÇÃO

O estudo da convecção natural no espaço anular entre cilindros concêntricos, horizontais, mantendo as superfícies interna e externa à temperaturas constantes ou não, constitui-se num tópico de pesquisa atual e de aplicações importantes no campo da engenharia, tais como, em sistemas de estocagem de energia térmica, resfriamento de componentes eletrônicos, cabos de transmissão e trocadores de calor compactos.

Trabalhos teóricos e experimentais tem sido desenvolvidos e muitos destes como modelos de cavidades bidimensionais, no interior de regiões anulares, cilíndricas, assumindo comprimento infinito para o cilindro, de modo que a convecção é estudada somente no plano transversal. No trabalho de YOO (1998), a dependência da convecção natural com o número de Prandtl, para uma geometria anular, bidimensional, cilíndrica e horizontal, é apresentada pelo com-

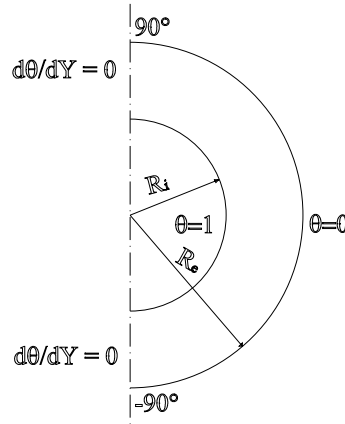


Figura 1: Esquema do problema anular.

portamento da estabilidade transiente para números de $Pr \geq 0,2$ e $Pr \leq 0,3$, assim como o comportamento do número de Nusselt médio (Nu_{med}) em função do número de Grashoff.

Embora estudos sobre convecção natural, uni e bidimensional, estejam ainda em pleno desenvolvimento, já se encontra disponível na literatura alguns trabalhos tridimensionais, como é o caso do estudo de CHARRIER-MOJTABI (1997), que considera uma região cilíndrica, horizontal, porosa e aquecida na superfície de entrada, apresenta o comportamento do número de Nusselt médio, em função do número de Rayleigh (Ra) para os fluxos bi e tridimensional.

O estudo numérico apresentado por IYER & VAFI (1997), mostra a influência da geometria sobre o fluxo tridimensional e a transferência de calor na cavidade anular com paredes impermeáveis. É obtido um diagrama de Nu_{med} em função de Ra e uma correlação do Nu_{med} em função de Ra , Pr e outros parâmetros, para $10^3 \leq Ra < 10^4$ e $0,7 \leq Pr \leq 100$.

GUJ & STELLA (1995), apresentam o comportamento térmico e fluidodinâmico de uma região anular, bidimensional entre cilindros concêntricos, para $R_e/R_i = 2,36$, em condições de regime permanente e laminar, para $Pr = 0,71$, $0,53 \times 10^4 \leq Ra \leq 8,27 \times 10^4$ e excentricidade $0 \leq e \leq 1$. Os resultados numéricos concordam com os dados experimentais de WANG & BAU (1988), para excentricidade nula ($e = 0$).

Neste trabalho é apresentada uma solução para o coeficiente de troca de calor entre a superfície interna e a externa de um anel preenchido com ar, como mostrado na Fig. (1). É estudado também a influência da relação entre os diâmetros sobre o coeficiente de transmissão de calor, assim como a variação do coeficiente de película para as diversas posições angulares. Neste aspecto é importante ressaltar que as posições angulares foram convencionadas de acordo com as posições mostradas na Fig. (1).

O problema assim descrito pode ser resolvido utilizando uma formulação numérica, estabelecendo suas condições de contorno e, principalmente, atentando para o fato de que, pela existência da simetria, não existe a necessidade de se resolver a geometria completa.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema de convecção natural em cavidades cilíndricas é normalmente um problema complexo para ser resolvido através de técnicas numéricas que se utilizam de malhas ortogonais. Isto ocorre porque, se por um lado, a geometria pode ser facilmente expressa através de

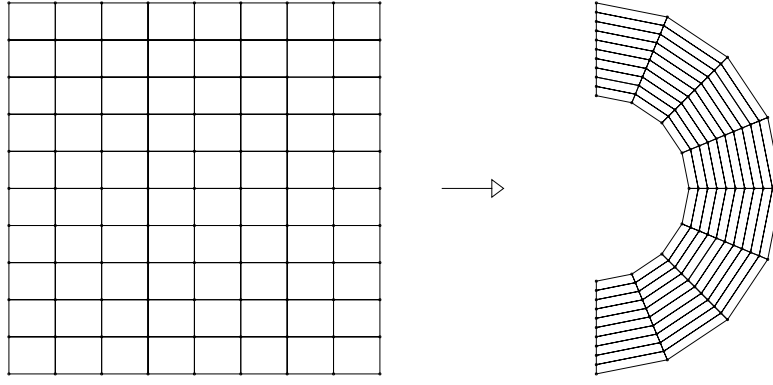


Figura 2: Transformação do domínio utilizada para gerar a malha do problema.

coordenadas cilíndricas, por outro, a direção da gravidade aparece como sendo um complicador que precisaria ser expressa através de seus componentes nas direções r e θ . No entanto, quando se trabalha com técnicas que não requerem malhas ortogonais, como no caso de elementos finitos, a formulação do problema é bastante simplificada, necessitando apenas de uma técnica de geração de malha para expressar a geometria do problema. Para a solução proposta neste caso foi utilizada uma técnica de mapeamento, denominada por *transfinite mappings*, onde a malha é gerada a partir de uma malha quadrada, simples, contruída a partir de pontos do contorno do domínio. A Fig. (2) apresenta um exemplo da malha original e da malha transformada para este caso.

Com a malha adequada para o problema a próxima etapa passa a ser a discretização das equações. A discretização do campo de velocidades depende da solução das equações de Navier-Stokes, bidimensional e para um fluido incompressível, juntamente com as equações da conservação da massa e da energia, necessárias neste caso. Estas expressões são dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + S_x \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + S_y \quad (3)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c v \frac{\partial T}{\partial y} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + S_e \quad (4)$$

onde o termo fonte da equação da quantidade de movimento pode incluir os efeitos de variação de densidade que é força motriz do escoamento natural.

Esta equação foi resolvida na forma adimensional, utilizando os seguintes parâmetros:

$$X = \frac{x}{R_i}; \quad Y = \frac{y}{R_i}; \quad U = \frac{u R_i}{\alpha}; \quad V = \frac{v R_i}{\alpha}; \quad P = \frac{p}{\rho} \left(\frac{R_i}{\alpha} \right)^2; \quad (5)$$

$$\theta = \frac{T - T_i}{(T_e - T_i)}; \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}; \quad \text{Ra}_{R_i} = \frac{g \beta (T_e - T_i) R_i^3}{\nu^2} \text{Pr}; \quad \tau = \text{Fo} = \frac{\alpha t}{R_i^2}.$$

Utilizando-se estes parâmetros, a expressão que inclui a aproximação de Boussinesq para convecção natural e a consideração de que a gravidade atua na direção y , é possível reescrever as equações básicas na forma:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \text{Ra}_{Ri} \text{Pr} \theta \quad (8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (9)$$

Estas equações adimensionais são resolvidas através de uma formulação por elementos finitos que inclui o tratamento dos termos fontes, como proposto por SCALON (1998).

Assim, aplicando as técnicas de elementos finitos com uma aproximação por Galerkin, as Eqs. (7) a (9) são discretizadas, resultando em:

$$\left(\frac{1}{\Delta \tau} [M] + [C] + \text{Pr} [K] \right) \{U\} = \frac{1}{\Delta \tau} [M] \{U^0\} + \{S_x\} - [M] \frac{\partial P}{\partial X} + \text{Pr} \int_{\Gamma} N_i \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma \quad (10)$$

$$\left(\frac{1}{\Delta \tau} [M] + [C] + \text{Pr} [K] \right) \{V\} = \frac{1}{\Delta \tau} [M] \{V^0\} + \{S_y\} - [M] \frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Pr} \int_{\Gamma} N_i \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma \quad (11)$$

$$\left(\frac{1}{\Delta \tau} [M] + [C] + [K] \right) \{\theta\} = \frac{1}{\Delta \tau} [M] \{\theta^0\} + \{S_e\} + \int_{\Gamma} N_i \frac{\partial \theta}{\partial n} d\Gamma \quad (12)$$

onde o superescrito 0 representa o campo do instante anterior e os valores das matrizes $[M]$, $[C]$, $[K]$ e $\{S\}$ são dados por:

$$[M] = \int_{\Omega} N_i d\Omega \quad (13)$$

$$[C] = \int_{\Omega} \left(N_k U_k N_i \frac{\partial N_j}{\partial X} + N_k V_k N_i \frac{\partial N_j}{\partial Y} \right) d\Omega \quad (14)$$

$$[K] = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial N_j}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial N_j}{\partial Y} \right) d\Omega \quad (15)$$

$$\{S\} = \int_{\Omega} N_i d\Omega S_i \quad (16)$$

A equação da continuidade não foi discretizada, pois será utilizada para a obtenção do campo de pressões. Para tanto, é necessário que se obtenha expressões para o campo de pressões

a partir das equações da quantidade de movimento, Eqs. (10) e (11). Isto é obtido a partir de expressões de U_i e V_i em cada uma das equações:

$$a_{i,i}U_i = - \sum_{j \neq i} a_{i,j}U_j - b_i \frac{\partial P}{\partial X} + s_i^{p,x}$$

$$a_{i,i}V_i = - \sum_{j \neq i} a_{i,j}V_j - b_i \frac{\partial P}{\partial Y} + s_i^{p,y}$$

que, por praticidade, podem ser escritas na forma:

$$U_i = \hat{u}_i + S_i^{p,x} - K_{p,i} \frac{\partial P}{\partial X} \quad (17)$$

$$V_i = \hat{v}_i + S_i^{p,y} - K_{p,i} \frac{\partial P}{\partial Y} \quad (18)$$

sendo as novas variáveis expressas por:

$$\hat{u}_i = - \frac{\sum_{j \neq i} a_{i,j}U_j}{a_{i,i}}; \hat{v}_i = - \frac{\sum_{j \neq i} a_{i,j}V_j}{a_{i,i}}; K_{p,i} = \frac{b_i}{a_{i,i}}; S_i^{p,z} = \frac{s_i^{p,z}}{a_{i,i}} \quad (19)$$

A forma fraca da expressão de resíduos ponderados da equação da continuidade, por sua vez, é dada por:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} U + \frac{\partial N_i}{\partial Y} V \right) d\Omega = \int_{\Gamma} N_i u_n d\Gamma,$$

que, se utilizada a aproximação nodal e as Eqs. (17) a (19), pode ser representada como:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial N_i}{\partial X} N_j \left(\hat{u}_j + S_i^{p,x} - K_{p,j} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial Y} N_j \left(\hat{v}_j + S_i^{p,y} - K_{p,j} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) \right] d\Omega = \int_{\Gamma} N_i u_n d\Gamma$$

Depois de aplicada a aproximação nodal para o campo de pressões e localizando os termos desconhecidos do seu lado esquerdo, a equação ainda pode ser rearranjada na forma:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} N_j K_{p,j} \frac{\partial N_k}{\partial X} P_k + \frac{\partial N_i}{\partial Y} N_j K_{p,j} \frac{\partial N_k}{\partial Y} P_k \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} N_j (\hat{u}_j + S_j^{p,x}) + \frac{\partial N_i}{\partial Y} N_j (\hat{v}_j + S_j^{p,y}) \right) d\Omega - \int_{\Gamma} N_i u_n d\Gamma \quad (20)$$

Finalmente, calculado-se o campo de pressões pela Eq. (20), corrige-se o campo de velocidades obtidos através das expressões:

$$U_i = \hat{u}_i + S_i^{p,x} - \frac{1}{a_{i,i}} \int_{\Omega} N_i \frac{\partial P}{\partial X} d\Omega \quad (21)$$

$$V_i = \hat{v}_i + S_i^{p,y} - \frac{1}{a_{i,i}} \int_{\Omega} N_i \frac{\partial P}{\partial Y} d\Omega \quad (22)$$

3. RESULTADOS

A literatura disponível apresenta uma série de trabalhos contendo estudos a respeito de geometrias anulares. No entanto, uma comparação entre os resultados fica comprometida devido à variedade de dimensões características utilizadas na adimensionalização. Esta dimensão, em alguns trabalhos analisados não foi sequer explicitada, o que impossibilitou qualquer tipo de comparação. Para que os resultados aqui obtidos sejam confiáveis estes foram comparados com resultados do mesmo problema e com a mesma malha obtidos através programa ANSYS, um software tradicional da área de elementos finitos. Os resultados obtidos para o caso em que a razão de diâmetros é igual a 2, estão mostrados na Tabela (1). Através desta tabela pode-se, portanto, verificar a boa concordância entre as duas soluções no caso estudado e, desta forma, comprovar a eficácia do método de solução adotado.

Tabela 1: Tabela de resultados comparativos entre o ANSYS e a formulação proposta.

	Velocidade Máxima	Ponto da ocorrência	θ em $r = 1,5$ e 90°	θ em $r = 1,5$ e -90°
Este estudo	7,828	(1,2, 0,1)	0,566	0,295
ANSYS	8,037	(1,2, 0,1)	0,544	0,311
Erro (%)	2,6%	-	4,0%	5,4%

Comprovada a metodologia esta formulação foi aplicada na obtenção da solução do problema para as razões de diâmetro: 1,5, 2, 2,5, 3, 4 e 5, considerando $Ra_{R_i} = 10^3$ e $Pr = 0,7$. Os resultados obtidos para estes casos foram plotados, para uma análise mais detalhada, e estão apresentados nas Figs. (3) a (8). Entretanto um detalhe que não pode deixar de ser ressaltado é o fato de que todos os resultados deste trabalho foram obtidos tendo como dimensão característica do problema o raio interno (R_i) e, assim sendo, cuidados devem ser tomados quando é feita uma comparação direta com resultados de outros trabalhos.

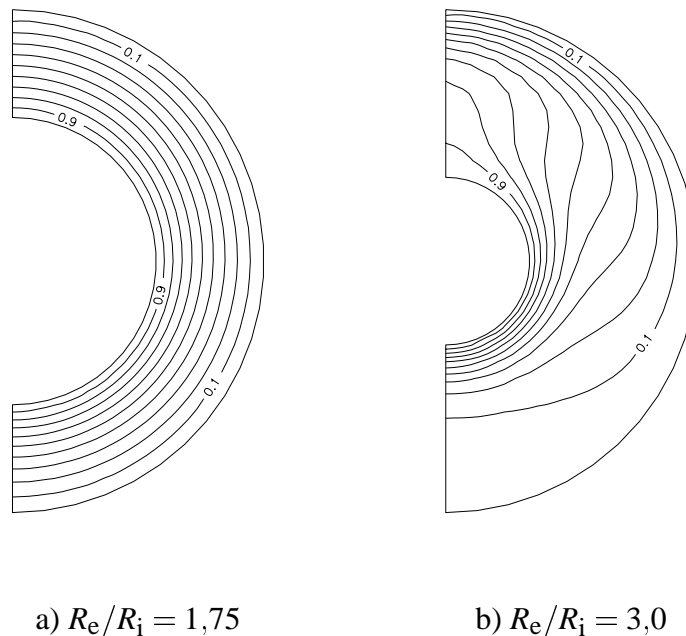
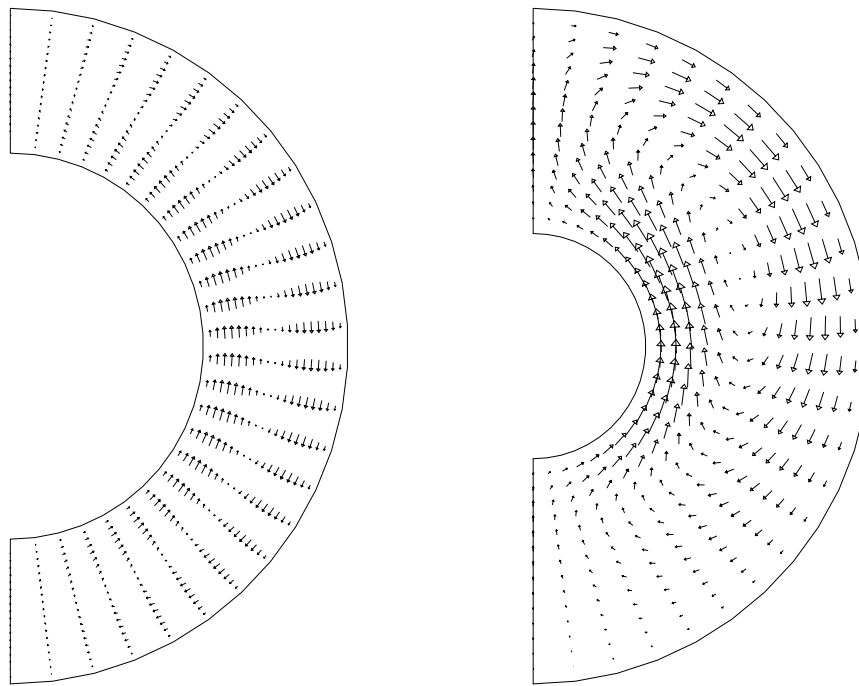


Figura 3: Linhas isotérmicas para os dois casos selecionados.



a) $R_e/R_i = 1,75$

b) $R_e/R_i = 3,0$

Figura 4: Perfis de velocidades para os dois casos seleccionados.

Numa primeira análise são apresentados os gráficos que permitem uma visualização de como o processo de transmissão de calor está ocorrendo. Para ilustrar o fato foram escolhidas as razões de diâmetros de 1,75 e 3, valores para os quais foram traçados gráficos das linhas isotérmicas, Fig. (3), e perfis de velocidade, Fig. (4). Estes gráficos estão plotados segundo uma mesma escala permitindo, assim, uma melhor comparação entre os resultados, mesmo para as diferentes razões de diâmetros. A análise destes resultados fica mais clara quando os separamos em dois grupos: um onde o fenômeno da transmissão de calor é condutivo dominante e outro onde o processo convectivo é que domina. No grupo onde a condução predomina as linhas isotérmicas estão igualmente espaçadas em todos os pontos e o campo de velocidades possui módulos de velocidades baixas, caso típico da situação onde $R_e/R_i = 1,75$. No outro grupo, onde predomina a convecção, a movimentação do fluido é mais intensa e o campo de temperaturas tem alterações significativas, caso típico do problema cuja relação $R_e/R_i = 3,0$. Neste caso, é possível notar que existem duas regiões onde há um acentuamento dos gradientes térmicos: a região inferior do anel interno e a superior do anel externo, que tendem a apresentar alto coeficiente de película.

Feita a análise de como ocorre o processo, é necessário a determinação de alguns parâmetros importantes em termos de projeto relacionado a tais geometrias. A primeira análise feita visa determinar o comportamento do número de Nusselt (Nu), em função da posição angular, tanto para a superfície interna do anel (Nu_i), apresentado na Fig. (5), como para a superfície externa (Nu_e), apresentado na Fig. (6). Estes gráficos mostram que, realmente, as regiões que apresentam gradientes térmicos mais acentuados, como discutido na Fig. (3), apresentam também maiores valores para o número de Nusselt. Da mesma forma, é possível identificar nesta figura que as regiões onde a transmissão de calor ocorre com maior intensidade vão diminuindo a medida que se aumenta a razão de diâmetros. Nesta análise é possível perceber que para baixas

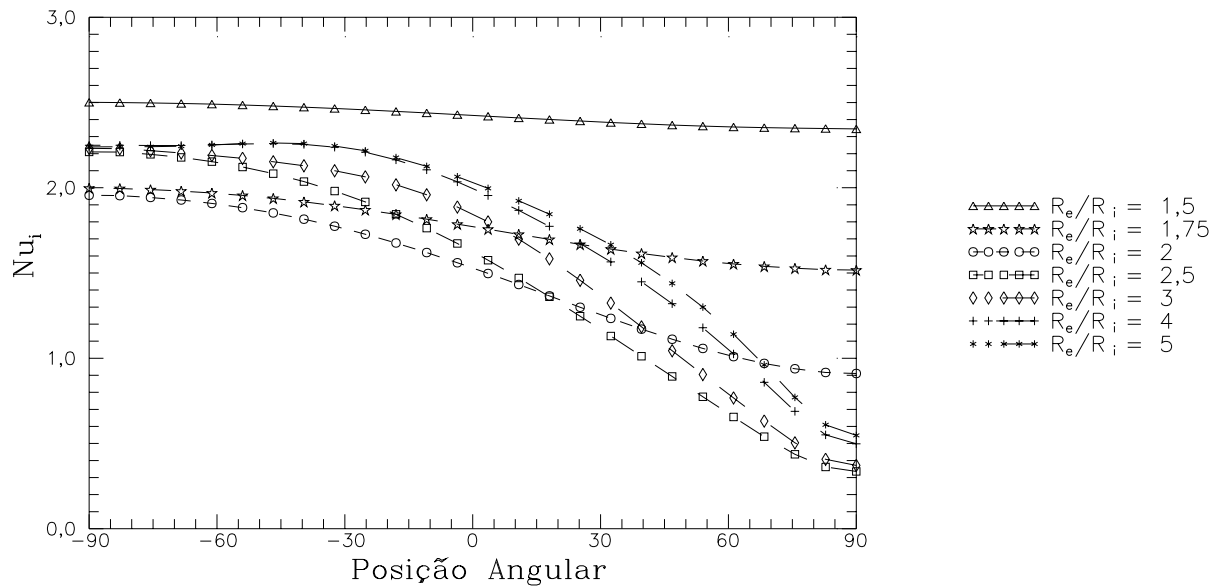


Figura 5: Variação angular do Nu para a superfície interna em função da razão R_e/R_i .

razões de raio, a transmissão de calor é distribuída uniformemente ao longo do cilindro. Por outro lado, para valores maiores, esta área se restringe às vizinhanças do ponto inferior, no caso da superfície interna, e nas vizinhanças do ponto superior, no caso da superfície externa.

Outro comportamento interessante apresentado é a variação dos valores de Nusselt máximo (Nu_{max}), médio (Nu_{med}) e mínimo (Nu_{min}) com a razão de diâmetros. A Fig. (7) apresenta esta variação para superfície interna do anel sendo possível, inclusive, identificar que nesta configuração existe um valor mínimo de troca de calor, que é alcançado por volta de $R_e/R_i = 2,2$. A partir deste ponto os valores do Nu_{med} voltam a aumentar, gerando um aumento na troca de calor entre as superfícies, tornando-se um valor praticamente constante a partir de $R_e/R_i = 4$. A Fig. (8) apresenta este comportamento para a superfície externa. Em-

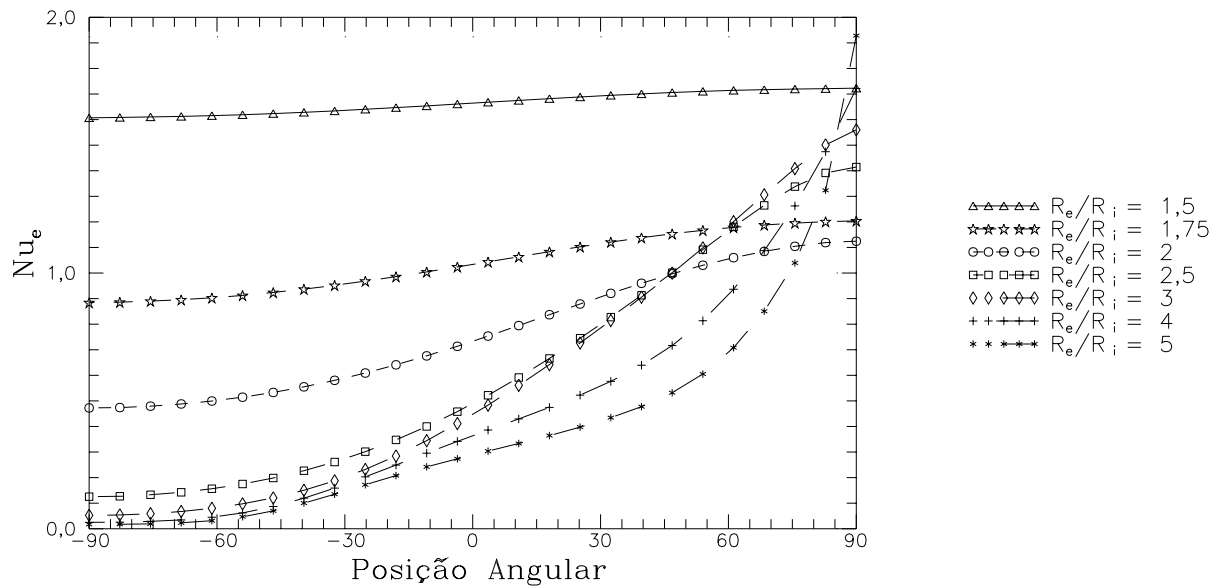


Figura 6: Variação angular do Nu para a superfície externa em função da razão R_e/R_i .

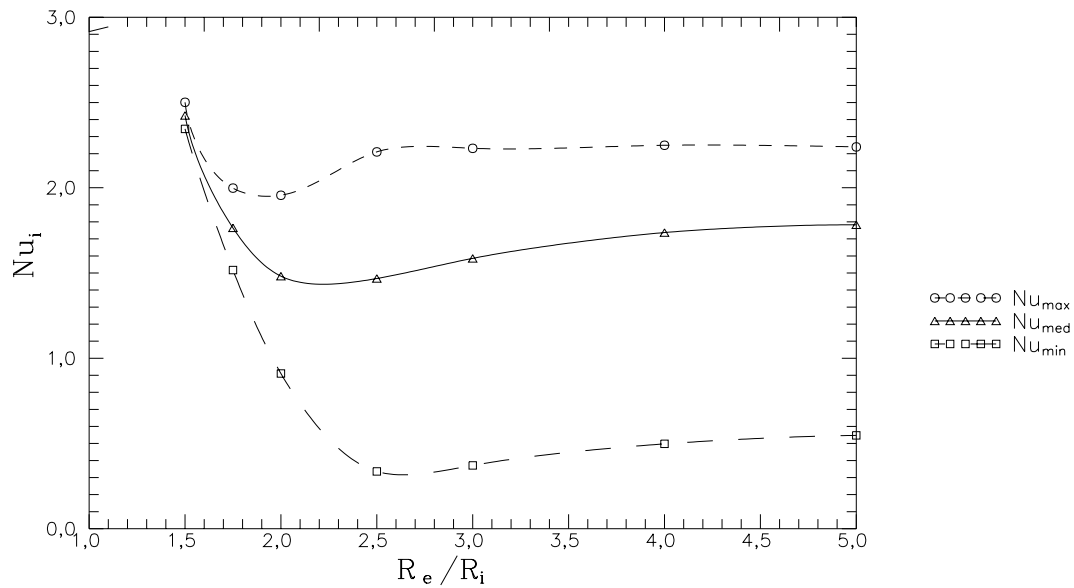


Figura 7: Variação dos valores de Nusselt na superfície interna em função da razão R_e/R_i .

bora o Nusselt médio pudesse ser obtidos diretamente dos valores na superfície interna, pela igualdade entre os fluxos de calor, é interessante analisar o seu comportamento em relação aos valores máximos e mínimos de Nusselt. Outro detalhe que chama a atenção é o comportamento diferenciado das curvas dos valores médios do Nusselt nas duas superfícies. Este comportamento se deve, principalmente, ao efeito de variação da área de troca da superfície externa enquanto a área interna permanece constante. O gráfico mostra que o Nusselt médio (Nu_{med}) na superfície externa tem uma tendência de queda permanente, convergindo para um valor praticamente constante em valores maiores de R_e/R_i .

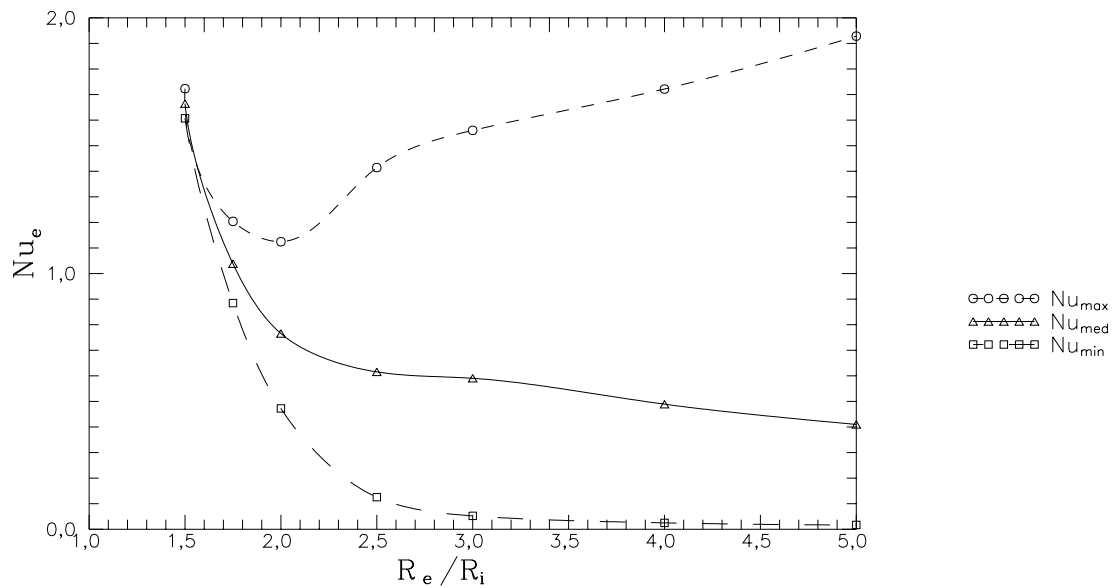


Figura 8: Variação dos valores de Nusselt na superfície externa em função da razão R_e/R_i .

4. CONCLUSÕES

Este trabalho utilizou ferramentas numéricas para obter resultados práticos que auxiliem no projeto de sistemas térmicos com geometrias anulares. Embora já existissem alguns trabalhos considerando a convecção natural em geometrias deste tipo, não existiam, até então, estudos mais detalhados de como este processo ocorre em função de variações na geometria. Com esta análise foi possível, inclusive, identificar o ponto onde a troca de calor é mínima entre as superfícies, para o número de Rayleigh considerado, e que pode ser utilizado em situações de isolamento térmico.

REFERÊNCIAS

- CHARRIER-MOJTABI, M. C., 1997, "Numerical simulation of two- and three-dimensional free convection flows in a horizontal porous annulus using a pressure and temperature formulation", Int. J. Heat and Mass Transfer, vol 40(7), pp. 1521-1533.
- GUJ, G. AND STELLA, F., 1995, "Natural convection in horizontal eccentric annuli: Numerical study", Numerical Heat Transfer: Part A, vol 27, pp. 89-105.
- IYER, S. V. AND VAFAI, K., 1997, "Effects of a geometric perturbation on buoyancy induced flow and heat transfer in a cylindrical annulus", Int. J. Heat and Mass Transfer, vol 40(12), pp. 2901-2911.
- SCALON, V. L., 1998, Estudo da mudança de fase em geometria plana aletada incluindo os efeitos convectivos, Tese de Doutorado - UNICAMP, Campinas.
- WANG, Y. Z. AND BAU, H. H., 1988, "Low rayleigh number convection in horizontal eccentric annuli", Phys. Fluids, vol 31, pp. 2467-2473.
- YOO, J.-S., 1998, "Natural convection in a narrow horizontal cylindrical annulus: $Pr \leq 0,3$ ", Int. J. Heat and Mass Transfer, vol 41, pp. 3055-3073.

ANALISYS OF NATURAL CONVECTION PROCESS IN AN ANNULAR CAVITY

Abstract. *This work presents a study of the natural convection process in an annular cavity located between two concentric cylinders for several relations of external and internal radius for a Rayleigh number, based on internal radius, of 10^3 . The solution for the problem is obtained by a finite elements method with equal order for the pressure and velocity fields. The results were compared with other numerical result and good agreement was found. Figures for several rates of external and internal radius are presented and discussed.*

Keywords: *Natural Convection, Annular Geometry, Finite Elements*